

La Géométrie euclidienne par l'informatique I

*Méthode de résolution automatique des exercices et des théorèmes de géométrie
relatifs aux cercles, sphères, distances, coniques*

avec figures en couleur

Jean-Paul JURZAK

L'auteur autorise la libre utilisation et diffusion de la méthode de résolution des exercices, à des fins non-commerciales. Toute autre utilisation ou autre forme multimédia requiert l'autorisation de l'auteur.

Préface

La résolution informatique des exercices de géométrie euclidienne est désormais accessible sur un simple PC ou Mac. L'époque où l'on s'interrogeait sur le bien-fondé de l'utilisation des calculettes au lycée est révolue. *L'ordinateur remplace la calculette* et *le mode de pensée scientifique s'adapte aux logiciels spécialisés* dont les fonctions et les possibilités sont sans cesse croissantes.

Le calcul symbolique (factorisations, multiplication de polynômes ou de matrices,...etc) prend une place logique et naturelle dans l'enseignement des mathématiques, au sein des universités et des classes préparatoires. Ce calcul symbolique est fréquemment intégré dans les calculettes scientifiques au même titre que les fonctions statistiques des tableurs.

Les exercices ou théorèmes de géométrie traitant des angles, des cercles et des distances nécessitent traditionnellement des raisonnements astucieux et l'élaboration de théorèmes nouveaux en géométrie *s'appuie* souvent sur des théorèmes classiques: *cette démarche devient inutile*.

Ce travail, aboutissement d'une longue réflexion (car elle gomme l'aspect quadratique de nombreux exercices), met à la disposition de tous une démarche de *résolution automatique des exercices de géométrie*: l'expression "résolution automatique" ou "résolution mécanique" signifie que l'on n'effectue plus un raisonnement en s'appuyant sur un dessin mais que l'on dresse d'abord la liste des données (fournies par l'énoncé de l'exercice), puis l'on met en marche un procédé automatique et infaillible qui aboutit à la solution. Ainsi, le lecteur pourra démontrer sans peine (et avec contentement) les difficiles théorèmes et exercices de géométrie dans lesquels on enchevêtre cercles et droites et devant lesquels on se décourage rapidement. Même les coniques, si peu avenantes dans l'enseignement, lui paraîtront simples d'accès et attractives.

Il s'apercevra également que les méthodes élaborées dans ce travail vont au delà de l'objectif de la résolution mécanique, elles fournissent d'emblée des informations souvent difficilement accessibles (par exemple, l'obtention *instantanée* de la distance entre l'orthocentre et le centre de gravité) et apportent un point de vue nouveau sur les fondements de la géométrie classique. De surcroît, il est permis à chacun de découvrir de nouveaux théorèmes et de vérifier l'exactitude ou la non-exactitude de certaines propriétés d'une figure.

Il ne s'agit pas ici d'abandonner les méthodes classiques d'apprentissage de la géométrie mais d'apporter à chacun *un outil attrayant et moderne d'analyse des problèmes de géométrie*, outil interactif qui aide et fournit très souvent la résolution automatique. En outre, cette démarche contribue considérablement à la réflexion et à l'analyse des propriétés d'une figure: la pensée numérique est **une réalité incontournable** qui ne gomme pas le raisonnement scientifique classique, mais fournit à l'utilisateur des libertés nouvelles d'investigations scientifiques.

La modélisation de la géométrie est un premier pas vers la modélisation et la compréhension de la construction des molécules de la chimie et de la biologie.

Ce travail est dédié à mon épouse Dominique pour sa patience et son soutien.

Jean-Paul JURZAK
Faculté des Sciences Mirande
Université de Bourgogne
21000 - DIJON France

mail: Jean-Paul.Jurzak@u-bourgogne.fr

CHAPITRE

1

Introduction

1 Introduction

1.1 Vue de l'ensemble

L'ensemble du travail couvre **une partie importante de la géométrie euclidienne** et n'hésite pas à apporter des améliorations, voire des innovations, à des formules ou des résultats classiques. La méthode proposée est nouvelle et est amplement développée dans le cas de la géométrie plane, elle s'applique également à la géométrie dans l'espace (ou dans un espace à n dimensions si cela est requis). L'originalité de ce travail est également liée aux innovations apportées par les logiciels informatiques. La table des matières fournit une vue très rapide et concentrée de l'ensemble *qui va au delà du catalogue d'exercices*, comme le lecteur s'en apercevra rapidement.

Il m'a semblé nécessaire de m'adapter aux attentes et aux *profils scientifiques très variés des différents lecteurs*, étudiants, enseignants, informaticiens ou chercheurs: l'ouvrage proposé reflète de son mieux ces différentes exigences. Il en résulte que certains exercices sont volontairement simples, que les grands thèmes classiques (cercle d'Euler, triangle orthique, cercles d'Apollonius, de Tucker, de Lemoine, ...etc..) sont globalement traités, que certains théorèmes prennent une forme totalement nouvelle (par exemple, le théorème de Wittenbauer amélioré, le théorème du papillon double démontré pour une conique, le théorème d'Aubert pour une conique, le théorème de Brianchon pour une conique...) et que les multiples formules et théorèmes classiques (théorèmes de Napoléon, de Monge-d'Alembert, théorème de Feuerbach, de Van Aubel's, formules d'Euler...) sont insérés dans le chapitre censé être le plus adapté. Le chapitre relatif aux coniques est incomplet dans son état actuel et fera peut-être l'objet d'un travail ultérieur.

Le produit scalaire est une *forme fondamentale* de la géométrie euclidienne et ce travail propose *l'utilisation* de nouvelles formes fondamentales dont une étude partielle est proposée dans cet ouvrage (voir la table des matières).

Depuis 1970, la démonstration automatique en géométrie est l'objet de travaux de recherches internationaux plus ou moins complexes et fonctionnant le plus souvent sur de puissantes stations de travail: les méthodes proposées jusqu'à alors sont essentiellement limitées au plan et les techniques des chercheurs (Shang-Ching Chou, Xiao-Shan Gao, Wu Wen-tsün,...) dépassent largement le niveau étudiant et *ne fournissent aucune solution lisible*.

Les travaux de l'auteur *se distinguent radicalement des travaux précédents par leur simplicité et efficacité*: les nombreux problèmes *réputés quadratiques* sont *en fait linéaires* et il suit que *les solutions proposées sont aisément lisibles*. La méthode de résolution automatique fonctionne sur un PC, un Mac, pour des exercices ou théorèmes très généraux, non-nécessairement limités au plan (voir le chapitre relatif au tétraèdre par exemple). Pour ces motifs, **ce travail de recherche propose une ouverture nouvelle en direction du monde éducatif** et n'a pas lieu d'être limité aux revues scientifiques.

1.2 Optique de l'ouvrage

Les logiciels de calcul symbolique (les plus réputés étant Maple, Mathematica, Scilab, Matlab), brassent aisément les longues formules et il en résulte que le calcul de la distance entre deux points, la projection d'un point sur une droite,..etc.. se résument à des *fonctions programmées par l'utilisateur*, fonctions (en nombre restreint) appelées systématiquement lors de la résolution automatique et qui **fournissent immédiatement l'information attendue**.

Il suit une approche nouvelle de résolution des exercices de géométrie dans laquelle l'ordinateur joue un rôle central. Cette démarche innove en cette voie parce qu'elle remet réellement en cause le concept de raisonnement en géométrie, en l'adaptant à notre société d'ordinateurs.

L'optique de la géométrie présentée ici ne consiste plus à prendre un stylo et à développer courageusement les calculs liés à une situation nouvelle, **ces tâches appartiennent désormais à l'ordinateur**: une formule nécessitant plusieurs lignes devient chose banale pour l'informatique et les coordonnées barycentriques de points tels que l'orthocentre d'un triangle sont des quantités naturelles (nécessitant pourtant plusieurs lignes d'écriture manuelle) qui ne doivent pas effrayer l'étudiant ou l'enseignant de demain.

La géométrie sous cette forme interactive numérique est d'autant plus attrayante que les logiciels graphiques et éducatifs permettent de modifier et d'agrémenter le dessin (associé à un exercice donné) au bon vouloir de l'utilisateur. La résolution de chaque exercice nécessite l'analyse algorithmique de la figure sous-jacente et trouve plaisir à interroger le logiciel de calcul symbolique. La lecture des solutions fournies par l'ordinateur peut surprendre le lecteur qui trouvera parfois la démarche calculatoire trop abrégée (voire estompée).

Pour les informaticiens et mathématiciens, un programme (ou un moteur) de démonstration automatique est appelé "*prover*" (en français, prononcer "prouveur"). Le prover que nous utilisons ici est le prover de géométrie vectorielle de l'auteur, disponible sur Internet à l'adresse

<http://passerelle.u-bourgogne.fr/publications/webgeometrie/>

(mot-clé du moteur de recherche *géométrie vectorielle*). Le lecteur retrouvera donc l'automatisme développé dans ce site.

1.3 Notations et conventions

Dans un triangle ABC , les distances AB , AC , BC seront toujours notées respectivement c , b , a : cette convention classique est parfois rappelée en début de l'exercice ou de sa solution. Dans le cas de l'espace, les calculs s'avèrent d'emblée plus volumineux et l'obtention de formules plus courtes est obtenue en posant

$$d_1 = AB \quad d_2 = AC \quad d_3 = AD \quad d_4 = BC \quad d_5 = BD \quad d_6 = CD$$

(à partir du point A , on forme toutes les distances issues de A , puis on recommence avec B , ...etc).

Les *calculs d'intersection* sont ceux décrits dans le prover de géométrie vectorielle. Le terme "points purs" n'est pas indispensable ici, nous revenons à la terminologie habituelle de "repère barycentrique" qui est le terme mathématique adéquat. J'ai cependant maintenu le terme "point composé" afin de traduire la nécessité et la mise en route d'une analyse d'un tel point.

Les coordonnées des points considérés sont ainsi les coordonnées barycentriques que l'on doit impérativement *normaliser* (c'est à dire leur total doit être égal à 1) dans la progression et la résolution d'un exercice. Par exemple, le point J centre du cercle inscrit à un triangle ABC (le cercle inscrit à un triangle ABC est le cercle intérieur au triangle et tangent aux trois côtés du triangle) a pour coordonnées barycentriques

$\{a, b, c\}$ et la solution fera apparaître

$$J = \left\{ \frac{a}{a+b+c}, \frac{b}{a+b+c}, \frac{c}{a+b+c} \right\}$$

De la même façon, les coordonnées barycentriques d'un point $M = \{x, y, z\}$ quelconque deviennent

$$M = \left\{ \frac{x}{x+y+z}, \frac{y}{x+y+z}, \frac{z}{x+y+z} \right\}$$

Il advient que les quantités x, y, z sont assujetties à satisfaire des conditions traduites par des équations ou des systèmes d'équations: dans ce cas, on optera parfois pour des coordonnées barycentriques de la forme

$$M = \{x, y, 1 - x - y\}$$

afin de diminuer le nombre d'inconnues du problème.

Le centre du cercle circonscrit à un triangle est fréquemment noté K . En effet, il n'a pas été possible d'utiliser la notation O , le point O jouant un rôle spécial dans le découpage automatique des équations vectorielles.

Le chapitre *Points classiques* contient les coordonnées barycentriques des points fréquemment rencontrés (orthocentre, centre du cercle circonscrit,...). Le lecteur n'étant a priori pas familiarisé avec les coordonnées barycentriques des points classiques, nous rappelons ou énonçons dans chaque solution, au fur et à mesure de la progression du dessin géométrique, les coordonnées barycentriques des points utilisés.

1.4 Concepts de base

Ce paragraphe présente, sous une forme élémentaire, les articulations déterminantes.

Exercice 1.4.1

Soit A_1, A_2, A_3, A_4 des points du plan ou de l'espace. On pose

$$\delta(A_1, A_2, A_3, A_4) = A_1 A_2^2 - A_2 A_3^2 + A_3 A_4^2 - A_4 A_1^2$$

- L'expression

$$\overrightarrow{OA_1} \cdot \overrightarrow{OA_2} - \overrightarrow{OA_2} \cdot \overrightarrow{OA_3} + \overrightarrow{OA_3} \cdot \overrightarrow{OA_4} - \overrightarrow{OA_4} \cdot \overrightarrow{OA_1}$$

est indépendante de O et a pour valeur $\frac{-1}{2} \delta(A_1, A_2, A_3, A_4)$.

- On a:

$$\delta(A_1, A_2, A_3, A_4) = (-2) \overrightarrow{A_1 A_3} \cdot \overrightarrow{A_2 A_4}$$

et l'identité d'Euler: (noter la rotation circulaire sur les indices 2, 3, 4)

$$\delta(A_1, A_2, A_3, A_4) + \delta(A_1, A_3, A_4, A_2) + \delta(A_1, A_4, A_2, A_3) = 0$$

L'identité d'Euler est traditionnellement connue sous la forme

$$\overrightarrow{A_1 A_3} \cdot \overrightarrow{A_2 A_4} + \overrightarrow{A_1 A_4} \cdot \overrightarrow{A_3 A_2} + \overrightarrow{A_1 A_2} \cdot \overrightarrow{A_4 A_3} = 0$$

Solution:

On a successivement

$$\begin{aligned}\overrightarrow{A_1 A_2}^2 &= \overrightarrow{OA_1}^2 - 2 \overrightarrow{OA_1} \cdot \overrightarrow{OA_2} + \overrightarrow{OA_2}^2 \\ - \overrightarrow{A_2 A_3}^2 &= - \overrightarrow{OA_2}^2 + 2 \overrightarrow{OA_2} \cdot \overrightarrow{OA_3} - \overrightarrow{OA_3}^2 \\ + \overrightarrow{A_3 A_4}^2 &= \overrightarrow{OA_3}^2 - 2 \overrightarrow{OA_3} \cdot \overrightarrow{OA_4} + \overrightarrow{OA_4}^2 \\ - \overrightarrow{A_4 A_1}^2 &= - \overrightarrow{OA_4}^2 + 2 \overrightarrow{OA_4} \cdot \overrightarrow{OA_1} - \overrightarrow{OA_1}^2\end{aligned}$$

En additionnant membre à membre, on obtient

$$\delta(A_1, A_2, A_3, A_4) = (-2) (\overrightarrow{OA_1} \cdot \overrightarrow{OA_2} - \overrightarrow{OA_2} \cdot \overrightarrow{OA_3} + \overrightarrow{OA_3} \cdot \overrightarrow{OA_4} - \overrightarrow{OA_4} \cdot \overrightarrow{OA_1})$$

On choisit $O = A_1$, donc

$$\delta(A_1, A_2, A_3, A_4) = (-2) (-\overrightarrow{A_1 A_2} \cdot \overrightarrow{A_1 A_3} + \overrightarrow{A_1 A_3} \cdot \overrightarrow{A_1 A_4}) = (-2) \overrightarrow{A_1 A_3} \cdot (\overrightarrow{A_1 A_4} - \overrightarrow{A_1 A_2}) = (-2) \overrightarrow{A_1 A_3} \cdot \overrightarrow{A_2 A_4}$$

L'identité d'Euler s'obtient en ajoutant les expressions

$$\begin{aligned}\delta(A_1, A_2, A_3, A_4) &= A_1 A_2^2 - A_2 A_3^2 + A_3 A_4^2 - A_4 A_1^2 \\ \delta(A_1, A_3, A_4, A_2) &= A_1 A_3^2 - A_3 A_4^2 + A_4 A_2^2 - A_2 A_1^2 \\ \delta(A_1, A_4, A_2, A_3) &= A_1 A_4^2 - A_4 A_2^2 + A_2 A_3^2 - A_3 A_1^2\end{aligned}$$

Les termes des colonnes 2 et 3 se détruisent, ainsi que ceux des colonnes 1 et 4.

Exercice 1.4.2

Soient ABC un triangle, M, M_1 des points du plan de coordonnées barycentriques

$$M = \left\{ \frac{x}{x+y+z}, \frac{y}{x+y+z}, \frac{z}{x+y+z} \right\}$$

$$M_1 = \left\{ \frac{x_1}{x_1+y_1+z_1}, \frac{y_1}{x_1+y_1+z_1}, \frac{z_1}{x_1+y_1+z_1} \right\}$$

dans le repère barycentrique $\{A, B, C\}$.

Alors, la distance MM_1^2 a pour valeur

$$\begin{aligned}MM_1^2 &= \frac{AB^2 (x y_1 - x_1 y + x z_1 - x_1 z) (x y_1 - x_1 y + y_1 z - y_1 z_1)}{(x+y+z)^2 (x_1+y_1+z_1)^2} \\ &+ \frac{AC^2 (x z_1 - x_1 z + x y_1 - x_1 y) (x z_1 - x_1 z + y z_1 - y_1 z)}{(x+y+z)^2 (x_1+y_1+z_1)^2} \\ &+ \frac{BC^2 (y z_1 - y_1 z + x_1 y - x y_1) (y z_1 - y_1 z + x z_1 - x_1 z)}{(x+y+z)^2 (x_1+y_1+z_1)^2}\end{aligned}$$

Le lecteur se reportera au chapitre relatif au tétraèdre pour l'expression détaillée de la distance MM_1^2 entre deux points de l'espace. L'expression et la démonstration générale de la distance MM_1^2 entre deux points d'un espace de dimension n est établie dans le chapitre *Formes fondamentales*: on y trouvera également l'expression détaillée du produit scalaire dans le cas du plan.

Solution:

Nous esquissons une démonstration de cette formule (propre au plan). En désignant par O un point quelconque, on a

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OM} &= \frac{x}{x+y+z} \overrightarrow{OA} + \frac{y}{x+y+z} \overrightarrow{OB} + \frac{z}{x+y+z} \overrightarrow{OC} \\ \overrightarrow{OM_1} &= \frac{x_1}{x_1+y_1+z_1} \overrightarrow{OA} + \frac{y_1}{x_1+y_1+z_1} \overrightarrow{OB} + \frac{z_1}{x_1+y_1+z_1} \overrightarrow{OC}\end{aligned}$$

Ainsi

$$\overrightarrow{MM_1}^2 = (\overrightarrow{AM_1} - \overrightarrow{AM})^2 = \overrightarrow{AM_1}^2 - 2 \overrightarrow{AM_1} \cdot \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AM}^2$$

Calculons successivement $\overrightarrow{AM}^2$, $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AM_1}$, $\overrightarrow{AM}^2$.

