

Contents

1	Introduction	1
1.1	Vue de l'ensemble	1
1.2	Optique de l'ouvrage	2
1.3	Notations et conventions	2
1.4	Concepts de base	3
1.5	Coordonnées barycentriques	6
1.6	L'extraordinaire condition de cocyclicité	8
1.7	Relation de Stewart	11
1.8	Formulation analytique	12
1.9	Exemples	15
2	Distances dans le quadrilatère	20
2.1	Relation d'Euler entre les distances d'un quadrilatère	20
2.2	Coordonnées barycentriques à partir de distances connues	23
2.3	Coordonnées tripolaires	28
3	Le cercle des neuf points d'Euler	30
3.1	Le cercle des neuf points d'Euler	30
4	Points classiques	35
4.1	Coordonnées barycentriques des points les plus classiques	35
4.2	Formules remarquables	36
4.3	Distances entre des points classiques d'un triangle	40
5	Droites orthogonales	46
5.1	Point M tel que MM_1 soit orthogonal à M_2M_3	46
5.2	Illustration par des exemples	48
5.3	Le théorème des trois cercles de Monge et d'Alembert	54
5.4	Un théorème de Cantor	58
6	Points cocycliques	61
6.1	Condition de cocyclicité	61
6.2	Autour du théorème de Ptolémée	62
6.3	Centres de gravité de points cocycliques	70
6.4	Cercle passant par les centres des cercles ex-inscrits	72
7	Formes fondamentales	78
7.1	Expression analytique du produit scalaire dans le cas du plan	78
7.2	Expression générale de la distance entre deux points	79
7.3	Multi-produit scalaire	80
7.4	Multi-rapport formel	89

8 Le multi-rapport	92
8.1 Propriétés du multi-rapport	92
8.2 Pappus revisité	94
8.3 Alternative au théorème de Céva	99
8.4 Multi-rapport d'un faisceau de droites	103
8.5 Invariance du multi-rapport	111
8.6 Faisceau harmonique	114
9 Projection orthogonale	119
9.1 Projection d'un point sur une droite	119
9.2 Formules diverses invoquant des projections	120
9.3 Théorème de Steiner	125
9.4 Droites concourantes passant par des points classiques	127
9.5 Triangle podaire d'un point relativement à un triangle	129
9.6 Formule de Pappus	131
9.7 Projections et cocyclicité	136
10 Théorème de Pascal	143
10.1 Un théorème de Pascal abstrait	143
10.2 Théorème de Pascal pour une conique	147
10.3 Le théorème de Pascal pour le cercle	148
11 Introduction aux coniques	152
11.1 Equation générale d'une conique passant par A, B, C	152
11.2 Tangente à une conique	155
11.3 Le théorème d'Aubert pour une conique	160
12 Céviennes	164
12.1 Théorème de Branchion	164
12.2 Céviennes dans un contexte général	169
12.3 Céviennes dans un cas simple	173
13 Triangle orthique	177
13.1 Triangle orthique, Cercle de Taylor	177
14 Points de Nagel et de Gergonne	187
14.1 Points de Nagel et de Gergonne	187
15 Théorèmes du papillon	196
15.1 Théorème du papillon simple	196
15.2 Théorème du papillon simple pour une conique	202
15.3 Théorème du papillon double pour une conique	208

16 Théorèmes de Napoléon et théorèmes semblables	210
16.1 Exercice préliminaire	210
16.2 Théorème de Napoléon	212
16.3 Triangle orné de figures	215
16.4 Théorème de Finsler Hadwiger	218
16.5 Théorème de Van Aubel	220
16.6 Point de Torricelli	222
17 Point de Lemoine	227
17.1 Résultats techniques	227
17.2 Isogonal d'un point par rapport à un triangle	230
17.3 Le point de Lemoine	233
17.4 Triangle podaire et point de Lemoine	239
17.5 Théorème de Grèbe	244
17.6 Une propriété d'extremum	250
18 Cercles de Lemoine et de Tucker	253
18.1 Cercle de Lemoine	253
18.2 Cercle de Tucker	257
19 Changement de repère	274
19.1 Formule de changement de repère dans le plan	274
19.2 Exemples	276
19.3 Droites de Gauss et d'Aubert	279
19.4 Point de Miquel	283
20 Triangle tangentiel	288
20.1 Triangle tangentiel	288
20.2 Centre d'homothétie	297
21 Groupe orthocentrique	304
21.1 Dualités dans un triangle	304
22 Cercles d'Apollonius	315
22.1 Cercles d'Apollonius	315
23 Théorèmes de Varignon et Wittenbauer	330
23.1 Théorèmes de Varignon et Wittenbauer	330
24 Cercles de Brocard	340
24.1 Cercles de Brocard	340
24.2 Points de Brocard	342

25 Le tétraèdre	349
25.1 Expression de la distance entre deux points de l'espace	349
25.2 Un exemple	350
25.3 Distance d'un point à un plan	351
25.4 Relations entre distances et coordonnées barycentriques	354
25.5 Sphère circonscrite	355
25.6 Perpendiculaire commune à deux droites	357
25.7 Sphère passant par les centres de gravité	358
26 Orthocentre dans un tétraèdre	357
26.1 Hauteurs dans un tétraèdre	357
26.2 Tétraèdre orthocentrique	364
26.3 Le concept d'orthocentre en dimension paire	368