

## Contents

<b>1</b>	<b>Introduction</b>	<b>2</b>
1.1	Vue de l'ensemble . . . . .	2
1.2	Optique de l'ouvrage . . . . .	3
1.3	Notations et conventions . . . . .	3
1.4	Concepts de base . . . . .	4
1.5	Coordonnées barycentriques . . . . .	7
1.6	L'extraordinaire condition de cocyclicité . . . . .	10
1.7	Relation de Stewart . . . . .	13
1.8	Formulation analytique . . . . .	14
1.9	Exemples . . . . .	17
<b>2</b>	<b>Distances dans le quadrilatère</b>	<b>23</b>
2.1	Relation d'Euler entre les distances d'un quadrilatère . . . . .	23
2.2	Coordonnées barycentriques à partir de distances connues . . . . .	26
2.3	Coordonnées tripolaires . . . . .	31
<b>3</b>	<b>Le cercle des neuf points d'Euler</b>	<b>34</b>
3.1	Le cercle des neuf points d'Euler . . . . .	34
3.2	Théorème de Feuerbach . . . . .	39
<b>4</b>	<b>Points classiques</b>	<b>44</b>
4.1	Coordonnées barycentriques des points les plus classiques . . . . .	44
4.2	Formules remarquables . . . . .	46
4.3	Distances entre des points classiques d'un triangle . . . . .	51
<b>5</b>	<b>Droites orthogonales</b>	<b>57</b>
5.1	Point $M$ tel que $MM_1$ soit orthogonal à $M_2M_3$ . . . . .	57
5.2	Illustration par des exemples . . . . .	59
5.3	Le théorème des trois cercles de Monge et d'Alembert . . . . .	66
5.4	Un théorème de Cantor . . . . .	70
<b>6</b>	<b>Points cocycliques</b>	<b>73</b>
6.1	Condition de cocyclicité . . . . .	73
6.2	Autour du théorème de Ptolémée . . . . .	74
6.3	Centres de gravité de points cocycliques . . . . .	83
6.4	Cercle passant par les centres des cercles ex-inscrits . . . . .	85
<b>7</b>	<b>Formes fondamentales</b>	<b>92</b>
7.1	Expression analytique du produit scalaire dans le cas du plan . . . . .	92
7.2	Expression générale de la distance entre deux points . . . . .	93
7.3	Multi-produit scalaire . . . . .	94
7.4	Multi-rapport formel . . . . .	103

<b>8 Le multi-rapport</b>	<b>106</b>
8.1 Propriétés du multi-rapport . . . . .	106
8.2 Pappus revisité . . . . .	109
8.3 Alternative au théorème de Céva . . . . .	114
8.4 Multi-rapport d'un faisceau de droites . . . . .	119
8.5 Invariance du multi-rapport . . . . .	129
8.6 Faisceau harmonique . . . . .	132
<b>9 Projection orthogonale</b>	<b>138</b>
9.1 Projection d'un point sur une droite . . . . .	138
9.2 Formules diverses invoquant des projections . . . . .	139
9.3 Théorème de Steiner . . . . .	145
9.4 Droites concourantes passant par des points classiques . . . . .	147
9.5 Triangle podaire d'un point relativement à un triangle . . . . .	150
9.6 Formule de Pappus . . . . .	152
9.7 Projections et cocyclicité . . . . .	158
<b>10 Théorème de Pascal</b>	<b>166</b>
10.1 Un théorème de Pascal abstrait . . . . .	166
10.2 Théorème de Pascal pour une conique . . . . .	171
10.3 Le théorème de Pascal pour le cercle . . . . .	172
<b>11 Introduction aux coniques</b>	<b>176</b>
11.1 Equation générale d'une conique passant par $A, B, C$ . . . . .	176
11.2 Tangente à . . . . .	179
11.3 Le théorème d'Aubert pour une conique . . . . .	184
<b>12 Céviennes</b>	<b>188</b>
12.1 Théorème de Brianchon . . . . .	188
12.2 Céviennes dans un contexte général . . . . .	194
12.3 Céviennes dans un cas simple . . . . .	198
<b>13 Triangle orthique</b>	<b>202</b>
13.1 Triangle orthique, Cercle de Taylor . . . . .	202
<b>14 Points de Nagel et de Gergonne</b>	<b>212</b>
14.1 Points de Nagel et de Gergonne . . . . .	212
<b>15 Théorèmes du papillon</b>	<b>222</b>
15.1 Théorème du papillon simple . . . . .	222
15.2 Théorème du papillon simple pour une conique . . . . .	228
15.3 Théorème du papillon double pour une conique . . . . .	235
<b>16 Théorèmes de Napoléon et théorèmes semblables</b>	<b>237</b>
16.1 Exercice préliminaire . . . . .	237
16.2 Théorème de Napoléon . . . . .	239
16.3 Triangle orné de figures . . . . .	244

16.4	Théorème de Finsler Hadwiger . . . . .	247
16.5	Théorème de Van Aubel . . . . .	250
16.6	Point de Torricelli . . . . .	253
<b>17</b>	<b>Point de Lemoine</b>	<b>258</b>
17.1	Résultats techniques . . . . .	258
17.2	Isogonal d'un point par rapport à un triangle . . . . .	262
17.3	Le point de Lemoine . . . . .	265
17.4	Triangle podaire et point de Lemoine . . . . .	271
17.5	Théorème de Grèbe . . . . .	277
17.6	Une propriété d'extremum . . . . .	284
<b>18</b>	<b>Cercles de Lemoine et de Tucker</b>	<b>287</b>
18.1	Cercle de Lemoine . . . . .	287
18.2	Cercle de Tucker . . . . .	291
<b>19</b>	<b>Changement de repère</b>	<b>308</b>
19.1	Formule de changement de repère dans le plan . . . . .	308
19.2	Exemples . . . . .	310
19.3	Droites de Gauss et d'Aubert . . . . .	313
19.4	Point de Miquel . . . . .	318
<b>20</b>	<b>Triangle tangentiel</b>	<b>323</b>
20.1	Triangle tangentiel . . . . .	323
20.2	Centre d'homothétie . . . . .	333
<b>21</b>	<b>Groupe orthocentrique</b>	<b>340</b>
21.1	Dualités dans un triangle . . . . .	340
<b>22</b>	<b>Cercles d'Apollonius</b>	<b>351</b>
22.1	Cercles d'Apollonius . . . . .	351
<b>23</b>	<b>Théorèmes de Varignon et Wittenbauer</b>	<b>367</b>
23.1	Théorèmes de Varignon et Wittenbauer . . . . .	367
<b>24</b>	<b>Cercles de Brocard</b>	<b>377</b>
24.1	Cercles de Brocard . . . . .	377
24.2	Points de Brocard . . . . .	380
<b>25</b>	<b>Le tétraèdre</b>	<b>387</b>
25.1	Expression de la distance entre deux points de l'espace . . . . .	387
25.2	Un exemple . . . . .	387
25.3	Distance d'un point à un plan . . . . .	389
25.4	Relations entre distances et coordonnées barycentriques . . . . .	392
25.5	Sphère circonscrite . . . . .	393
25.6	Perpendiculaire commune à deux droites . . . . .	395
25.7	Sphère passant par les centres de gravité . . . . .	396

<b>26 Orthocentre dans un tétraèdre</b>	<b>399</b>
26.1 Hauteurs dans un tétraèdre . . . . .	399
26.2 Tétraèdre orthocentrique . . . . .	406
26.3 Le concept d'orthocentre en dimension paire . . . . .	410