Puisque $\overrightarrow{AM} = \frac{y}{x+y+z} \overrightarrow{AB} + \frac{z}{x+y+z} \overrightarrow{AC}$, il vient

$$\overrightarrow{AM}^2 = \frac{y^2}{(x+y+z)^2} AB^2 + \frac{2yz}{(x+y+z)^2} \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} + \frac{z^2}{(x+y+z)^2} AC^2$$

Or:

$$(-2) \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \delta(A, A, B, C) = -AB^2 - AC^2 + BC^2$$

donc

$$\overrightarrow{AM}^2 = \frac{y^2}{(x+y+z)^2} AB^2 + \frac{yz}{(x+y+z)^2} (AB^2 + AC^2 - BC^2) + \frac{z^2}{(x+y+z)^2} AC^2$$

$\overrightarrow{AM}^2$ a ainsi pour valeur

$$\overrightarrow{AM}^2 = \frac{AB^2 y (y+z)}{(x+y+z)^2} - \frac{BC^2 y z}{(x+y+z)^2} + \frac{AC^2 z (y+z)}{(x+y+z)^2}$$

De même, $\overrightarrow{AM_1} = \frac{y_1}{x_1+y_1+z_1} \overrightarrow{AB} + \frac{z_1}{x_1+y_1+z_1} \overrightarrow{AC}$ implique

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AM_1} &= \frac{y y_1}{(x+y+z)(x_1+y_1+z_1)} AB^2 + \frac{y z_1 + z y_1}{(x+y+z)(x_1+y_1+z_1)} \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} \\ &\quad + \frac{z z_1}{(x+y+z)(x_1+y_1+z_1)} AC^2\end{aligned}$$

Or:

$$(-2) \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \delta(A, A, B, C) = -AB^2 - AC^2 + BC^2$$

donc

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AM_1} &= \frac{y y_1}{(x+y+z)(x_1+y_1+z_1)} AB^2 + \frac{1}{2} \frac{y z_1 + z y_1}{(x+y+z)(x_1+y_1+z_1)} (AB^2 + AC^2 - BC^2) \\ &\quad + \frac{z z_1}{(x+y+z)(x_1+y_1+z_1)} AC^2\end{aligned}$$

$\overrightarrow{AM_1} \cdot \overrightarrow{AM}$ a donc pour valeur

$$\overrightarrow{AM_1} \cdot \overrightarrow{AM} = \frac{AB^2 (2y y_1 + y_1 z + y z_1)}{2(x+y+z)(x_1+y_1+z_1)} - \frac{BC^2 (y_1 z + y z_1)}{2(x+y+z)(x_1+y_1+z_1)} + \frac{AC^2 (y_1 z + y z_1 + 2z z_1)}{2(x+y+z)(x_1+y_1+z_1)}$$

De même, on obtient

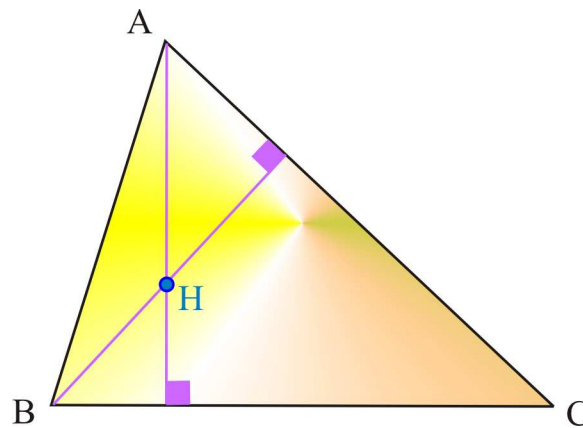
$$\overrightarrow{AM_1}^2 = \frac{AB^2 y_1 (y_1 + z_1)}{(x_1 + y_1 + z_1)^2} - \frac{BC^2 y_1 z_1}{(x_1 + y_1 + z_1)^2} + \frac{AC^2 z_1 (y_1 + z_1)}{(x_1 + y_1 + z_1)^2}$$

Le total $\overrightarrow{AM_1}^2 - 2 \overrightarrow{AM_1} \cdot \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AM}^2$ fournit l'expression de MM_1^2 .

1.5 Coordonnées barycentriques

Exercice 1.5.1

Soit ABC un triangle et H l'orthocentre du triangle. Déterminer les coordonnées barycentriques du point H .



Solution:

On définit H comme point d'intersection des hauteurs issues de A et B .

Dessin = $\{A, B, C, H\}$

Les coordonnées barycentriques choisies pour le point H sont de la forme:

$$H = \{x, y, 1 - x - y\}$$

On a $(-2) \overrightarrow{HA} \cdot \overrightarrow{BC} = \delta(H, B, A, C) = HB^2 - BA^2 + AC^2 - CH^2$.

avec

$$HB^2 = a^2 - a^2 x - b^2 x + c^2 x + b^2 x^2 - 2a^2 y + a^2 xy + b^2 xy - c^2 xy + a^2 y^2$$

$$HC^2 = b^2 x^2 + a^2 xy + b^2 xy - c^2 xy + a^2 y^2$$

Il suit

$$(-2) \overrightarrow{HA} \cdot \overrightarrow{BC} = a^2 + b^2 - c^2 - a^2 x - b^2 x + c^2 x - 2a^2 y$$

On a

$$(-2) \overrightarrow{HB} \cdot \overrightarrow{AC} = \delta(H, A, B, C) = HA^2 - AB^2 + BC^2 - CH^2$$

avec

$$AH^2 = b^2 - 2b^2 x + b^2 x^2 - a^2 y - b^2 y + c^2 y + a^2 xy + b^2 xy - c^2 xy + a^2 y^2$$

$$CH^2 = b^2 x^2 + a^2 xy + b^2 xy - c^2 xy + a^2 y^2$$

Il suit

$$(-2) \overrightarrow{HB} \cdot \overrightarrow{AC} = a^2 + b^2 - c^2 - 2b^2 x - a^2 y - b^2 y + c^2 y$$

On doit avoir $\overrightarrow{HB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$ et $\overrightarrow{HA} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$, soit

$$\begin{cases} 0 = a^2 + b^2 - c^2 - 2b^2 x + (-a^2 - b^2 + c^2) y \\ 0 = a^2 + b^2 - c^2 + (-a^2 - b^2 + c^2) x - 2a^2 y \end{cases}$$

La résolution du système linéaire d'inconnues x, y donne

$$x = \frac{-a^4 + b^4 - 2b^2 c^2 + c^4}{a^4 - 2a^2 b^2 + b^4 - 2a^2 c^2 - 2b^2 c^2 + c^4} \quad y = \frac{a^4 - b^4 - 2a^2 c^2 + c^4}{a^4 - 2a^2 b^2 + b^4 - 2a^2 c^2 - 2b^2 c^2 + c^4}$$

Il suit que les coordonnées barycentriques du point $H = \{x, y, 1 - x - y\} = \{x, y, z\}$ sont

$$H = \left\{ \frac{(a^2 + b^2 - c^2)(a^2 - b^2 + c^2)}{(-a + b + c)(a + b - c)(a - b + c)(a + b + c)}, \right. \\ \frac{(-a^2 + b^2 + c^2)(a^2 + b^2 - c^2)}{(-a + b + c)(a + b - c)(a - b + c)(a + b + c)}, \\ \left. \frac{(-a^2 + b^2 + c^2)(a^2 - b^2 + c^2)}{(-a + b + c)(a + b - c)(a - b + c)(a + b + c)} \right\}$$

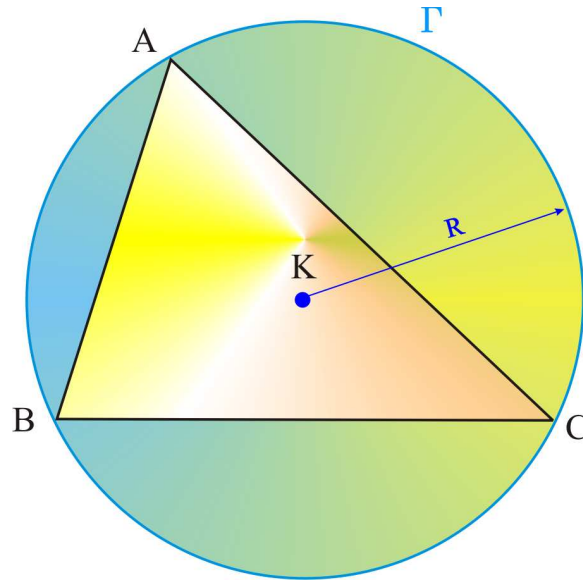
Il m'a semblé utile d'obtenir une formulation différente (susceptible de généralisations à des espaces de dimension supérieure), par exemple

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & c^2 & b^2 \\ 1 & c^2 & 0 & a^2 \\ 1 & b^2 & a^2 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & c^2 & b^2 \\ 1 & c^2 & 0 & a^2 \\ 1 & b^2 & a^2 & 0 \end{vmatrix}} \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & c^2 & b^2 \\ -1 & c^2 & 0 & a^2 \\ 1 & b^2 & a^2 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & c^2 & b^2 \\ 1 & c^2 & 0 & a^2 \\ 1 & b^2 & a^2 & 0 \end{vmatrix}} \quad z = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & c^2 & b^2 \\ 1 & c^2 & 0 & a^2 \\ -1 & b^2 & a^2 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & c^2 & b^2 \\ 1 & c^2 & 0 & a^2 \\ 1 & b^2 & a^2 & 0 \end{vmatrix}}$$

(d'autres représentations utilisant des déterminants d'ordre 4 sont possibles, par exemple en adjoignant à la diagonale principale des coefficients convenables)

Exercice 1.5.2

Soit ABC un triangle, K le centre du cercle circonscrit. Déterminer les coordonnées barycentriques du point K .

**Solution:**

Dessin = $\{A, B, C, K\}$

Le repère barycentrique choisi est A, B, C .

Le point K est composé.

Les coordonnées barycentriques choisies pour le point K sont:

$$K = \{x, y, 1 - x - y\}$$

La distance AK^2 est égale à

$$\begin{aligned} AK^2 &= AB^2 (1 - x) y + AC^2 (-1 + x) (-1 + x + y) + BC^2 y (-1 + x + y) \\ &= b^2 - 2b^2 x + b^2 x^2 - a^2 y - b^2 y + c^2 y + a^2 x y + b^2 x y - c^2 x y + a^2 y^2 \end{aligned}$$

La distance BK^2 est égale à

$$\begin{aligned} BK^2 &= AB^2 x (1 - y) + AC^2 x (-1 + x + y) + BC^2 (-1 + y) (-1 + x + y) \\ &= a^2 - a^2 x - b^2 x + c^2 x + b^2 x^2 - 2a^2 y + a^2 x y + b^2 x y - c^2 x y + a^2 y^2 \end{aligned}$$

La distance CK^2 est égale à

$$\begin{aligned} CK^2 &= AB^2 x y + AC^2 x (x + y) + BC^2 y (x + y) \\ &= b^2 x^2 + a^2 x y + b^2 x y - c^2 x y + a^2 y^2 \end{aligned}$$

On doit avoir $AK^2 - BK^2 = 0$ et $AK^2 - CK^2 = 0$, soit

$$\begin{cases} 0 = -a^2 + b^2 + (a^2 - b^2 - c^2) x + (a^2 - b^2 + c^2) y \\ 0 = b^2 - 2b^2 x + (-a^2 - b^2 + c^2) y \end{cases}$$

La résolution du système linéaire d'inconnues x, y donne

$$x = \frac{a^4 - a^2 b^2 - a^2 c^2}{a^4 - 2a^2 b^2 + b^4 - 2a^2 c^2 - 2b^2 c^2 + c^4} \quad y = \frac{-a^2 b^2 + b^4 - b^2 c^2}{a^4 - 2a^2 b^2 + b^4 - 2a^2 c^2 - 2b^2 c^2 + c^4}$$

Il suit que les coordonnées barycentriques du point $K = \{x, y, 1 - x - y\}$ sont

$$K = \left\{ \frac{a^2 (a^2 - b^2 - c^2)}{(a - b - c) (a + b - c) (a - b + c) (a + b + c)}, \frac{b^2 (-a^2 + b^2 - c^2)}{(-a + b - c) (a + b - c) (-a + b + c) (a + b + c)}, \frac{c^2 (a^2 + b^2 - c^2)}{(-a + b + c) (a + b - c) (a - b + c) (a + b + c)} \right\}$$

1.6 L'extraordinaire condition de cocyclicité

Exercice 1.6.1 Condition de cocyclicité

Soit ABC un triangle et $AB = c$, $BC = a$, $AC = b$. Un point M de coordonnées barycentriques non-normalisées $M = \{X, Y, Z\}$ appartient au cercle circonscrit au triangle ABC si et seulement si l'on a

$$c^2 XY + b^2 XZ + a^2 YZ = 0$$

Il revient au même d'écrire $M = \{X, Y, -\frac{c^2 XY}{b^2 X + a^2 Y}\}$: **la condition de cocyclicité se traduit donc par une équation linéaire** en l'une des coordonnées. En contournant ainsi les traditionnelles difficultés liées à l'existence de termes quadratiques apportés par les coordonnées cartésiennes, on apporte une optique insoupçonnée à la géométrie métrique permettant en particulier la résolution automatique des théorèmes métriques les plus difficiles. Cette efficacité nouvelle trouvera un large champ d'action dans d'autres domaines scientifiques.

Les coordonnées barycentriques du point M deviennent normalisées en les divisant par le total

$$X + Y - \frac{c^2 XY}{b^2 X + a^2 Y}$$

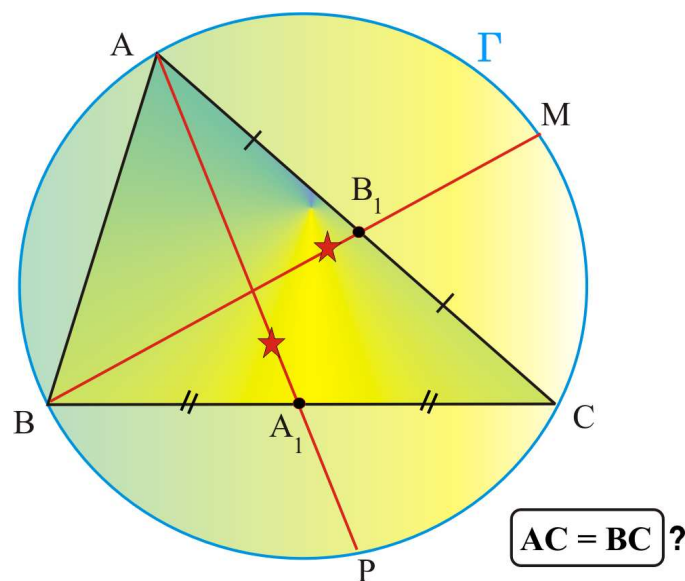
Nous renvoyons au chapitre "*Points cocycliques*" pour la démonstration simple de cet exercice.

Nous verrons que l'appartenance d'un point à la sphère circonscrite à un tétraèdre se traduit également par **une équation linéaire**.

Exercice 1.6.2 Un problème ouvert posé sur Internet par Nttu

Soient A, B, C trois points distincts appartenant à un même cercle Γ . On désigne par A_1 (resp. B_1) le milieu de $[BC]$ (resp. $[AC]$). La droite (AA_1) coupe le cercle Γ en un point P (distinct de A), la droite (BB_1) coupe le cercle Γ en un point M (distinct de B).

On suppose que $AP = BM$. A-t-on $AC = BC$?

**Solution:**

Dessin = $\{A, A_1, B, B_1, C\}$

Le repère barycentrique choisi est A, B, C .

Les points composés sont A_1, B_1 .

Les coordonnées barycentriques des points composés sont:

$$A_1 = \{0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\}$$

$$B_1 = \{\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}\}$$

Dessin = $\text{Dessin} \cup \{P, M\} = \{A, A_1, B, B_1, C, P, M\}$

Le repère barycentrique choisi est A, B, C .

Les points composés sont M, P .

Un point appartenant à la droite (BB_1) a pour coordonnées

$$\{\frac{1-k}{2}, k, \frac{1-k}{2}\}$$

k étant un réel quelconque.

Lorsque ce point est sur le cercle, l'équation du cercle $c^2 XY + b^2 XZ + a^2 YZ = 0$ devient

$$0 = b^2 + (2a^2 - 2b^2 + 2c^2)k + (-2a^2 + b^2 - 2c^2)k^2$$

Il suit

$$k = 1 \quad k = \frac{b^2}{-2a^2 + b^2 - 2c^2}$$

On déduit que l'intersection est formée de B et de

$$M = \left\{ \frac{a^2 + c^2}{2a^2 - b^2 + 2c^2}, \frac{b^2}{-2a^2 + b^2 - 2c^2}, \frac{a^2 + c^2}{2a^2 - b^2 + 2c^2} \right\}$$

Un point appartenant à la droite (AA_1) a pour coordonnées

$$\left\{k, \frac{1-k}{2}, \frac{1-k}{2}\right\}$$

$$\left\{k, \frac{1-k}{2}, \frac{1-k}{2}\right\}$$

k étant un réel quelconque.

Lorsque ce point est sur le cercle, l'équation du cercle $c^2 XY + b^2 XZ + a^2 YZ = 0$ devient

$$0 = a^2 + (-2a^2 + 2b^2 + 2c^2)k + (a^2 - 2b^2 - 2c^2)k^2$$

Il suit

$$k = 1 \quad k = \frac{a^2}{a^2 - 2(b^2 + c^2)}$$

On déduit que l'intersection est formée de A et de

$$P = \left\{\frac{a^2}{a^2 - 2b^2 - 2c^2}, \frac{b^2 + c^2}{-a^2 + 2b^2 + 2c^2}, \frac{b^2 + c^2}{-a^2 + 2b^2 + 2c^2}\right\}$$

La distance AP^2 est égale à

$$AP^2 = \frac{2AB^2(b^2 + c^2)^2}{(-a^2 + 2b^2 + 2c^2)^2} + \frac{2AC^2(b^2 + c^2)^2}{(-a^2 + 2b^2 + 2c^2)^2} - \frac{BC^2(b^2 + c^2)^2}{(-a^2 + 2b^2 + 2c^2)^2}$$

soit

$$AP^2 = \frac{(b^2 + c^2)^2(a^2 + 2c^2)}{(a^2 - 2b^2 - 2c^2)^2}$$

La distance BM^2 est égale à

$$BM^2 = \frac{2AB^2(a^2 + c^2)^2}{(2a^2 - b^2 + 2c^2)^2} - \frac{AC^2(a^2 + c^2)^2}{(2a^2 - b^2 + 2c^2)^2} + \frac{2BC^2(a^2 + c^2)^2}{(2a^2 - b^2 + 2c^2)^2}$$

soit

$$BM^2 = \frac{(a^2 + c^2)^2(a^2 + 2c^2)}{(2a^2 - b^2 + 2c^2)^2}$$

On a alors

$$BM^2 - AP^2 = \frac{(a-b)(a+b)(a^2 + b^2 + c^2)(a^2 + 2c^2)(a^4 - 4a^2b^2 + b^4 - 3a^2c^2 - 3b^2c^2 - 4c^4)}{(a^2 - 2b^2 - 2c^2)^2(2a^2 - b^2 + 2c^2)^2}$$

La condition $AP = BM$ implique $a = b$ ou

$$a^4 - 4a^2b^2 + b^4 - 3a^2c^2 - 3b^2c^2 - 4c^4 = 0 \quad (1)$$

Il est facile de vérifier qu'il existe des réels a, b, c tous positifs qui satisfont cette dernière équation. Or, ces réels doivent vérifier les trois conditions

$$a \leq b + c \quad b \leq a + c \quad c \leq a + b$$

conditions que les vérifications numériques ne semblent pas confirmer. Transformons l'équation proposée en posant

$$\begin{cases} a + b - c = y_1 \\ a - b + c = y_2 \\ -a + b + c = y_3 \end{cases}$$

les quantités y_1, y_2, y_3 devant être positives. La résolution de ce système linéaire implique

$$\begin{cases} a = \frac{y_1 + y_2}{2} \\ b = \frac{y_1 + y_3}{2} \\ c = \frac{y_2 + y_3}{2} \end{cases}$$

L'équation 1 se transforme alors en la somme

$$\begin{aligned} & -y_1^4 - 2y_1^3 y_2 - 2y_1^2 y_2^2 - y_1 y_2^3 - 3y_2^4 - 2y_1^3 y_3 - 14y_1^2 y_2 y_3 - 13y_1 y_2^2 y_3 \\ & - 11y_2^3 y_3 - 2y_1^2 y_3^2 - 13y_1 y_2 y_3^2 - 17y_2^2 y_3^2 - y_1 y_3^3 - 11y_2 y_3^3 - 3y_3^4 = 0 \end{aligned}$$

Il résulte que $y_1 = y_2 = y_3 = 0$ puisque les y_i sont tous positifs, ce qui est absurde. Donc, $a = b$.

1.7 Relation de Stewart

Exercice 1.7.1

Soit ABC un triangle et D un point de (BC) . Montrer que

$$\overline{AB}^2 \cdot \overline{CD} + \overline{AC}^2 \cdot \overline{DB} + \overline{AD}^2 \cdot \overline{BC} + \overline{CD} \cdot \overline{DB} \cdot \overline{BC} = 0$$

Solution:

Dessin $= \{A, B, C, D\}$

Le repère barycentrique choisi est A, B, C .

Le point composé est D .

Soit k un réel tel que $\overrightarrow{BD} = k \overrightarrow{BC}$.

On déduit les coordonnées barycentriques du point composé D :

$$D = \{0, 1 - k, k\}$$

La distance AD^2 est égale à

$$\begin{aligned} AD^2 &= AB^2 (1 - k) + AC^2 k + BC^2 (-1 + k) k \\ &= c^2 - a^2 k + b^2 k - c^2 k + a^2 k^2 \end{aligned}$$

En orientant la droite (BC) positivement de B vers C , on obtient

$$\overline{AB}^2 \cdot \overline{CD} + \overline{AC}^2 \cdot \overline{DB} + \overline{AD}^2 \cdot \overline{BC} = c^2 (k - 1) a + b^2 (-k a) + AD^2 a = a^3 (-1 + k) k$$

et

$$\overline{CD} \cdot \overline{DB} \cdot \overline{BC} = \overline{BC} \cdot \overline{DB} \cdot (\overline{CB} + \overline{BD}) = (k-1) a (-k a) a = -a^3 (-1+k) k$$

1.8 Formulation analytique

Exercice 1.8.1

Soit ABC un cercle, et M_0 un point de coordonnées barycentriques $\{x_0, y_0, 1 - x_0 - y_0\}$.

1. Déterminer la condition nécessaire et suffisante pour qu'un point M de coordonnées barycentriques $\{x, y, 1 - x - y\}$ appartienne au cercle de centre M_0 et de rayon R (équation d'un cercle en coordonnées barycentriques).

2. Trouver analytiquement l'ensemble des points M du plan tels que l'on ait

$$MA^2 + 2MB^2 + 2MC^2 = Cste$$

$Cste$ étant une constante (on déterminera d'abord l'équation barycentrique de cet ensemble que l'on analysera alors en détails).

3. Même question pour l'ensemble

$$MA^2 + MB^2 + MC^2 = Cste$$

4. Etudier l'ensemble

$$AM^2 - 2 \overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{AC} + 6 \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MC} = Cste$$

5. Indiquer la description de l'ensemble

$$b_1 MA^2 + b_2 MB^2 + b_3 MC^2 = Cste$$

b_1, b_2, b_3 étant trois constantes.

Solution:

Dessin = $\{A, B, C, M, M_0\}$

Le repère barycentrique choisi est A, B, C .

Les points composés sont M, M_0 .

Les coordonnées barycentriques des points composés sont:

$$M = \{x, y, 1 - x - y\}$$

$$M_0 = \{x_0, y_0, 1 - x_0 - y_0\}$$

La distance M_0M^2 est égale à

$$M_0M^2 = AB^2 (-x + x_0) (y - y_0) + AC^2 (-x + x_0) (-x + x_0 - y + y_0) - BC^2 (y - y_0) (-x + x_0 - y + y_0)$$

soit

$$M_0 M^2 = b^2 x^2 - 2b^2 x x_0 + b^2 x_0^2 + a^2 x y + b^2 x y - c^2 x y - a^2 x_0 y - b^2 x_0 y + c^2 x_0 y + a^2 y^2 - a^2 x y_0 - b^2 x y_0 + c^2 x y_0 + a^2 x_0 y_0 + b^2 x_0 y_0 - c^2 x_0 y_0 - 2a^2 y y_0 + a^2 y_0^2$$

L'équation du cercle de centre M_0 et de rayon R est, en coordonnées barycentriques

$$R^2 = b^2 x^2 + a^2 y^2 + (a^2 + b^2 - c^2) x y - x [2b^2 x_0 + (a^2 + b^2 - c^2) y_0] - y [2a^2 y_0 + (a^2 + b^2 - c^2) x_0] + b^2 x_0^2 + a^2 y_0^2 + (a^2 + b^2 - c^2) x_0 y_0$$

La distance AM^2 est égale à

$$AM^2 = AB^2 (1-x) y + AC^2 (-1+x) (-1+x+y) + BC^2 y (-1+x+y)$$

soit

$$AM^2 = b^2 - 2b^2 x + b^2 x^2 - a^2 y - b^2 y + c^2 y + a^2 x y + b^2 x y - c^2 x y + a^2 y^2$$

La distance BM^2 est égale à

$$BM^2 = AB^2 x (1-y) + AC^2 x (-1+x+y) + BC^2 (-1+y) (-1+x+y)$$

soit

$$BM^2 = a^2 - a^2 x - b^2 x + c^2 x + b^2 x^2 - 2a^2 y + a^2 x y + b^2 x y - c^2 x y + a^2 y^2$$

La distance CM^2 est égale à

$$CM^2 = -AB^2 x y + AC^2 x (x+y) + BC^2 y (x+y)$$

soit

$$CM^2 = b^2 x^2 + a^2 x y + b^2 x y - c^2 x y + a^2 y^2$$

Ainsi, l'équation $MA^2 + 2MB^2 + 2MC^2 = \text{Cste}$ devient

$$2a^2 + b^2 - 2a^2 x - 4b^2 x + 2c^2 x + 5b^2 x^2 - 5a^2 y - b^2 y + c^2 y + 5a^2 x y + 5b^2 x y - 5c^2 x y + 5a^2 y^2 - \text{Cste} = 0$$

équation Eq_2 de l'ensemble des points M , en coordonnées barycentriques.

Puisque les termes de degré deux de cette équation sont

$$5b^2 x^2 + (5a^2 + 5b^2 - 5c^2) x y + 5a^2 y^2$$

nous mettons cette équation Eq_2 en analogie avec l'équation abstraite Eq_1 du cercle de la première question et formons $Eq_2 - 5Eq_1$. On obtient alors

$$\begin{aligned} 0 &= 2a^2 + b^2 - \text{Cste} + 5R^2 - 5b^2 x_0^2 - 5a^2 x_0 y_0 - 5b^2 x_0 y_0 + 5c^2 x_0 y_0 - 5a^2 y_0^2 \\ &+ y (-5a^2 - b^2 + c^2 + 5a^2 x_0 + 5b^2 x_0 - 5c^2 x_0 + 10a^2 y_0) \\ &+ x (-2a^2 - 4b^2 + 2c^2 + 10b^2 x_0 + 5a^2 y_0 + 5b^2 y_0 - 5c^2 y_0) \end{aligned}$$

quelque soient x, y . Ainsi, on doit avoir

$$\begin{cases} -2a^2 - 4b^2 + 2c^2 + 10b^2 x_0 + 5a^2 y_0 + 5b^2 y_0 - 5c^2 y_0 = 0 \\ -5a^2 - b^2 + c^2 + 5a^2 x_0 + 5b^2 x_0 - 5c^2 x_0 + 10a^2 y_0 = 0 \end{cases}$$

La solution à ce système linéaire d'inconnues x_0, y_0 est

$$x_0 = \frac{1}{5} \quad y_0 = \frac{2}{5}$$

et l'équation

$$2a^2 + b^2 - \text{Cste} + 5R^2 - 5b^2x_0^2 - 5a^2x_0y_0 - 5b^2x_0y_0 + 5c^2x_0y_0 - 5a^2y_0^2 = 0$$

devient

$$\frac{4a^2 + 2b^2 + 2c^2 - 5\text{Cste} + 25R^2}{5} = 0$$

donc

$$R^2 = \frac{-4a^2 - 2b^2 - 2c^2 + 5\text{Cste}}{25}$$

Ainsi, lorsque $-4a^2 - 2b^2 - 2c^2 + 5\text{Cste} \geq 0$, l'ensemble cherché est un cercle de centre $M_0 = \{\frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{3}{5}\}$ et de rayon $R = \frac{\sqrt{-4a^2 - 2b^2 - 2c^2 + 5\text{Cste}}}{5}$.

3). L'ensemble cherché a pour équation

$$a^2 + b^2 - \text{Cste} - a^2x - 3b^2x + c^2x + 3b^2x^2 - 3a^2y - b^2y + c^2y + 3a^2xy + 3b^2xy - 3c^2xy + 3a^2y^2 = 0$$

c'est le cercle ayant pour centre le centre de gravité du triangle ABC et pour rayon $R = \frac{\sqrt{-a^2 - b^2 - c^2 + 3\text{Cste}}}{3}$, lorsque $-a^2 - b^2 - c^2 + 3\text{Cste} \geq 0$.

4). Les expressions de AM^2 , BM^2 , CM^2 sont décrites dans la seconde question.

On a

$$(-2) \overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{AC} = \delta(M, A, B, C) = MA^2 - AB^2 + BC^2 - CM^2$$

donc

$$(-2) \overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{AC} = a^2 + b^2 - c^2 - 2b^2x - a^2y - b^2y + c^2y$$

On a

$$(-2) \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MC} = \delta(M, M, A, C) = -MA^2 + AC^2 - CM^2$$

donc

$$(-2) \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MC} = 2b^2x - 2b^2x^2 + a^2y + b^2y - c^2y - 2a^2xy - 2b^2xy + 2c^2xy - 2a^2y^2$$

Ainsi, $AM^2 - 2 \overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{AC} + 6 \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MC} - \text{Cste} = 0$ devient

$$a^2 + 2b^2 - c^2 - \text{Cste} - 10b^2x + 7b^2x^2 - 5a^2y - 5b^2y + 5c^2y + 7a^2xy + 7b^2xy - 7c^2xy + 7a^2y^2 = 0$$

Les mêmes arguments nous amènent à résoudre le système linéaire

$$\begin{cases} -10b^2 + 14b^2x_0 + 7a^2y_0 + 7b^2y_0 - 7c^2y_0 = 0 \\ -5a^2 - 5b^2 + 5c^2 + 7a^2x_0 + 7b^2x_0 - 7c^2x_0 + 14a^2y_0 = 0 \end{cases}$$

qui fournit

$$x_0 = \frac{5}{7} \quad y_0 = 0$$

On a alors

$$\frac{7a^2 - 11b^2 - 7c^2 - 7\text{Cste} + 49R^2}{7} = 0$$

L'ensemble cherché est le cercle de centre $\{\frac{5}{7}, 0, \frac{2}{7}\}$ et de rayon $R = \frac{\sqrt{-7a^2 + 11b^2 + 7c^2 + 7\text{Cste}}}{7}$, lorsque ce réel est défini.

5). L'ensemble cherché est un cercle. Les calculs réalisés par l'ordinateur fournissent le centre

$$\left\{ \frac{b_1}{b_1 + b_2 + b_3}, \frac{b_2}{b_1 + b_2 + b_3}, \frac{b_3}{b_1 + b_2 + b_3} \right\}$$

et

$$R^2 = \frac{(b_1 + b_2 + b_3)\text{Cste} - b^2 b_1 b_3 - a^2 b_2 b_3 - b_1 b_2 c^2}{(b_1 + b_2 + b_3)^2}$$

1.9 Exemples

Nous illustrons notre démarche en traitant deux exemples issus des travaux de S.C Chou et W.T Wu.

Exercice 1.9.1

Soit $ABCD$ un carré, E un point situé sur la parallèle à (BD) passant par C tel que l'on ait $BE = BD$ et F l'intersection des droites (BE) et (CD) . Montrer que les distances DF et DE sont égales.

Solution:

On a $AB = BC = a = b$ et $BC = \sqrt{2}a$.

Dessin = $\{A, B, C, D, E\}$

Soit k un réel tel que $\overrightarrow{CE} = k \overrightarrow{BD}$. On a les équations vectorielles

$$\begin{aligned} \vec{0} &= \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{DC} \\ \vec{0} &= \overrightarrow{CE} - k \overrightarrow{BD} \end{aligned}$$

et, par découpages automatiques, le système linéaire

$$\begin{aligned} \vec{0} &= -\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} \\ \vec{0} &= k \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC} - k \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OE} \end{aligned}$$

Le repère barycentrique choisi est A, B, C .

Les points composés sont E, D .

On déduit les coordonnées barycentriques des points composés:

$$\begin{aligned} D &= \{1, -1, 1\} \\ E &= \{k, -2k, 1+k\} \end{aligned}$$

La distance BD^2 est égale à

$$BD^2 = 2a^2$$

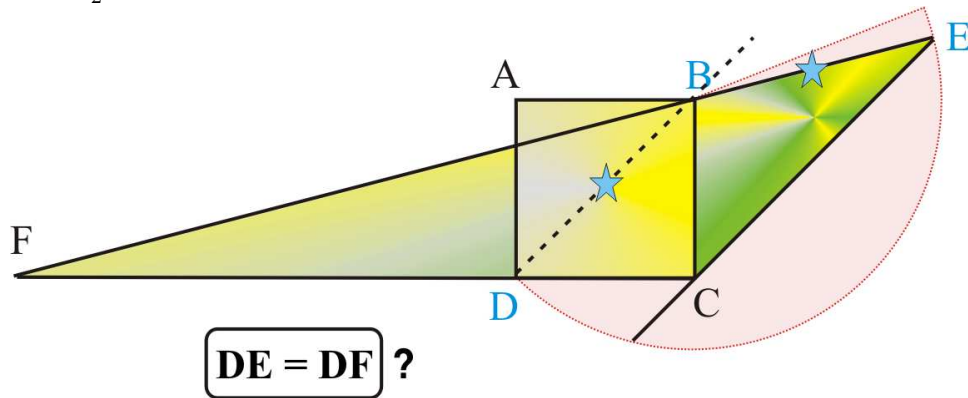
La distance BE^2 est égale à

$$\begin{aligned} BE^2 &= -AC^2 k(1+k) + AB^2 k(1+2k) + BC^2(1+k)(1+2k) \\ &= a^2(1+2k+2k^2) \end{aligned}$$

L'égalité $BE = BD$ implique $a^2 (1 + 2k + 2k^2) = 2a^2$ soit

$$k = \frac{-1 - \sqrt{3}}{2} \quad k = \frac{-1 + \sqrt{3}}{2}$$

Etude du cas $k = \frac{-1 - \sqrt{3}}{2}$.



Les coordonnées barycentriques de E sont

$$E = \left\{ \frac{-1 - \sqrt{3}}{2}, 1 + \sqrt{3}, \frac{1 - \sqrt{3}}{2} \right\}$$

Dessin = Dessin $\cup \{F\} = \{A, B, C, D, E, F\}$

Détermination du point F :

Soit F le point $(CD) \cap (BE)$. Le point F est composé.

Comme $F \in (CD)$, on a, en choisissant l'inconnue ν_1

$$\overrightarrow{OF} = \nu_1 \overrightarrow{OC} + (1 - \nu_1) \overrightarrow{OD}$$

On déduit:

$$\overrightarrow{OF} = a(1) \overrightarrow{OA} + a(2) \overrightarrow{OB} + a(3) \overrightarrow{OC}$$

avec

$$a(1) = 1 - \nu_1$$

$$a(2) = -1 + \nu_1$$

$$a(3) = 1$$

Comme $F \in (BE)$, on a, en choisissant l'inconnue μ_1

$$\overrightarrow{OF} = \mu_1 \overrightarrow{OB} + (1 - \mu_1) \overrightarrow{OE}$$

On déduit:

$$\overrightarrow{OF} = b(1) \overrightarrow{OA} + b(2) \overrightarrow{OB} + b(3) \overrightarrow{OC}$$

avec

$$b(1) = \frac{(1 + \sqrt{3})(-1 + \mu_1)}{2}$$

$$b(2) = 1 + \sqrt{3} - \sqrt{3}\mu_1$$

$$b(3) = \frac{(-1 + \sqrt{3})(-1 + \mu_1)}{2}$$

La résolution du système linéaire d'inconnues ν_1, μ_1 donne

$$\nu_1 = \frac{-2}{-1 + \sqrt{3}} \quad \mu_1 = \frac{1 + \sqrt{3}}{-1 + \sqrt{3}}$$

On déduit que:

$$F = \left\{ \frac{1 + \sqrt{3}}{-1 + \sqrt{3}}, \frac{1 + \sqrt{3}}{1 - \sqrt{3}}, 1 \right\}$$

La distance DF^2 est égale à

$$DF^2 = \frac{4AB^2}{(-1 + \sqrt{3})^2} = \frac{4a^2}{(-1 + \sqrt{3})^2}$$

La distance DE^2 est égale à

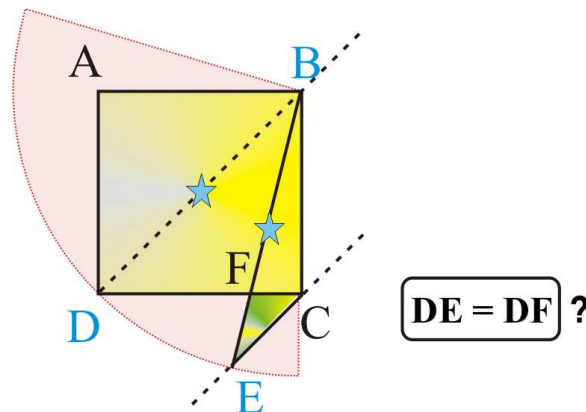
$$DE^2 = \frac{(2 + \sqrt{3})(3 + \sqrt{3})AB^2}{2} - \frac{(1 + \sqrt{3})(3 + \sqrt{3})AC^2}{4} + \frac{(1 + \sqrt{3})(2 + \sqrt{3})BC^2}{2}$$

$$= 2(2 + \sqrt{3})a^2$$

On a donc

$$DF^2 - DE^2 = \frac{4a^2}{(-1 + \sqrt{3})^2} - 2(2 + \sqrt{3})a^2 = 0$$

Etude du cas $k = \frac{-1 + \sqrt{3}}{2}$.



Les coordonnées barycentriques de E sont

$$E = \left\{ \frac{-1 + \sqrt{3}}{2}, 1 - \sqrt{3}, \frac{1 + \sqrt{3}}{2} \right\}$$

Dessin = Dessin $\cup \{F\} = \{A, B, C, D, E, F\}$

Détermination du point F :

Soit F le point $(CD) \cap (BE)$. Le point F est composé.

Comme $F \in (CD)$, on a, en choisissant l'inconnue ν_1

$$\overrightarrow{OF} = \nu_1 \overrightarrow{OC} + (1 - \nu_1) \overrightarrow{OD}$$

On déduit:

$$\overrightarrow{OF} = a(1) \overrightarrow{OA} + a(2) \overrightarrow{OB} + a(3) \overrightarrow{OC}$$

avec

$$a(1) = 1 - \nu_1$$

$$a(2) = -1 + \nu_1$$

$$a(3) = 1$$

Comme $F \in (BE)$, on a, en choisissant l'inconnue μ_1

$$\overrightarrow{OF} = \mu_1 \overrightarrow{OB} + (1 - \mu_1) \overrightarrow{OE}$$

On déduit:

$$\overrightarrow{OF} = b(1) \overrightarrow{OA} + b(2) \overrightarrow{OB} + b(3) \overrightarrow{OC}$$

avec

$$b(1) = \frac{(-1 + \sqrt{3})(1 - \mu_1)}{2}$$

$$b(2) = 1 - \sqrt{3} + \sqrt{3} \mu_1$$

$$b(3) = \frac{(1 + \sqrt{3})(1 - \mu_1)}{2}$$

La résolution du système linéaire d'inconnues ν_1, μ_1 donne

$$\nu_1 = \frac{2}{1 + \sqrt{3}} \quad \mu_1 = \frac{-1 + \sqrt{3}}{1 + \sqrt{3}}$$

On déduit que:

$$F = \left\{ \frac{-1 + \sqrt{3}}{1 + \sqrt{3}}, \frac{1 - \sqrt{3}}{1 + \sqrt{3}}, 1 \right\}$$

La distance DF^2 est égale à

$$DF^2 = \frac{4AB^2}{(1 + \sqrt{3})^2} = \frac{4a^2}{(1 + \sqrt{3})^2}$$

La distance DE^2 est égale à

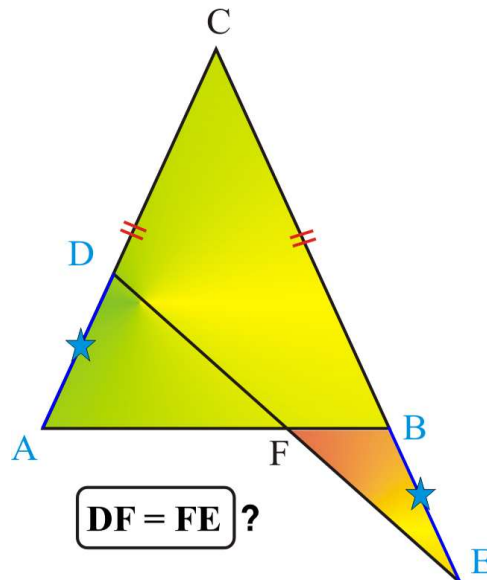
$$\begin{aligned} DE^2 &= \frac{(-3 + \sqrt{3})(-2 + \sqrt{3})AB^2}{2} - \frac{(-3 + \sqrt{3})(-1 + \sqrt{3})AC^2}{4} + \frac{(-2 + \sqrt{3})(-1 + \sqrt{3})BC^2}{2} \\ &= -2(-2 + \sqrt{3})a^2 \end{aligned}$$

On a donc

$$DF^2 - DE^2 = 2(-2 + \sqrt{3})a^2 + \frac{4a^2}{(1 + \sqrt{3})^2} = 0$$

Exercice 1.9.2

Soit ABC un triangle isocèle de sommet C et D un point de la droite (AC) . On choisit un point E sur la droite (BC) tel que $AD = BE$, les droites (AB) et (ED) n'étant pas parallèles. Soit F l'intersection de (ED) et de (AB) . Montrer que $DF = FE$.

**Solution:**

On a $CA = CB = a = b$.

Dessin = $\{A, B, C, D, E\}$

Soit k un réel fixe tel que D soit le barycentre de $\{(A, k), (C, 1 - k)\}$ et k_1 un réel non-encore fixé tel que E soit le barycentre de $\{(B, k_1), (C, 1 - k_1)\}$. On adaptera la valeur de k_1 de telle sorte que la condition $AD = BE$ soit réalisée.

Le repère barycentrique choisi est A, B, C .

Les points composés sont D, E .

On déduit les coordonnées barycentriques des points composés:

$$D = \{k, 0, 1 - k\}$$

$$E = \{0, k_1, 1 - k_1\}$$

La distance AD^2 est égale à

$$AD^2 = AC^2 (-1 + k)^2 = a^2 (-1 + k)^2$$

La distance BE^2 est égale à

$$BE^2 = BC^2 (-1 + k_1)^2 = a^2 (-1 + k_1)^2$$

La condition $AD^2 = BE^2$ implique $k = k_1$ (solution exclue puisque (ED) n'est pas parallèle à (AB)) ou $k = 2 - k_1$. Cette dernière solution implique que

$$E = \{0, 2 - k, -1 + k\}$$

Dessin = Dessin $\cup \{F\} = \{A, B, C, D, E, F\}$

Détermination du point F :

Soit F le point $(AB) \cap (DE)$. Le point F est composé.

Comme $F \in (AB)$, on a, en choisissant l'inconnue ν_1

$$\overrightarrow{OF} = \nu_1 \overrightarrow{OA} + (1 - \nu_1) \overrightarrow{OB}$$

Comme $F \in (DE)$, on a, en choisissant l'inconnue μ_1

$$\overrightarrow{OF} = \mu_1 \overrightarrow{OD} + (1 - \mu_1) \overrightarrow{OE}$$

On déduit:

$$\overrightarrow{OF} = b(1) \overrightarrow{OA} + b(2) \overrightarrow{OB} + b(3) \overrightarrow{OC}$$

avec

$$b(1) = k \mu_1$$

$$b(2) = (-2 + k) (-1 + \mu_1)$$

$$b(3) = (1 - k) (-1 + 2 \mu_1)$$

La résolution du système linéaire d'inconnues ν_1, μ_1 donne

$$\nu_1 = \frac{k}{2} \quad \mu_1 = \frac{1}{2}$$

On déduit que:

$$F = \left\{ \frac{k}{2}, \frac{2-k}{2}, 0 \right\}$$

La distance DF^2 est égale à

$$\begin{aligned} DF^2 &= \frac{BC^2 (-2+k) (-1+k)}{2} - \frac{AB^2 (-2+k) k}{4} + \frac{AC^2 (-1+k) k}{2} \\ &= \frac{4a^2 - 8a^2k + 2c^2k + 4a^2k^2 - c^2k^2}{4} \end{aligned}$$

La distance EF^2 est égale à

$$\begin{aligned} EF^2 &= \frac{BC^2 (-2+k) (-1+k)}{2} - \frac{AB^2 (-2+k) k}{4} + \frac{AC^2 (-1+k) k}{2} \\ &= \frac{4a^2 - 8a^2k + 2c^2k + 4a^2k^2 - c^2k^2}{4} \end{aligned}$$

On a bien $DF = EF$.

CHAPITRE

2

Distances dans le quadrilatère

2 Distances dans le quadrilatère

2.1 Relation d'Euler entre les distances d'un quadrilatère

Exercice 2.1.1 *extension de la formule d'Euler*

Soit $ABCD$ un quadrilatère et k un réel fixé. On choisit des points M_1, M_2, M_3, M_4 situés respectivement sur les droites $(AB), (BC), (CD), (DA)$ de telle sorte que chaque point M_i soit le barycentre de deux sommets consécutifs affectés des coefficients $\{k, 1 - k\}$.

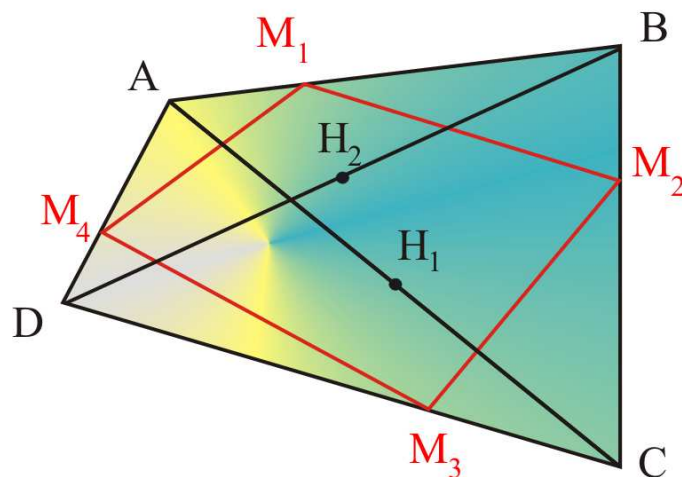
Montrer que

$$(1 - 2k + 2k^2)(AB^2 + BC^2 + CD^2 + AD^2) = M_1M_3^2 + M_2M_4^2 + 4(1 - 2k + 2k^2)H_1H_2^2$$

avec H_1 (resp. H_2) milieu du segment $[AC]$ (resp. $[BD]$).

Pour $k = 1$, on a $M_1 = A, M_2 = B, M_3 = C, M_4 = D$ et on retrouve la formule d'Euler

$$AB^2 + BC^2 + CD^2 + AD^2 = AC^2 + BD^2 + 4H_1H_2^2$$



Solution:

Dessin = $\{A, B, C, D\}$

On choisit les coordonnées barycentriques de D de la forme

$$D = \{x, y, 1 - x - y\}$$

Dessin = Dessin $\cup \{M_1, M_2, M_3, M_4\} = \{A, B, C, D, M_1, M_2, M_3, M_4\}$

On a les équations vectorielles

$$\vec{0} = (1 - k) \overrightarrow{M_1 B} + \overrightarrow{M_1 A} k$$

$$\vec{0} = (1 - k) \overrightarrow{M_2 C} + \overrightarrow{M_2 B} k$$

$$\vec{0} = (1 - k) \overrightarrow{M_3 D} + \overrightarrow{M_3 C} k$$

$$\vec{0} = (1 - k) \overrightarrow{M_4 A} + \overrightarrow{M_4 D} k$$

et, par découpages automatiques, le système linéaire

$$\vec{0} = k \overrightarrow{OA} + (1 - k) \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OM_1}$$

$$\vec{0} = k \overrightarrow{OB} + (1 - k) \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OM_2}$$

$$\vec{0} = k \overrightarrow{OC} + (1 - k) \overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OM_3}$$

$$\vec{0} = (1 - k) \overrightarrow{OA} + k \overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OM_4}$$

Les points purs choisis sont A, B, C .

Les points composés sont M_1, M_2, M_3, M_4 .

On déduit les coordonnées barycentriques des points composés:

$$M_1 = \{k, 1 - k, 0\}$$

$$M_2 = \{0, k, 1 - k\}$$

$$M_3 = \{(1 - k) x, (1 - k) y, 1 - x + k x - y + k y\}$$

$$M_4 = \{1 - k + k x, k y, k (1 - x - y)\}$$

Dessin = Dessin $\cup \{H_1, H_2\} = \{A, B, C, D, H_1, H_2, M_1, M_2, M_3, M_4\}$

On a les équations vectorielles

$$\vec{0} = \overrightarrow{H_1 A} + \overrightarrow{H_1 C}$$

$$\vec{0} = \overrightarrow{H_2 B} + \overrightarrow{H_2 D}$$

et, par découpages automatiques, le système linéaire

$$\vec{0} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} - 2 \overrightarrow{OH_1}$$

$$\vec{0} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD} - 2 \overrightarrow{OH_2}$$

Tenant compte des points composés précédents, on déduit:

$$\vec{0} = \overrightarrow{H_1 A} + \overrightarrow{H_1 C}$$

$$= \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} - 2 \overrightarrow{OH_1}$$

$$\vec{0} = \overrightarrow{H_2 B} + \overrightarrow{H_2 D}$$

$$= -2 \overrightarrow{OH_2} + \overrightarrow{OA} x + (1 - x - y) \overrightarrow{OC} + (1 + y) \overrightarrow{OB}$$

Les points purs choisis sont A, B, C .

Les points composés sont H_1, H_2 .

On déduit les coordonnées barycentriques des points composés:

$$H_1 = \left\{ \frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2} \right\}$$

$$H_2 = \left\{ \frac{x}{2}, \frac{1+y}{2}, \frac{1-x-y}{2} \right\}$$

La distance CD^2 est égale à

$$CD^2 = -AB^2 xy + AC^2 x(x+y) + BC^2 y(x+y) = b^2 x^2 + a^2 xy + b^2 xy - c^2 xy + a^2 y^2$$

La distance AD^2 est égale à

$$AD^2 = AB^2 (1-x)y + AC^2 (-1+x)(-1+x+y) + BC^2 y(-1+x+y)$$

$$= b^2 - 2b^2 x + b^2 x^2 - a^2 y - b^2 y + c^2 y + a^2 xy + b^2 xy - c^2 xy + a^2 y^2$$

Ainsi

$$AB^2 + BC^2 + CD^2 + AD^2 = a^2 + b^2 + c^2 - 2b^2 x + 2b^2 x^2 - a^2 y - b^2 y + c^2 y + 2a^2 xy + 2b^2 xy - 2c^2 xy + 2a^2 y^2$$

La distance $M_1 M_3^2$ est égale à

$$M_1 M_3^2 = AB^2 (1-k)(k-x+kx)(-1+y)$$

$$+ AC^2 (k-x+kx)(1-x+kx-y+ky)$$

$$+ BC^2 (-1+k)(-1+y)(1-x+kx-y+ky)$$

$$= a^2 - a^2 k + b^2 k - c^2 k + c^2 k^2 - a^2 x - b^2 x + c^2 x + 2a^2 kx - 2c^2 kx - a^2 k^2 x$$

$$+ b^2 k^2 x + c^2 k^2 x + b^2 x^2 - 2b^2 kx^2 + b^2 k^2 x^2 - 2a^2 y + 3a^2 ky - b^2 ky$$

$$+ c^2 ky - a^2 k^2 y + b^2 k^2 y - c^2 k^2 y + a^2 xy + b^2 xy - c^2 xy - 2a^2 kxy$$

$$- 2b^2 kxy + 2c^2 kxy + a^2 k^2 xy + b^2 k^2 xy - c^2 k^2 xy + a^2 y^2 - 2a^2 ky^2 + a^2 k^2 y^2$$

La distance $M_2 M_4^2$ est égale à

$$M_2 M_4^2 = AB^2 k(1-k+kx)(1-y)$$

$$+ AC^2 (1-k+kx)(1-2k+kx+ky)$$

$$+ BC^2 k(-1+y)(1-2k+kx+ky)$$

$$= b^2 - a^2 k - 3b^2 k + c^2 k + 2a^2 k^2 + 2b^2 k^2 - c^2 k^2 + 2b^2 kx - a^2 k^2 x$$

$$- 3b^2 k^2 x + c^2 k^2 x + b^2 k^2 x^2 + a^2 ky + b^2 ky - c^2 ky - 3a^2 k^2 y - b^2 k^2 y$$

$$+ c^2 k^2 y + a^2 k^2 xy + b^2 k^2 xy - c^2 k^2 xy + a^2 k^2 y^2$$

De même

$$H_1 H_2^2 = \frac{1}{4} (c^2 + a^2 x - b^2 x - c^2 x + b^2 x^2 + a^2 y - b^2 y + c^2 y + a^2 xy + b^2 xy - c^2 xy + a^2 y^2)$$

L'expression

$$(AB^2 + BC^2 + CD^2 + AD^2) - M_1 M_3^2 - M_2 M_4^2$$

prend alors la valeur

$$\begin{aligned} & c^2 + a^2 x - b^2 x - c^2 x + b^2 x^2 + a^2 y - b^2 y + c^2 y + a^2 xy + b^2 xy - c^2 xy + a^2 y^2 \\ & + k^2 (-2a^2 - 2b^2 + 2a^2 x + 2b^2 x - 2c^2 x - 2b^2 x^2 + 4a^2 y - 2a^2 xy - 2b^2 xy + 2c^2 xy - 2a^2 y^2) \\ & + k (2a^2 + 2b^2 - 2a^2 x - 2b^2 x + 2c^2 x + 2b^2 x^2 - 4a^2 y + 2a^2 xy + 2b^2 xy - 2c^2 xy + 2a^2 y^2) \end{aligned}$$

Or

$$AB^2 + BC^2 + CD^2 + AD^2 - 4H_1H_2^2 = a^2 + b^2 - a^2 x - b^2 x + c^2 x + b^2 x^2 - 2a^2 y + a^2 xy + b^2 xy - c^2 xy + a^2 y^2$$

Il résulte que

$$\begin{aligned} (AB^2 + BC^2 + CD^2 + AD^2) - M_1M_3^2 - M_2M_4^2 &= 4H_1H_2^2 \\ &\quad - 2k^2(AB^2 + BC^2 + CD^2 + AD^2 - 4H_1H_2^2) \\ &\quad + 2k(AB^2 + BC^2 + CD^2 + AD^2 - 4H_1H_2^2) \end{aligned}$$

On déduit

$$(1 - 2k + 2k^2)(AB^2 + BC^2 + CD^2 + AD^2) = M_1M_3^2 + M_2M_4^2 + 4(1 - 2k + 2k^2)H_1H_2^2$$

2.2 Coordonnées barycentriques à partir de distances connues

Dans un triangle ABC , la connaissance des distances BD et CD ne détermine pas complètement le point D (le point D ayant deux positions possibles, les deux positions étant symétriques par rapport à la droite (BC)). On déterminera dans la section *Théorèmes de Napoléon et théorèmes semblables*, les coordonnées barycentriques des points D pour lesquels les distances BD , CD sont imposées. On doit parfois intervenir pour décider quelle valeur de AD convient au problème envisagé, ce qui n'est pas toujours immédiat en raison de l'expression mathématique complexe de AD .

Nous contournons ici la difficulté en présentant une formule efficace qui détermine les coordonnées barycentriques de D en fonction des trois distances AD , BD et CD . Une méthode différente très efficace consiste à utiliser *les expressions analytiques des rotations* (aspect traité ultérieurement).

L'évaluation de la distance AD est parfois plus aisée directement, à partir de l'observation du dessin. On pourra notamment s'appuyer sur les classiques formules exprimant l'aire d'un triangle $M_1M_2M_3$ afin de connaître la valeur du sinus des angles du triangle, le cosinus étant lié au produit scalaire. Les formules exprimant l'aire sont:

$$\begin{aligned} \text{aire}(M_1, M_2, M_3) &= \frac{\sqrt{(a_1 + a_2 - a_3)(a_1 - a_2 + a_3)(-a_1 + a_2 + a_3)(a_1 + a_2 + a_3)}}{4}, \\ &= \frac{a_2 a_3 \sin(M_1)}{2} = \frac{a_1 a_3 \sin(M_2)}{2} = \frac{a_1 a_2 \sin(M_3)}{2} \end{aligned}$$

avec, par définition, $M_1M_2 = a_3$, $M_1M_3 = a_2$, $M_2M_3 = a_1$.

Exercice 2.2.1 *passage distances vers coordonnées barycentriques, dans un quadrilatère*

Soit ABC un triangle et D un point du plan. On suppose connues les distances AD^2 , BD^2 , CD^2 . Montrer que les coordonnées barycentriques du point D s'expriment en fonction de ces distances et des carrés des longueurs des côtés du triangle ABC et sont des fractions rationnelles en ces variables.

Solution:**Dessin** = { A, B, C, D }Les points purs choisis sont A, B, C .Le point composé est D .Posons $D = \{x, y, 1 - x - y\}$ avec x et y à préciser.La distance AD^2 est égale à

$$\begin{aligned} AD^2 &= -AB^2 (-1 + x) y + AC^2 (-1 + x) (-1 + x + y) + BC^2 y (-1 + x + y) \\ &= b^2 - 2b^2 x + b^2 x^2 - a^2 y - b^2 y + c^2 y + a^2 x y + b^2 x y - c^2 x y + a^2 y^2 \end{aligned}$$

La distance CD^2 est égale à

$$\begin{aligned} CD^2 &= -AB^2 x y + AC^2 x (x + y) + BC^2 y (x + y) \\ &= b^2 x^2 + a^2 x y + b^2 x y - c^2 x y + a^2 y^2 \end{aligned}$$

La distance BD^2 est égale à

$$\begin{aligned} BD^2 &= -AB^2 x (-1 + y) + AC^2 x (-1 + x + y) + BC^2 (-1 + y) (-1 + x + y) \\ &= a^2 - a^2 x - b^2 x + c^2 x + b^2 x^2 - 2a^2 y + a^2 x y + b^2 x y - c^2 x y + a^2 y^2 \end{aligned}$$

On a donc:

$$\begin{aligned} AD^2 - BD^2 &= -a^2 + b^2 + a^2 x - b^2 x - c^2 x + a^2 y - b^2 y + c^2 y \\ CD^2 - BD^2 &= -a^2 + a^2 x + b^2 x - c^2 x + 2a^2 y \\ AD^2 - CD^2 &= b^2 - 2b^2 x - a^2 y - b^2 y + c^2 y \end{aligned}$$

La résolution du système linéaire

$$\begin{cases} -a^2 + a^2 x + b^2 x - c^2 x + 2a^2 y = -BD^2 + CD^2 \\ b^2 - 2b^2 x - a^2 y - b^2 y + c^2 y = AD^2 - CD^2 \end{cases}$$

donne:

$$x = \frac{a^4 + 2a^2 AD^2 - a^2 b^2 - a^2 BD^2 - b^2 BD^2 - a^2 c^2 + BD^2 c^2 - a^2 CD^2 + b^2 CD^2 - c^2 CD^2}{(a - b - c)(a + b - c)(a - b + c)(a + b + c)}$$

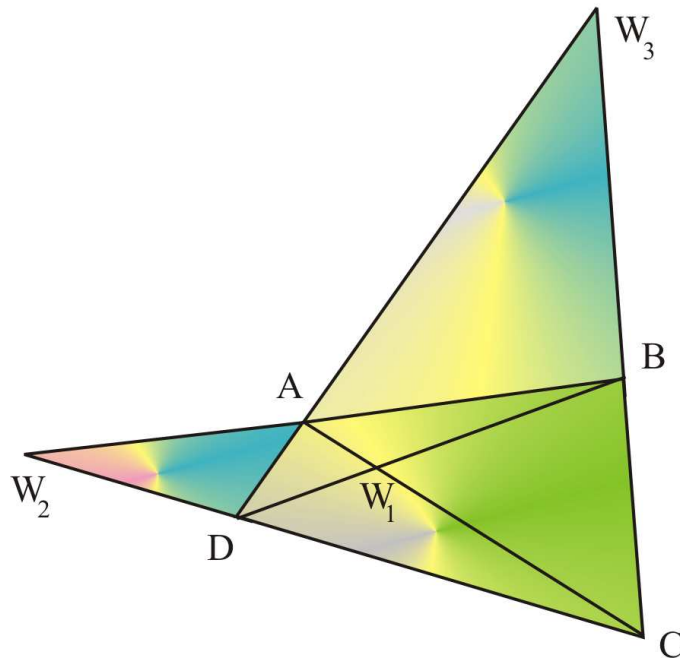
$$y = \frac{a^2 AD^2 + a^2 b^2 + AD^2 b^2 - b^4 - 2b^2 BD^2 - AD^2 c^2 + b^2 c^2 - a^2 CD^2 + b^2 CD^2 + c^2 CD^2}{(-a + b + c)(a + b - c)(a - b + c)(a + b + c)}$$

On obtient donc

$$D = \left\{ \frac{a^4 + 2a^2 AD^2 - a^2 b^2 - a^2 BD^2 - b^2 BD^2 - a^2 c^2 + BD^2 c^2 - a^2 CD^2 + b^2 CD^2 - c^2 CD^2}{(a - b - c)(a + b - c)(a - b + c)(a + b + c)}, \right. \\ \frac{a^2 AD^2 + a^2 b^2 + AD^2 b^2 - b^4 - 2b^2 BD^2 - AD^2 c^2 + b^2 c^2 - a^2 CD^2 + b^2 CD^2 + c^2 CD^2}{(-a + b + c)(a + b - c)(a - b + c)(a + b + c)}, \\ \left. \frac{a^2 AD^2 - AD^2 b^2 - a^2 BD^2 + b^2 BD^2 + a^2 c^2 + AD^2 c^2 + b^2 c^2 + BD^2 c^2 - c^4 - 2c^2 CD^2}{(-a + b + c)(a + b - c)(a - b + c)(a + b + c)} \right\}$$

Exercice 2.2.2

Soit $ABCD$ un quadrilatère plan avec $D = \{x, y, 1 - x - y\}$. On pose $W_1 = (AC) \cap (BD)$, $W_2 = (AB) \cap (CD)$ et $W_3 = (AD) \cap (BC)$. Exprimer, en fonction de x et y , les distances $W_i A^2$, $W_i B^2$, $W_i C^2$, $W_i D^2$ avec $i = 1, 2, 3$.

**Solution:**

Dessin = $\{A, B, C, D, W_1\}$

Détermination du point W_1 :

Soit W_1 le point $(AC) \cap (BD)$. Le point W_1 est composé.

Comme $W_1 \in (AC)$, on a, en choisissant les inconnues ν_1

$$\overrightarrow{OW_1} = \nu_1 \overrightarrow{OA} + (1 - \nu_1) \overrightarrow{OC}$$

Comme $W_1 \in (BD)$, on a, en choisissant les inconnues μ_1

$$\overrightarrow{OW_1} = \mu_1 \overrightarrow{OB} + (1 - \mu_1) \overrightarrow{OD}$$

On déduit:

$$\overrightarrow{OW_1} = b(1) \overrightarrow{OA} + b(2) \overrightarrow{OB} + b(3) \overrightarrow{OC}$$

avec

$$b(1) = (1 - \mu_1) x$$

$$b(2) = \mu_1 + y - \mu_1 y$$

$$b(3) = (-1 + \mu_1) (-1 + x + y)$$

La résolution du système linéaire d'inconnues ν_1, μ_1 donne

$$\nu_1 = \frac{x}{1 - y} \quad \mu_1 = \frac{y}{-1 + y}$$

On déduit que:

$$W_1 = \left\{ \frac{x}{1-y}, 0, \frac{-1+x+y}{-1+y} \right\}$$

La distance $W_1 D^2$ est égale à

$$\begin{aligned} W_1 D^2 &= \frac{AB^2 x y^2}{1-y} + \frac{AC^2 x y^2 (-1+x+y)}{(-1+y)^2} + \frac{BC^2 y^2 (-1+x+y)}{-1+y} \\ &= \frac{y^2 (a^2 - a^2 x - b^2 x + c^2 x + b^2 x^2 - 2 a^2 y + a^2 x y + b^2 x y - c^2 x y + a^2 y^2)}{(-1+y)^2} \end{aligned}$$

La distance $W_1 B^2$ est égale à

$$\begin{aligned} W_1 B^2 &= \frac{AB^2 x}{1-y} + \frac{AC^2 x (-1+x+y)}{(-1+y)^2} + \frac{BC^2 (-1+x+y)}{-1+y} \\ &= \frac{a^2 - a^2 x - b^2 x + c^2 x + b^2 x^2 - 2 a^2 y + a^2 x y + b^2 x y - c^2 x y + a^2 y^2}{(-1+y)^2} \end{aligned}$$

La distance $W_1 A^2$ est égale à

$$W_1 A^2 = \frac{AC^2 (-1+x+y)^2}{(-1+y)^2} = \frac{b^2 (-1+x+y)^2}{(-1+y)^2}$$

La distance $W_1 C^2$ est égale à

$$W_1 C^2 = \frac{AC^2 x^2}{(-1+y)^2} = \frac{b^2 x^2}{(-1+y)^2}$$

Dessin = Dessin $\cup \{W_2\} = \{A, B, C, D, W_1, W_2\}$

Détermination du point W_2 :

Soit W_2 le point $(AB) \cap (CD)$. Le point W_2 est composé.

Comme $W_2 \in (AB)$, on a, en choisissant les inconnues ν_1

$$\overrightarrow{OW_2} = \nu_1 \overrightarrow{OA} + (1 - \nu_1) \overrightarrow{OB}$$

Comme $W_2 \in (CD)$, on a, en choisissant les inconnues μ_1

$$\overrightarrow{OW_2} = \mu_1 \overrightarrow{OC} + (1 - \mu_1) \overrightarrow{OD}$$

On déduit:

$$\overrightarrow{OW_2} = d(1) \overrightarrow{OA} + d(2) \overrightarrow{OB} + d(3) \overrightarrow{OC}$$

avec

$$d(1) = (1 - \mu_1) x$$

$$d(2) = (1 - \mu_1) y$$

$$d(3) = 1 - x + \mu_1 x - y + \mu_1 y$$

La résolution du système linéaire d'inconnues ν_1, μ_1 donne

$$\nu_1 = \frac{x}{x+y} \quad \mu_1 = \frac{-1+x+y}{x+y}$$

On déduit que:

$$W_2 = \left\{ \frac{x}{x+y}, \frac{y}{x+y}, 0 \right\}$$

La distance W_2A^2 est égale à

$$W_2A^2 = \frac{AB^2 y^2}{(x+y)^2} = \frac{c^2 y^2}{(x+y)^2}$$

La distance W_2B^2 est égale à

$$W_2B^2 = \frac{AB^2 x^2}{(x+y)^2} = \frac{c^2 x^2}{(x+y)^2}$$

La distance W_2C^2 est égale à

$$\begin{aligned} W_2C^2 &= -\frac{AB^2 x y}{(x+y)^2} + \frac{AC^2 x}{x+y} + \frac{BC^2 y}{x+y} \\ &= \frac{b^2 x^2 + a^2 x y + b^2 x y - c^2 x y + a^2 y^2}{(x+y)^2} \end{aligned}$$

La distance W_2D^2 est égale à

$$\begin{aligned} W_2D^2 &= -\frac{AB^2 x y (-1+x+y)^2}{(x+y)^2} + \frac{AC^2 x (-1+x+y)^2}{x+y} + \frac{BC^2 y (-1+x+y)^2}{x+y} \\ &= \frac{(-1+x+y)^2 (b^2 x^2 + a^2 x y + b^2 x y - c^2 x y + a^2 y^2)}{(x+y)^2} \end{aligned}$$

Dessin = Dessin $\cup \{W_3\} = \{A, B, C, D, W_1, W_2, W_3\}$

Détermination du point W_3 :

Soit W_3 le point $(AD) \cap (BC)$. Le point W_3 est composé.

Comme $W_3 \in (AD)$, on a, en choisissant les inconnues ν_1

$$\overrightarrow{OW_3} = \nu_1 \overrightarrow{OA} + (1 - \nu_1) \overrightarrow{OD}$$

On déduit:

$$\overrightarrow{OW_3} = e(1) \overrightarrow{OA} + e(2) \overrightarrow{OB} + e(3) \overrightarrow{OC}$$

avec

$$e(1) = \nu_1 + x - \nu_1 x$$

$$e(2) = (1 - \nu_1) y$$

$$e(3) = (-1 + \nu_1) (-1 + x + y)$$

Comme $W_3 \in (BC)$, on a, en choisissant les inconnues μ_1

$$\overrightarrow{OW_3} = \mu_1 \overrightarrow{OB} + (1 - \mu_1) \overrightarrow{OC}$$

La résolution du système linéaire d'inconnues ν_1, μ_1 donne

$$\mu_1 = \frac{y}{1-x} \quad \nu_1 = \frac{x}{-1+x}$$

On déduit que:

$$W_3 = \left\{0, -\frac{y}{-1+x}, \frac{-1+x+y}{-1+x}\right\}$$

La distance W_3A^2 est égale à

$$\begin{aligned} W_3A^2 &= \frac{AB^2 y}{1-x} + \frac{AC^2 (-1+x+y)}{-1+x} + \frac{BC^2 y (-1+x+y)}{(-1+x)^2} \\ &= \frac{b^2 - 2b^2x + b^2x^2 - a^2y - b^2y + c^2y + a^2xy + b^2xy - c^2xy + a^2y^2}{(-1+x)^2} \end{aligned}$$

La distance W_3D^2 est égale à

$$\begin{aligned} W_3D^2 &= \frac{AB^2 x^2 y}{1-x} + \frac{AC^2 x^2 (-1+x+y)}{-1+x} + \frac{BC^2 x^2 y (-1+x+y)}{(-1+x)^2} \\ &= \frac{x^2 (b^2 - 2b^2x + b^2x^2 - a^2y - b^2y + c^2y + a^2xy + b^2xy - c^2xy + a^2y^2)}{(-1+x)^2} \end{aligned}$$

La distance W_3B^2 est égale à

$$W_3B^2 = \frac{BC^2 (-1+x+y)^2}{(-1+x)^2} = \frac{a^2 (-1+x+y)^2}{(-1+x)^2}$$

La distance W_3C^2 est égale à

$$W_3C^2 = \frac{BC^2 y^2}{(-1+x)^2} = \frac{a^2 y^2}{(-1+x)^2}$$

2.3 Coordonnées tripolaires

Le lecteur pourra ignorer ce paragraphe en première lecture. La relation des coordonnées tripolaires avec les coordonnées barycentriques est étudiée implicitement dans la section précédente.

Exercice 2.3.1 orthocentre d'un triangle

Soit ABC un triangle et M un point du plan. On pose $AM = \lambda$, $BM = \mu$, $CM = \nu$.

On a l'identité

$$\begin{aligned} &(\mu^2 + \nu^2 - a^2)^2 \lambda^2 + (\nu^2 + \lambda^2 - b^2)^2 \mu^2 + (\lambda^2 + \mu^2 - c^2)^2 \nu^2 \\ &- (\mu^2 + \nu^2 - a^2) (\nu^2 + \lambda^2 - b^2) (\lambda^2 + \mu^2 - c^2) - 4\lambda^2 \mu^2 \nu^2 = 0 \end{aligned}$$

Le triplet $\{\lambda, \mu, \nu\}$ constitue un repérage du point M dans le plan, il est appelé coordonnées tripolaires du point M (relativement au triangle ABC).

L'élégante formule d'Euler traduit la nullité du volume du tétraèdre $ABCM$ (cf. le chapitre relatif au tétraèdre). Le concept de coordonnées tripolaires est généralisable à l'espace et l'analogue de l'identité d'Euler (liée à ce nouveau contexte) sera la nullité du déterminant de Cayley-Menger que l'on formulera sans peine pour un espace de dimension 5.

Le lecteur sera rapidement convaincu que les notations tripolaires adoptées ne sont pas les plus efficaces. En effet, comme **tout produit scalaire est une combinaison linéaire de carrés de distances**,

l'utilisation des coordonnées tripolaires amène automatiquement **des systèmes linéaires en les inconnues** AM^2 , BM^2 , CM^2 (voir ci-dessous): la notation $AM^2 = \lambda$, $BM^2 = \mu$, $CM^2 = \nu$ semblait donc préférable afin de visualiser directement la linéarité des équations (en les variables $\{\lambda^2, \mu^2, \nu^2\}$).

En fait, il existe **des relations exactes reliant entre elles les distances** entre les différents points d'une figure géométrique. Ces relations sont l'aboutissement de la résolution du système linéaire constitué par les diverses propriétés métriques (fournies par l'énoncé du problème ou de l'exercice). Ces relations sont alors affinées par l'identité d'Euler qui traduit l'appartenance des points au plan.

Solution:

Nous utilisons les notations $d_1 = AB$, $d_2 = AC$, $d_3 = AM$, $d_4 = BC$, $d_5 = BM$, $d_6 = CM$ adoptées dans l'étude du tétraèdre. L'expression mentionnée dans l'identité d'Euler devient

$$\begin{aligned} & (-d_1^2 + d_3^2 + d_5^2)^2 d_6^2 + d_5^2 (-d_2^2 + d_3^2 + d_6^2)^2 + d_3^2 (-d_4^2 + d_5^2 + d_6^2)^2 \\ & - (-d_1^2 + d_3^2 + d_5^2) (-d_2^2 + d_3^2 + d_6^2) (-d_4^2 + d_5^2 + d_6^2) - 4 d_3^2 d_5^2 d_6^2 \end{aligned}$$

et le développement détaillé de cette expression montre qu'elle est égale à $(-144) V_{ABCM}^2$, la notation V_{ABCM} désignant le volume du tétraèdre $ABCM$.

Exercice 2.3.2

Déterminer les coordonnées tripolaires de l'orthocentre.

Dans l'espace, la recherche de l'orthocentre d'un tétraèdre se traduit par un système linéaire en les inconnues AH^2 , BH^2 , CH^2 , DH^2 n'ayant, en général, pas de solutions.

Solution:

Par définition de l'orthocentre H , on a (la dernière équation est inutile)

$$\begin{cases} (-2) \overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{BC} \equiv AB^2 - AC^2 - BH^2 + CH^2 = 0 \\ (-2) \overrightarrow{BH} \cdot \overrightarrow{AC} \equiv AB^2 - AH^2 - BC^2 + CH^2 = 0 \\ (-2) \overrightarrow{CH} \cdot \overrightarrow{AB} \equiv AC^2 - AH^2 - BC^2 + BH^2 = 0 \end{cases}$$

La résolution de ce système **linéaire en les inconnues** AH^2 , BH^2 , CH^2 donne

$$AH^2 = AB^2 - BC^2 + CH^2$$

$$BH^2 = AB^2 - AC^2 + CH^2$$

L'appartenance de H au plan ABC est reflétée par l'égalité d'Euler qui devient ici

$$\begin{aligned} 0 = & AB^6 - 2 AB^4 AC^2 + AB^2 AC^4 - 2 AB^4 BC^2 + 2 AB^2 AC^2 BC^2 + AB^2 BC^4 + \\ & (AB^4 - 2 AB^2 AC^2 + AC^4 - 2 AB^2 BC^2 - 2 AC^2 BC^2 + BC^4) CH^2 \end{aligned}$$

Cette équation **linéaire en l'inconnue** CH^2 fournit

$$\nu^2 = CH^2 = \frac{b^2 (-a^2 + b^2 - c^2)^2}{(a - b + c) (a + b - c) (-a + b + c) (a + b + c)}$$

On déduit alors

$$\lambda^2 = AH^2 = \frac{a^2 (a^2 - b^2 - c^2)^2}{(-a + b + c) (a + b - c) (a - b + c) (a + b + c)}$$

$$\mu^2 = BH^2 = \frac{b^2 (-a^2 + b^2 - c^2)^2}{(a - b + c) (a + b - c) (-a + b + c) (a + b + c)}$$

Le retour (facultatif) aux coordonnées barycentriques s'effectue en appliquant les formules établies dans la section précédente.

CHAPITRE

3

Le cercle des neuf points d'Euler

3 Le cercle des neuf points d'Euler

3.1 Le cercle des neuf points d'Euler

Exercice 3.1.1

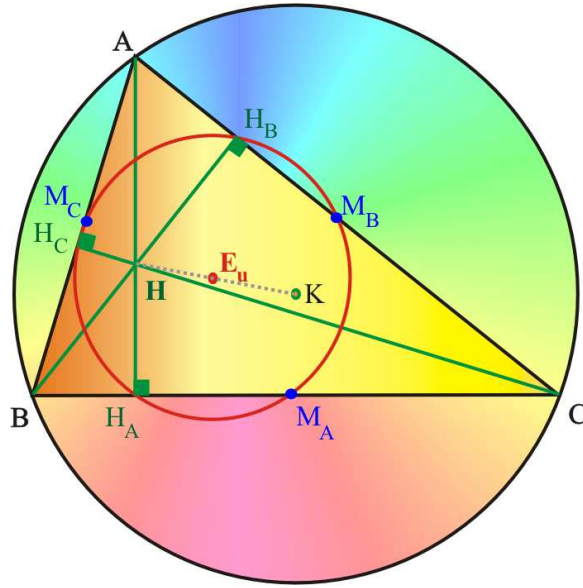
Soit ABC un triangle d'orthocentre H , M_A, M_B, M_C les milieux des segments $[B, C], [A, C], [A, B]$ respectivement, H_A, H_B, H_C les pieds des hauteurs issues respectivement des sommets A, B, C .

1. Déterminer le centre E_u et le rayon r_E du cercle passant par M_A, M_B, M_C (cercle d'Euler).
2. Montrer qu'un point de coordonnées barycentriques $M = \{X, Y, Z\}$ appartient au cercle d'Euler si et seulement si

$$0 = (a^2 - b^2 - c^2) X^2 + (-a^2 + b^2 - c^2) Y^2 + (-a^2 - b^2 + c^2) Z^2 \\ + 2 (c^2 X Y + b^2 X Z + a^2 Y Z)$$

3. Déterminer l'intersection de ce cercle avec les côtés du triangle A, B, C .
4. Montrer que ce cercle passe par les milieux des segments $[A, H], [B, H], [C, H]$.
5. Déterminer le point d'intersection du cercle d'Euler avec le segment reliant le point E_u au centre du cercle exinscrit tangent au côté BC .
6. Montrer que le centre E_u du cercle d'Euler est le milieu du segment $[H, K]$, K étant le centre du cercle circonscrit au triangle ABC (E_u appartient donc à la droite d'Euler).
7. Les droites joignant respectivement les milieux des segments $[A, H], [B, H], [C, H]$ aux milieux des segments $[B, C], [A, C], [A, B]$ se coupent en E_u qui est alors le milieu de chacun de ces segments.

Solution:



1). Nous définissons le cercle d'Euler comme étant le cercle passant par les points

$$M_A = \{0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\}$$

$$M_B = \{\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}\}$$

$$M_C = \{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\}$$

Le centre $E_u = \{x, y, 1 - x, y\}$ de ce cercle doit vérifier $E_u M_A^2 - E_u M_B^2 = 0$ et $E_u M_A^2 - E_u M_C^2 = 0$, soit

$$\begin{cases} a^2 - b^2 + (-2a^2 + 2b^2 + 2c^2)x + (-2a^2 + 2b^2 - 2c^2)y = 0 \\ -a^2 - 2b^2 + c^2 + 4b^2x + (2a^2 + 2b^2 - 2c^2)y = 0 \end{cases}$$

La résolution de ce système linéaire donne

$$x = \frac{(b^2 - c^2)^2 - a^2(b^2 + c^2)}{2(a^4 + (b^2 - c^2)^2 - 2a^2(b^2 + c^2))} = \frac{-a^2b^2 + b^4 - a^2c^2 - 2b^2c^2 + c^4}{2(a - b - c)(a + b - c)(a - b + c)(a + b + c)}$$

$$y = \frac{a^4 - b^2c^2 + c^4 - a^2(b^2 + 2c^2)}{2(a^4 + (b^2 - c^2)^2 - 2a^2(b^2 + c^2))} = \frac{a^4 - a^2b^2 - 2a^2c^2 - b^2c^2 + c^4}{2(a - b - c)(a + b - c)(a - b + c)(a + b + c)}$$

Les coordonnées barycentriques du centre sont ainsi

$$E_u = \left\{ \frac{-a^2b^2 + b^4 - a^2c^2 - 2b^2c^2 + c^4}{2(a - b - c)(a + b - c)(a - b + c)(a + b + c)}, \right. \\ \left. \frac{a^4 - a^2b^2 - 2a^2c^2 - b^2c^2 + c^4}{2(a - b - c)(a + b - c)(a - b + c)(a + b + c)}, \right. \\ \left. \frac{a^4 - 2a^2b^2 + b^4 - a^2c^2 - b^2c^2}{2(a - b - c)(a + b - c)(a - b + c)(a + b + c)} \right\}$$

Le rayon au carré de ce cercle a pour valeur

$$r_E^2 = \frac{a^2 b^2 c^2}{4 (-a + b + c) (a + b - c) (a - b + c) (a + b + c)}$$

En revenant à la valeur du rayon R du rayon du cercle circonscrit au triangle ABC , nous notons que r_E est la moitié de R (résultat connu).

2). Un point $M = \{X, Y, Z\}$ appartient à ce cercle si et seulement si sa distance (au carré) au centre est égale à r_E^2 , soit

$$0 = a^2 X^2 - b^2 X^2 - c^2 X^2 + 2 c^2 X Y - a^2 Y^2 + b^2 Y^2 - c^2 Y^2 + 2 b^2 X Z + 2 a^2 Y Z - a^2 Z^2 - b^2 Z^2 + c^2 Z^2$$

3). Déterminons l'intersection du cercle avec la droite (BC) . Un point appartenant à la droite (BC) a pour coordonnées barycentriques

$$\{0, k, 1 - k\}$$

k étant un réel quelconque.

Lorsque ce point est sur le cercle, l'équation du cercle devient

$$0 = -a^2 - b^2 + c^2 - (-4a^2 - 2b^2 + 2c^2) k - 4a^2 k^2$$

Il suit

$$k = \frac{1}{2} \quad k = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2a^2}$$

On déduit que l'intersection est formée de $M_A = \{0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\}$ et de

$$H_A = \{0, \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2a^2}, \frac{a^2 - b^2 + c^2}{2a^2}\}$$

qui sont les coordonnées barycentriques du projeté orthogonal de H sur (BC) .

4). Les coordonnées barycentriques de l'orthocentre H sont

$$H = \left\{ \frac{(a^2 + b^2 - c^2) (a^2 - b^2 + c^2)}{(-a + b + c) (a + b - c) (a - b + c) (a + b + c)}, \right. \\ \frac{(a^2 - b^2 - c^2) (a^2 + b^2 - c^2)}{(a - b - c) (a + b - c) (a - b + c) (a + b + c)}, \\ \left. \frac{(a^2 - b^2 - c^2) (a^2 - b^2 + c^2)}{(a - b - c) (a + b - c) (a - b + c) (a + b + c)} \right\}$$

Un point appartenant à la droite (AH) a pour coordonnées

$$\left\{ \frac{-a^4 + b^4 - 2b^2 c^2 + c^4 + 2a^4 k - 2a^2 b^2 k - 2a^2 c^2 k}{(a - b - c) (a + b - c) (a - b + c) (a + b + c)}, \right. \\ \frac{(a^2 - b^2 - c^2) (a^2 + b^2 - c^2) (-1 + k)}{(-a + b + c) (a + b - c) (a - b + c) (a + b + c)}, \\ \left. \frac{(a^2 - b^2 - c^2) (a^2 - b^2 + c^2) (-1 + k)}{(-a + b + c) (a + b - c) (a - b + c) (a + b + c)} \right\}$$

k étant un réel quelconque.

Lorsque ce point est sur le cercle, l'équation du cercle devient

$$\begin{aligned} 0 = & (a^2 - b^2 - c^2) (a^4 - b^4 + 2b^2c^2 - c^4) \\ & + (a^2 - b^2 - c^2) (-4a^4 + 2a^2b^2 + 2b^4 + 2a^2c^2 - 4b^2c^2 + 2c^4) k \\ & + (a^2 - b^2 - c^2) (4a^4 - 4a^2b^2 - 4a^2c^2) k^2 \end{aligned}$$

Il suit

$$k = \frac{1}{2} \quad k = \frac{a^4 - (b^2 - c^2)^2}{2a^2(a^2 - b^2 - c^2)}$$

On déduit que l'intersection est formée de H_A et du point de coordonnées barycentriques

$$\left\{ \frac{a^2b^2 - b^4 + a^2c^2 + 2b^2c^2 - c^4}{(-a+b+c)(a+b-c)(a-b+c)(a+b+c)}, \right. \\ \frac{(a^2 - b^2 - c^2)(a^2 + b^2 - c^2)}{2(a-b-c)(a+b-c)(a-b+c)(a+b+c)}, \\ \left. \frac{(a^2 - b^2 - c^2)(a^2 - b^2 + c^2)}{2(a-b-c)(a+b-c)(a-b+c)(a+b+c)} \right\}$$

milieu de $[AH]$ puisque $k = \frac{1}{2}$.

5). Les coordonnées barycentriques du centre du cercle inscrit sont $\{-a, b, c\}$. Un point appartenant à la droite mentionnée dans l'énoncé a pour coordonnées barycentriques

$$\left\{ \frac{(a^2b^2 - b^4 + a^2c^2 + 2b^2c^2 - c^4)(1-k)}{2(-a+b+c)(a+b-c)(a-b+c)(a+b+c)} + \frac{ak}{a-b-c}, \right. \\ \frac{(a^4 - a^2b^2 - 2a^2c^2 - b^2c^2 + c^4)(1-k)}{2(a-b-c)(a+b-c)(a-b+c)(a+b+c)} + \frac{bk}{-a+b+c}, \\ \left. \frac{(a^4 - 2a^2b^2 + b^4 - a^2c^2 - b^2c^2)(1-k)}{2(a-b-c)(a+b-c)(a-b+c)(a+b+c)} - \frac{ck}{a-b-c} \right\}$$

k étant un réel quelconque.

Lorsque ce point est sur le cercle, l'équation du cercle devient

$$\begin{aligned} 0 = & -a^2b^2c^2 + (a^6 + 2a^5b - a^4b^2 - 4a^3b^3 - a^2b^4 + 2ab^5 + b^6 + 2a^5c + 8a^4bc + 6a^3b^2c \\ & - 6a^2b^3c - 8ab^4c - 2b^5c - a^4c^2 + 6a^3b^2c^2 + 15a^2b^2c^2 + 6ab^3c^2 - b^4c^2 - 4a^3c^3 \\ & - 6a^2bc^3 + 6ab^2c^3 + 4b^3c^3 - a^2c^4 - 8ab^2c^4 - b^2c^4 + 2ac^5 - 2bc^5 + c^6) k^2 \end{aligned}$$

Il suit

$$k = \pm \frac{abc}{a^3 + a^2b - ab^2 - b^3 + a^2c + 3abc + b^2c - ac^2 + bc^2 - c^3}$$

On déduit que l'intersection est formée du point de coordonnées barycentriques

$$\begin{aligned} & \{(-a^2b + b^3 - a^2c - 2abc - b^2c - bc^2 + c^3)(a^3b + a^2b^2 - ab^3 - b^4 \\ & + a^3c + ab^2c + a^2c^2 + abc^2 + 2b^2c^2 - ac^3 - c^4), \\ & (a^3 - ab^2 + a^2c + 2abc + b^2c - ac^2 - c^3)(a^4 + a^3b - a^2b^2 - ab^3 \\ & + a^2bc + b^3c - 2a^2c^2 - abc^2 - b^2c^2 - bc^3 + c^4), \\ & (a^3 + a^2b - ab^2 - b^3 + 2abc - ac^2 + bc^2)(a^4 - 2a^2b^2 + b^4 + a^3c \\ & + a^2bc - ab^2c - b^3c - a^2c^2 - b^2c^2 - ac^3 + bc^3)\}, \end{aligned}$$

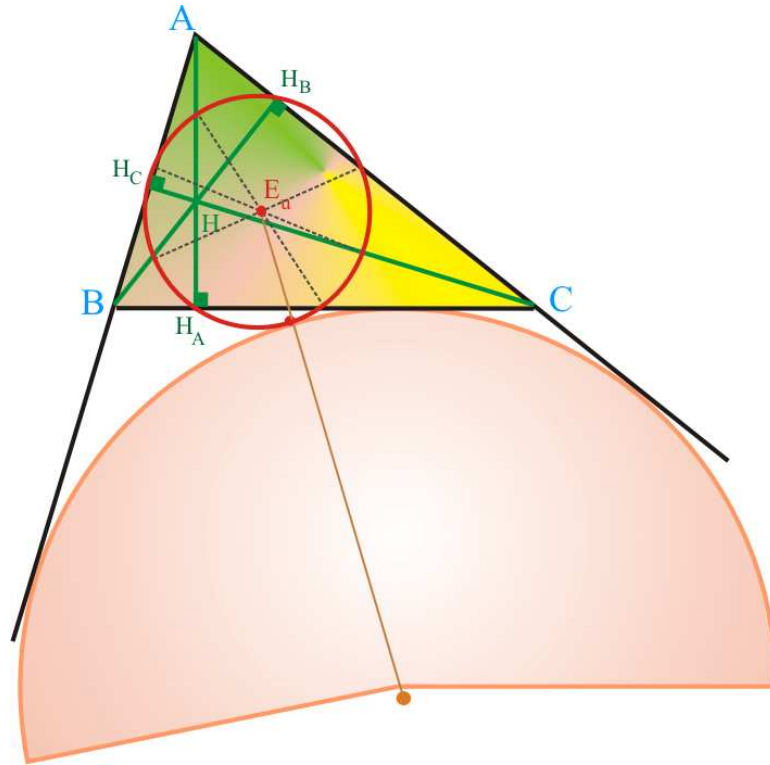
les coefficients étant normalisés en divisant par

$$2 (a - b - c) (a + b - c) (a - b + c) (a + b + c) (a^3 + a^2 b - a b^2 - b^3 + a^2 c + 3 a b c + b^2 c - a c^2 + b c^2 - c^3)$$

et du point de coordonnées barycentriques

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{-(b-c)^2 (a+b+c)}{2 (a^3 + a^2 b - a b^2 - b^3 + a^2 c + 3 a b c + b^2 c - a c^2 + b c^2 - c^3)}, \\ \frac{(a+b-c) (a+c)^2}{2 (a^3 + a^2 b - a b^2 - b^3 + a^2 c + 3 a b c + b^2 c - a c^2 + b c^2 - c^3)}, \\ \frac{(a+b)^2 (a-b+c)}{2 (a^3 + a^2 b - a b^2 - b^3 + a^2 c + 3 a b c + b^2 c - a c^2 + b c^2 - c^3)} \end{array} \right\}$$

Ce dernier point est l'un des points du théorème de Feuerbach.



6). Les coordonnées barycentriques du point K sont

$$K = \left\{ \begin{array}{l} \frac{a^2 (a^2 - b^2 - c^2)}{(a - b - c) (a + b - c) (a - b + c) (a + b + c)}, \\ \frac{b^2 (-a^2 + b^2 - c^2)}{(-a + b - c) (a + b - c) (-a + b + c) (a + b + c)}, \\ \frac{c^2 (a^2 + b^2 - c^2)}{(-a + b + c) (a + b - c) (a - b + c) (a + b + c)} \end{array} \right\}$$

La demi-somme des coordonnées barycentriques des points H et K est bien égale aux coordonnées barycentriques du point E_u .

7). Les coordonnées barycentriques du milieu de $[AH]$ ont été calculées à la question 4), le milieu du segment $[BC]$ ayant pour coordonnées barycentriques $\{0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\}$. La demi-somme de ces deux coordonnées barycentriques coïncide avec les coordonnées barycentriques du point E_u . On procède de même pour les autres segments.

3.2 Théorème de Feuerbach

Exercice 3.2.1

Dans un triangle ABC , le cercle d'Euler du triangle est tangent au cercle inscrit et aux trois cercles exinscrits à ce triangle. Préciser les coordonnées barycentriques des points de contact (points de Feuerbach).

Solution:

Soient

J le centre du cercle inscrit au triangle ABC , r le rayon de ce cercle

J_a le centre du cercle ex-inscrit au triangle ABC tangent au côté (BC) , r_a le rayon de ce cercle

J_b le centre du cercle ex-inscrit au triangle ABC tangent au côté (AC) , r_b le rayon de ce cercle

J_c le centre du cercle ex-inscrit au triangle ABC tangent au côté (AB) , r_c le rayon de ce cercle

E_u le centre du cercle d'Euler, r_E le rayon de ce cercle

Soit J_α le centre de l'un des cercles exinscrits et r_α le rayon du cercle correspondant: il est clair que $r_\alpha^2 = M_\alpha J_\alpha^2$, en notant M_α le projeté orthogonal de J_α sur l'une des droites tangente au cercle considéré. Le théorème de Feuerbach revient à démontrer que

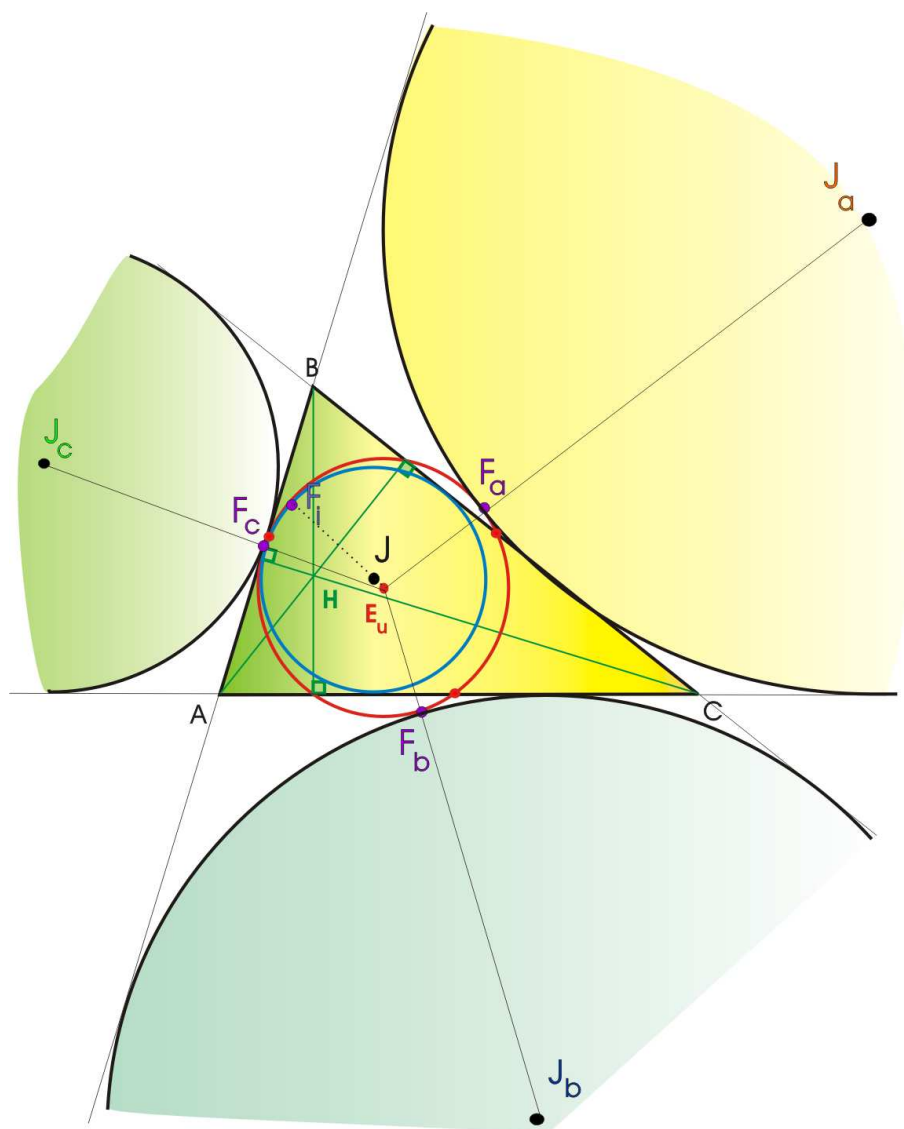
$$r_a + r_E = J_a E_u \quad r_b + r_E = J_b E_u \quad r_c + r_E = J_c E_u \quad |r - r_E| = J E_u$$

On a

$$r_E^2 = \frac{a^2 b^2 c^2}{4 (-a + b + c) (a + b - c) (a - b + c) (a + b + c)}$$

donc

$$r_E = K abc$$



en ayant posé

$$K = \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{(-a+b+c)(a+b-c)(a-b+c)(a+b+c)}}$$

Dessin = $\{A, B, C, Eu, J, Ja, Jb, Jc\}$

Le repère barycentrique choisi est A, B, C .

Les points composés sont J, Ja, Jb, Jc, Eu .

Les coordonnées barycentriques des points composés sont:

$$\begin{aligned} J &= \left\{ \frac{a}{a+b+c}, \frac{b}{a+b+c}, \frac{c}{a+b+c} \right\} \\ Ja &= \left\{ \frac{-a}{-a+b+c}, \frac{b}{-a+b+c}, \frac{c}{-a+b+c} \right\} \\ Jb &= \left\{ \frac{a}{a-b+c}, \frac{b}{-a+b-c}, \frac{c}{a-b+c} \right\} \end{aligned}$$

$$J_c = \left\{ \frac{a}{a+b-c}, \frac{b}{a+b-c}, \frac{-c}{a+b-c} \right\}$$

$$E_u = \left\{ \frac{a^2 b^2 - b^4 + a^2 c^2 + 2 b^2 c^2 - c^4}{2 (-a+b+c) (a+b-c) (a-b+c) (a+b+c)}, \right.$$

$$\frac{a^4 - a^2 b^2 - 2 a^2 c^2 - b^2 c^2 + c^4}{2 (a-b-c) (a+b-c) (a-b+c) (a+b+c)},$$

$$\left. \frac{a^4 - 2 a^2 b^2 + b^4 - a^2 c^2 - b^2 c^2}{2 (a-b-c) (a+b-c) (a-b+c) (a+b+c)} \right\}$$

La projection du point J sur la droite $\{B, C\}$ est le point de coordonnées barycentriques

$$\left\{ 0, \frac{a+b-c}{2a}, \frac{a-b+c}{2a} \right\}$$

On déduit que

$$r^2 = \frac{(a+b-c) (a-b+c) (-a+b+c)}{4 (a+b+c)}$$

La distance $E_u J^2$ a pour valeur

$$E_u J^2 = \frac{(a^3 - a^2 b - a b^2 + b^3 - a^2 c + 3 a b c - b^2 c - a c^2 - b c^2 + c^3)^2}{4 (a-b+c) (a+b-c) (-a+b+c) (a+b+c)}$$

On a donc

$$r = K (a+b-c) (a-b+c) (-a+b+c)$$

$$E_u J = K (a^3 - a^2 b - a b^2 + b^3 - a^2 c + 3 a b c - b^2 c - a c^2 - b c^2 + c^3)$$

Ainsi $r_E - r = E_u J$.

La projection du point J_a sur la droite $\{B, C\}$ est le point de coordonnées barycentriques

$$\left\{ 0, \frac{a-b+c}{2a}, \frac{a+b-c}{2a} \right\}$$

On déduit que

$$r_a^2 = \frac{(a+b-c) (a-b+c) (a+b+c)}{4 (-a+b+c)}$$

La distance $E_u J_a^2$ a pour valeur

$$E_u J_a^2 = \frac{(-a^3 - a^2 b + a b^2 + b^3 - a^2 c - 3 a b c - b^2 c + a c^2 - b c^2 + c^3)^2}{4 (a-b+c) (a+b-c) (-a+b+c) (a+b+c)}$$

On a donc

$$r_a = K (a+b-c) (a-b+c) (a+b+c)$$

$$E_u J_a = K (a^3 + a^2 b - a b^2 - b^3 + a^2 c + 3 a b c + b^2 c - a c^2 + b c^2 - c^3)$$

Ainsi $r_E + r_a = E_u J_a$.

La projection du point J_b sur la droite $\{B, C\}$ est le point de coordonnées barycentriques

$$\left\{ 0, \frac{a-b-c}{2a}, \frac{a+b+c}{2a} \right\}$$

On déduit que

$$r_b^2 = \frac{(a+b-c)(-a+b+c)(a+b+c)}{4(a-b+c)}$$

La distance $E_u J_b^2$ a pour valeur

$$E_u J_b^2 = \frac{(a^3 + a^2 b - a b^2 - b^3 - a^2 c - 3 a b c - b^2 c - a c^2 + b c^2 + c^3)^2}{4(-a+b+c)(a+b-c)(a-b+c)(a+b+c)}$$

On a donc

$$r_b = K(a+b-c)(-a+b+c)(a+b+c)$$

$$E_u J_b = K(-a^3 - a^2 b + a b^2 + b^3 + a^2 c + 3 a b c + b^2 c + a c^2 - b c^2 - c^3)$$

Ainsi $r_E + r_b = E_u J_b$.

La projection du point J_c sur la droite $\{B, C\}$ est le point de coordonnées barycentriques

$$\{0, \frac{a+b+c}{2a}, \frac{a-b-c}{2a}\}$$

On déduit que

$$r_c^2 = \frac{(-a+b+c)(a-b+c)(a+b+c)}{4(a+b-c)}$$

La distance $E_u J_c^2$ a pour valeur

$$E_u J_c^2 = \frac{(a^3 - a^2 b - a b^2 + b^3 + a^2 c - 3 a b c + b^2 c - a c^2 - b c^2 - c^3)^2}{4(a-b+c)(a+b-c)(-a+b+c)(a+b+c)}$$

On a donc

$$r_c = K(a-b+c)(-a+b+c)(a+b+c)$$

$$E_u J_c = K(-a^3 + a^2 b + a b^2 - b^3 - a^2 c + 3 a b c - b^2 c + a c^2 + b c^2 + c^3)$$

Ainsi $r_E + r_c = E_u J_c$.

Soient F_a, F_b, F_c les points de contact du cercle d'Euler avec les cercles ex-inscrits, F_i le point de contact relatif au cercle inscrit. Chaque point F_α (avec $\alpha = a, b, c$) est le barycentre de $\{(E_u, r_E), (J_\alpha, r_\alpha)\}$ et F_i est le barycentre de $\{(E_u, r_E), (J, -r)\}$. On a donc

$$\overrightarrow{OF_\alpha} = \frac{r_E}{r_E + r_\alpha} \overrightarrow{OE_u} + \frac{r_\alpha}{r_E + r_\alpha} \overrightarrow{OJ_\alpha}$$

$$\overrightarrow{OF_i} = \frac{r_E}{r_E - r} \overrightarrow{OE_u} + \frac{-r}{r_E - r} \overrightarrow{OJ}$$

Il suit

$$F_i = \left\{ \frac{(-a+b+c)(b-c)^2}{2(a^3 - a^2 b - a b^2 + b^3 - a^2 c + 3 a b c - b^2 c - a c^2 - b c^2 + c^3)}, \right.$$

$$\frac{(a-c)^2(a-b+c)}{2(a^3 - a^2 b - a b^2 + b^3 - a^2 c + 3 a b c - b^2 c - a c^2 - b c^2 + c^3)},$$

$$\left. \frac{(a-b)^2(a+b-c)}{2(a^3 - a^2 b - a b^2 + b^3 - a^2 c + 3 a b c - b^2 c - a c^2 - b c^2 + c^3)} \right\}$$

$$\begin{aligned}
F_a &= \left\{ \frac{(b-c)^2 (a+b+c)}{2 (-a^3 - a^2 b + a b^2 + b^3 - a^2 c - 3 a b c - b^2 c + a c^2 - b c^2 + c^3)}, \right. \\
&\quad \frac{(a+b-c) (a+c)^2}{2 (a^3 + a^2 b - a b^2 - b^3 + a^2 c + 3 a b c + b^2 c - a c^2 + b c^2 - c^3)}, \\
&\quad \left. \frac{(a+b)^2 (a-b+c)}{2 (a^3 + a^2 b - a b^2 - b^3 + a^2 c + 3 a b c + b^2 c - a c^2 + b c^2 - c^3)} \right\} \\
F_b &= \left\{ \frac{(-a-b+c) (b+c)^2}{2 (a^3 + a^2 b - a b^2 - b^3 - a^2 c - 3 a b c - b^2 c - a c^2 + b c^2 + c^3)}, \right. \\
&\quad \frac{(a-c)^2 (a+b+c)}{2 (a^3 + a^2 b - a b^2 - b^3 - a^2 c - 3 a b c - b^2 c - a c^2 + b c^2 + c^3)}, \\
&\quad \left. \frac{(a+b)^2 (a-b-c)}{2 (a^3 + a^2 b - a b^2 - b^3 - a^2 c - 3 a b c - b^2 c - a c^2 + b c^2 + c^3)} \right\} \\
F_c &= \left\{ \frac{(-a+b-c) (b+c)^2}{2 (a^3 - a^2 b - a b^2 + b^3 + a^2 c - 3 a b c + b^2 c - a c^2 - b c^2 - c^3)}, \right. \\
&\quad \frac{(a-b-c) (a+c)^2}{2 (a^3 - a^2 b - a b^2 + b^3 + a^2 c - 3 a b c + b^2 c - a c^2 - b c^2 - c^3)}, \\
&\quad \left. \frac{(a-b)^2 (a+b+c)}{2 (a^3 - a^2 b - a b^2 + b^3 + a^2 c - 3 a b c + b^2 c - a c^2 - b c^2 - c^3)} \right\}
\end{aligned}$$

CHAPITRE

4

Points classiques

4 Points classiques

4.1 Coordonnées barycentriques des points les plus classiques

H orthocentre du triangle ABC

$$H = \left\{ \frac{(a^2 + b^2 - c^2)(a^2 - b^2 + c^2)}{(-a + b + c)(a + b - c)(a - b + c)(a + b + c)}, \right. \\ \frac{(-a^2 + b^2 + c^2)(a^2 + b^2 - c^2)}{(-a + b + c)(a + b - c)(a - b + c)(a + b + c)}, \\ \left. \frac{(-a^2 + b^2 + c^2)(a^2 - b^2 + c^2)}{(-a + b + c)(a + b - c)(a - b + c)(a + b + c)} \right\}$$

K le centre du cercle circonscrit au triangle ABC

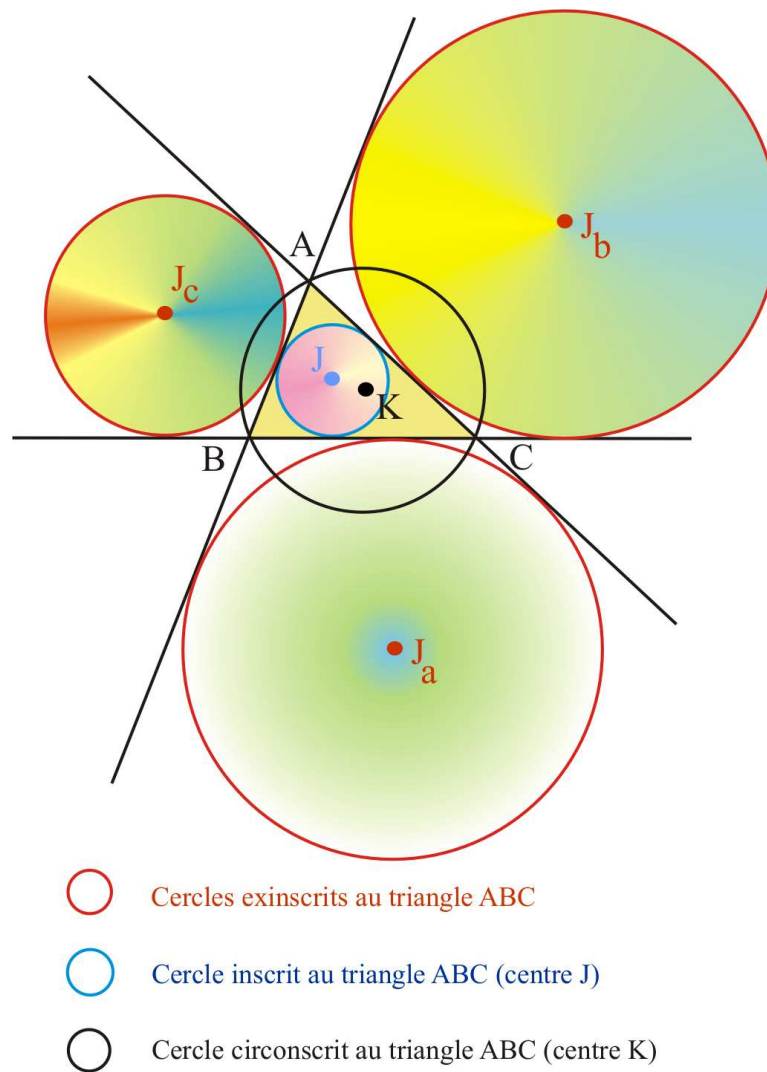
$$K = \left\{ \frac{a^2(a^2 - b^2 - c^2)}{(a - b - c)(a + b - c)(a - b + c)(a + b + c)}, \right. \\ \frac{b^2(-a^2 + b^2 - c^2)}{(-a + b - c)(a + b - c)(-a + b + c)(a + b + c)}, \\ \left. \frac{c^2(a^2 + b^2 - c^2)}{(-a + b + c)(a + b - c)(a - b + c)(a + b + c)} \right\}$$

E_u centre du cercle des neuf points d'Euler

$$E_u = \left\{ \frac{-(a^2 b^2 - b^4 + a^2 c^2 + 2 b^2 c^2 - c^4)}{2(a - b - c)(a + b - c)(a - b + c)(a + b + c)}, \right. \\ \frac{a^4 - a^2 b^2 - 2 a^2 c^2 - b^2 c^2 + c^4}{2(a - b - c)(a + b - c)(a - b + c)(a + b + c)}, \\ \left. \frac{a^4 - 2 a^2 b^2 + b^4 - a^2 c^2 - b^2 c^2}{2(a - b - c)(a + b - c)(a - b + c)(a + b + c)} \right\}$$

G centre de gravité

$$G = \left\{ \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3} \right\}$$



D point situé sur le cercle circonscrit à un triangle ABC :

$$D = \left\{ \frac{X (b^2 X + a^2 Y)}{b^2 X^2 + a^2 XY + b^2 XY - c^2 XY + a^2 Y^2}, \frac{Y (b^2 X + a^2 Y)}{b^2 X^2 + a^2 XY + b^2 XY - c^2 XY + a^2 Y^2}, \frac{-c^2 XY}{b^2 X^2 + a^2 XY + b^2 XY - c^2 XY + a^2 Y^2} \right\}$$

ou alors

$$D = \left\{ \frac{b^2 + a^2 t}{b^2 + a^2 t + b^2 t - c^2 t + a^2 t^2}, \frac{t (b^2 + a^2 t)}{b^2 + a^2 t + b^2 t - c^2 t + a^2 t^2}, \frac{-c^2 t}{b^2 + a^2 t + b^2 t - c^2 t + a^2 t^2} \right\}$$

en ayant posé $Y = tX$ (expression utilisant un seul paramètre t).

J le centre du cercle inscrit au triangle ABC

$$J = \left\{ \frac{a}{a+b+c}, \frac{b}{a+b+c}, \frac{c}{a+b+c} \right\}$$

J_a le centre du cercle ex-inscrit tangent extérieurement à BC

$$J_a = \left\{ \frac{-a}{-a+b+c}, \frac{b}{-a+b+c}, \frac{c}{-a+b+c} \right\}$$

J_b le centre du cercle ex-inscrit tangent extérieurement à AC

$$J_b = \left\{ \frac{a}{a-b+c}, \frac{-b}{a-b+c}, \frac{c}{a-b+c} \right\}$$

J_c le centre du cercle ex-inscrit tangent extérieurement à AB

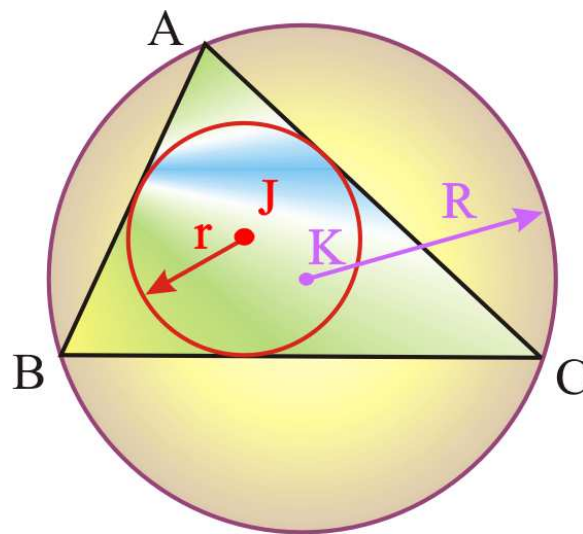
$$J_c = \left\{ \frac{a}{a+b-c}, \frac{b}{a+b-c}, \frac{-c}{a+b-c} \right\}$$

4.2 Formules remarquables

Exercice 4.2.1 Théorème d'Euler

Soit ABC un triangle, K le centre du cercle circonscrit, J le centre du cercle inscrit, r le rayon du cercle inscrit et R le rayon du cercle circonscrit. Montrer que

$$JK^2 = R(R - 2r)$$



Solution:

Dessin = $\{A, B, C, J, K\}$

Les points purs choisis sont A, B, C .

Les points composés sont J, K .

Les coordonnées barycentriques des points composés sont:

$$J = \left\{ \frac{a}{a+b+c}, \frac{b}{a+b+c}, \frac{c}{a+b+c} \right\}$$

$$K = \left\{ \frac{a^2 (a^2 - b^2 - c^2)}{(a - b - c) (a + b - c) (a - b + c) (a + b + c)}, \right. \\ \frac{b^2 (-a^2 + b^2 - c^2)}{(-a + b - c) (a + b - c) (-a + b + c) (a + b + c)}, \\ \left. \frac{c^2 (a^2 + b^2 - c^2)}{(-a + b + c) (a + b - c) (a - b + c) (a + b + c)} \right\}$$

La projection du point J sur la droite (AB) est le point de coordonnées barycentriques

$$J_a = \left\{ \frac{a - b + c}{2c}, \frac{-a + b + c}{2c}, 0 \right\}$$

La distance JK^2 est égale à

$$JK^2 = \frac{a AC^2 c (a^3 - a^2 b - a b^2 + b^3 + 2 a b c - a c^2 - b c^2) (a^2 b - b^3 + a^2 c - 2 a b c + b^2 c + b c^2 - c^3)}{(a - b - c)^2 (a + b - c)^2 (a - b + c)^2 (a + b + c)^2} \\ - \frac{b BC^2 c (a^3 - a^2 b - a b^2 + b^3 + 2 a b c - a c^2 - b c^2) (a^3 - a b^2 - a^2 c + 2 a b c - b^2 c - a c^2 + c^3)}{(a - b - c)^2 (a + b - c)^2 (a - b + c)^2 (a + b + c)^2} \\ + \frac{a AB^2 b (a^2 b - b^3 + a^2 c - 2 a b c + b^2 c + b c^2 - c^3) (a^3 - a b^2 - a^2 c + 2 a b c - b^2 c - a c^2 + c^3)}{(a - b - c)^2 (a + b - c)^2 (a - b + c)^2 (a + b + c)^2}$$

soit

$$JK^2 = \frac{a b c (a^3 - a^2 b - a b^2 + b^3 - a^2 c + 3 a b c - b^2 c - a c^2 - b c^2 + c^3)}{(-a + b + c) (a + b - c) (a - b + c) (a + b + c)}$$

La distance $AK^2 = R^2$ est égale à

$$R^2 = \frac{b^2 BC^2 c^2 (-a^2 + b^2 - c^2) (a^2 + b^2 - c^2)}{(-a + b - c)^2 (a + b - c)^2 (-a + b + c)^2 (a + b + c)^2} \\ + \frac{AC^2 c^2 (a^2 + b^2 - c^2) (a^2 b^2 - b^4 + a^2 c^2 + 2 b^2 c^2 - c^4)}{(a - b - c)^2 (a + b - c)^2 (a - b + c)^2 (a + b + c)^2} \\ + \frac{AB^2 b^2 (-a^2 + b^2 - c^2) (-a^2 b^2 + b^4 - a^2 c^2 - 2 b^2 c^2 + c^4)}{(-a + b - c)^2 (a + b - c)^2 (-a + b + c)^2 (a + b + c)^2}$$

soit

$$AK^2 = \frac{a^2 b^2 c^2}{(-a + b + c) (a + b - c) (a - b + c) (a + b + c)}$$

La distance $JJ_a^2 = r^2$ est égale à

$$r^2 = \frac{(a - b + c) (a + b - c) (-a + b + c)}{4 (a + b + c)}$$

On a donc

$$JK^2 - R^2 = \frac{-a b c}{a + b + c}$$

Or

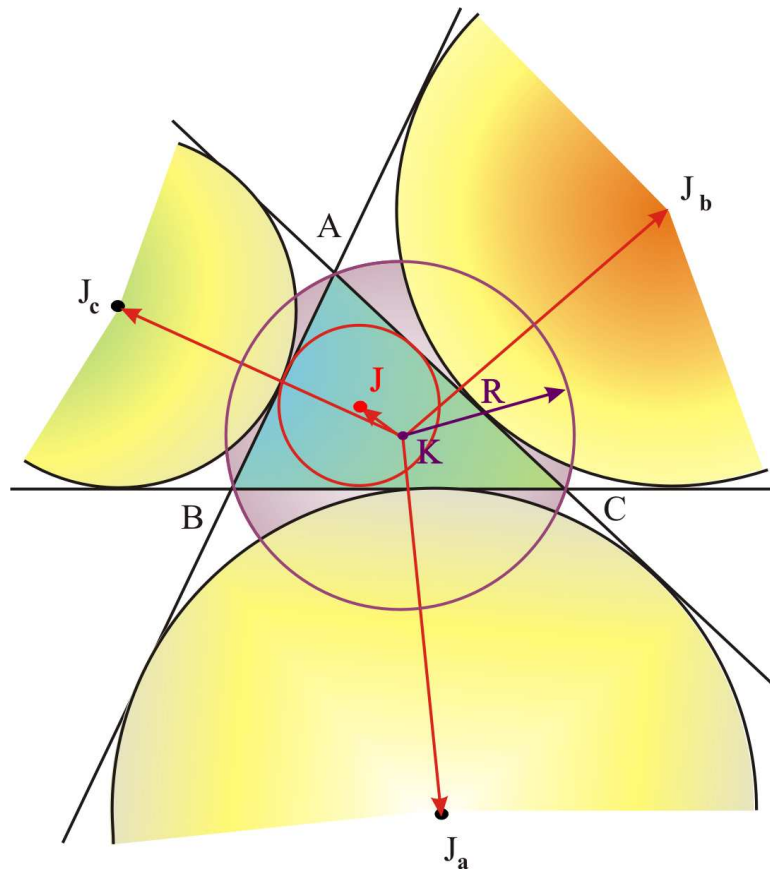
$$R^2 r^2 = \frac{a^2 b^2 c^2}{4 (a + b + c)^2}$$

Il résulte la formule $JK^2 = R(R - 2r)$.

Exercice 4.2.2

Dans un triangle ABC , la somme des carrés des distances du centre K du cercle circonscrit aux centres J, J_a, J_b, J_c des quatre cercles tangents aux trois côtés du triangle est égale à 12 fois le carré du rayon R du cercle circonscrit, soit

$$KJ^2 + KJ_a^2 + KJ_b^2 + KJ_c^2 = 12R^2$$



Solution:

Dessin = $\{A, B, C, J, J_a, J_b, J_c, K\}$

Les points purs choisis sont A, B, C .

Les points composés sont J, J_a, J_b, J_c, K .

Les coordonnées barycentriques des points composés sont:

$$J = \left\{ \frac{a}{a+b+c}, \frac{b}{a+b+c}, \frac{c}{a+b+c} \right\}$$

$$J_a = \left\{ \frac{-a}{-a+b+c}, \frac{b}{-a+b+c}, \frac{c}{-a+b+c} \right\}$$

$$J_b = \left\{ \frac{a}{a-b+c}, \frac{-b}{a-b+c}, \frac{c}{a-b+c} \right\}$$

$$J_c = \left\{ \frac{a}{a+b-c}, \frac{b}{a+b-c}, \frac{-c}{a+b-c} \right\}$$

$$K = \left\{ \frac{a^2 (a^2 - b^2 - c^2)}{(a-b-c)(a+b-c)(a-b+c)(a+b+c)}, \right. \\ \frac{b^2 (-a^2 + b^2 - c^2)}{(-a+b-c)(a+b-c)(-a+b+c)(a+b+c)}, \\ \left. \frac{c^2 (a^2 + b^2 - c^2)}{(-a+b+c)(a+b-c)(a-b+c)(a+b+c)} \right\}$$

La distance KJ_a^2 est égale à

$$KJ_a^2 = - \frac{bBC^2c(a^3 + a^2b - ab^2 - b^3 + 2abc - ac^2 + bc^2)(a^3 - ab^2 + a^2c + 2abc + b^2c - ac^2 - c^3)}{(a-b-c)^2(a+b-c)^2(a-b+c)^2(a+b+c)^2} \\ + \frac{aAC^2c(a^3 + a^2b - ab^2 - b^3 + 2abc - ac^2 + bc^2)(a^2b - b^3 + a^2c + 2abc + b^2c + bc^2 - c^3)}{(a-b-c)^2(a+b-c)^2(a-b+c)^2(a+b+c)^2} \\ + \frac{aAB^2b(a^3 - ab^2 + a^2c + 2abc + b^2c - ac^2 - c^3)(a^2b - b^3 + a^2c + 2abc + b^2c + bc^2 - c^3)}{(a-b-c)^2(a+b-c)^2(a-b+c)^2(a+b+c)^2}$$

soit

$$KJ_a^2 = \frac{abc(a^3 + a^2b - ab^2 - b^3 + a^2c + 3abc + b^2c - ac^2 + bc^2 - c^3)}{(-a+b+c)(a+b-c)(a-b+c)(a+b+c)}$$

La distance KJ_b^2 est égale à

$$KJ_b^2 = \frac{abc(a^3 + a^2b - ab^2 - b^3 - a^2c - 3abc - b^2c - ac^2 + bc^2 + c^3)}{(a-b-c)(a+b-c)(a-b+c)(a+b+c)}$$

La distance KJ_c^2 est égale à

$$KJ_c^2 = \frac{abc(a^3 - a^2b - ab^2 + b^3 + a^2c - 3abc + b^2c - ac^2 - bc^2 - c^3)}{(a-b-c)(a+b-c)(a-b+c)(a+b+c)}$$

La distance KJ^2 est égale à

$$KJ^2 = \frac{abc(a^3 - a^2b - ab^2 + b^3 - a^2c + 3abc - b^2c - ac^2 - bc^2 + c^3)}{(-a+b+c)(a+b-c)(a-b+c)(a+b+c)}$$

La somme a pour valeur

$$KJ^2 + KJ_a^2 + KJ_b^2 + KJ_c^2 = \frac{12a^2b^2c^2}{(-a+b+c)(a+b-c)(a-b+c)(a+b+c)}$$

Le carré du rayon du cercle circonscrit $KA^2 = R^2$ est égale à

$$R^2 = \frac{b^2 BC^2 c^2 (-a^2 + b^2 - c^2) (a^2 + b^2 - c^2)}{(-a + b - c)^2 (a + b - c)^2 (-a + b + c)^2 (a + b + c)^2} \\ + \frac{AC^2 c^2 (a^2 + b^2 - c^2) (a^2 b^2 - b^4 + a^2 c^2 + 2 b^2 c^2 - c^4)}{(a - b - c)^2 (a + b - c)^2 (a - b + c)^2 (a + b + c)^2} \\ + \frac{AB^2 b^2 (-a^2 + b^2 - c^2) (- (a^2 b^2) + b^4 - a^2 c^2 - 2 b^2 c^2 + c^4)}{(-a + b - c)^2 (a + b - c)^2 (-a + b + c)^2 (a + b + c)^2}$$

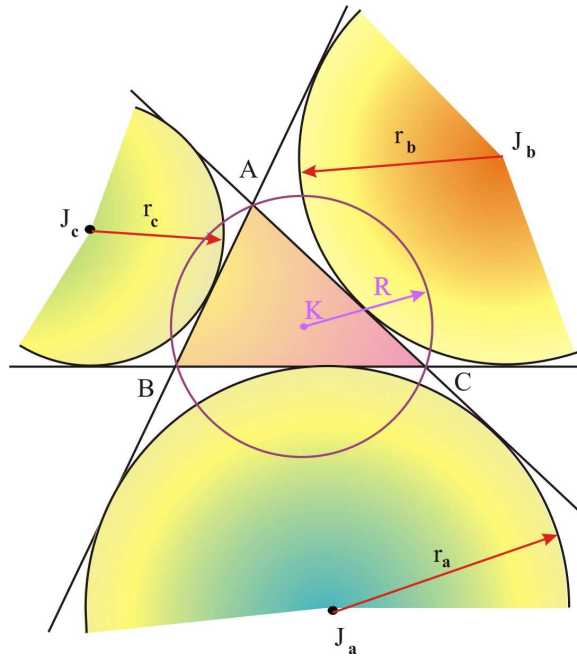
soit

$$R^2 = \frac{a^2 b^2 c^2}{(-a + b + c) (a + b - c) (a - b + c) (a + b + c)}$$

Exercice 4.2.3

Dans un triangle ABC , soient J_a le centre du cercle ex-inscrit tangent au côté (BC) et K le centre du cercle circonscrit au triangle ABC . On désigne par r_a (resp. R) le rayon du cercle ex-inscrit centré en J_a (resp. du cercle circonscrit). Montrer que

$$KJ_a^2 = R(R + 2r_a)$$



Solution:

En utilisant les notations de l'exercice précédent, on a:

$$KJ_a^2 = \frac{abc (a^3 + a^2 b - ab^2 - b^3 + a^2 c + 3abc + b^2 c - ac^2 + bc^2 - c^3)}{(-a + b + c) (a + b - c) (a - b + c) (a + b + c)}$$

$$R^2 = \frac{a^2 b^2 c^2}{(-a+b+c)(a+b-c)(a-b+c)(a+b+c)}$$

donc

$$KJ_a^2 - R^2 = \frac{abc}{-a+b+c}$$

La projection du point J_a sur la droite (BC) est le point P de coordonnées barycentriques

$$P = \left\{0, \frac{a-b+c}{2a}, \frac{a+b-c}{2a}\right\}$$

La distance $J_a P^2 = r_a^2$ a pour valeur

$$r_a^2 = \frac{(a+b-c)(a-b+c)(a+b+c)}{4(-a+b+c)}$$

donc

$$r_a^2 R^2 = \frac{a^2 b^2 c^2}{4(a-b-c)^2}$$

Il résulte la formule car $-a+b+c > 0$.

4.3 Distances entre des points classiques d'un triangle

Exercice 4.3.1

Soit ABC un triangle, $AB = c$, $BC = a$, $AC = b$. Calculer les distances AM^2 , BM^2 , CM^2 lorsque

$M = G$ est le centre de gravité du triangle

$M = K$ est le centre du cercle circonscrit au triangle

$M = H$ est l'orthocentre au triangle

$M = J$ est le centre du cercle inscrit au triangle

$M = L_0$ est le point de Lemoine

Calculer KH^2 , KG^2 , KJ^2 , GJ^2 , GH^2 , GL_0^2 , HL_0^2 , JL_0^2 .

Solution:

Dessin = $\{A, B, C, G, H, J, K, L_0\}$

Les points purs choisis sont A, B, C .

Les points composés sont J, L_0, H, G, K .

Les coordonnées barycentriques des points composés sont:

$$J = \left\{\frac{a}{a+b+c}, \frac{b}{a+b+c}, \frac{c}{a+b+c}\right\}$$

$$L_0 = \left\{\frac{a^2}{a^2+b^2+c^2}, \frac{b^2}{a^2+b^2+c^2}, \frac{c^2}{a^2+b^2+c^2}\right\}$$

$$G = \left\{\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right\}$$

$$\begin{aligned}
H &= \left\{ \frac{(a^2 + b^2 - c^2)(a^2 - b^2 + c^2)}{(-a + b + c)(a + b - c)(a - b + c)(a + b + c)}, \right. \\
&\quad \frac{(a^2 - b^2 - c^2)(a^2 + b^2 - c^2)}{(a - b - c)(a + b - c)(a - b + c)(a + b + c)}, \\
&\quad \left. \frac{(a^2 - b^2 - c^2)(a^2 - b^2 + c^2)}{(a - b - c)(a + b - c)(a - b + c)(a + b + c)} \right\} \\
K &= \left\{ \frac{a^2(a^2 - b^2 - c^2)}{(a - b - c)(a + b - c)(a - b + c)(a + b + c)}, \right. \\
&\quad \frac{b^2(-a^2 + b^2 - c^2)}{(-a + b - c)(a + b - c)(-a + b + c)(a + b + c)}, \\
&\quad \left. \frac{c^2(a^2 + b^2 - c^2)}{(-a + b + c)(a + b - c)(a - b + c)(a + b + c)} \right\}
\end{aligned}$$

La distance AG^2 est égale à

$$AG^2 = \frac{2AB^2}{9} + \frac{2AC^2}{9} - \frac{BC^2}{9} = \frac{-a^2 + 2b^2 + 2c^2}{9}$$

La distance BG^2 est égale à

$$BG^2 = \frac{2AB^2}{9} - \frac{AC^2}{9} + \frac{2BC^2}{9} = \frac{2a^2 - b^2 + 2c^2}{9}$$

La distance CG^2 est égale à

$$CG^2 = \frac{-AB^2}{9} + \frac{2AC^2}{9} + \frac{2BC^2}{9} = \frac{2a^2 + 2b^2 - c^2}{9}$$

La distance AK^2 est égale à

$$\begin{aligned}
AK^2 &= \frac{b^2 BC^2 c^2 (-a^2 + b^2 - c^2)(a^2 + b^2 - c^2)}{(-a + b - c)^2 (a + b - c)^2 (-a + b + c)^2 (a + b + c)^2} \\
&+ \frac{AC^2 c^2 (a^2 + b^2 - c^2)(a^2 b^2 - b^4 + a^2 c^2 + 2b^2 c^2 - c^4)}{(a - b - c)^2 (a + b - c)^2 (a - b + c)^2 (a + b + c)^2} \\
&+ \frac{AB^2 b^2 (-a^2 + b^2 - c^2)(-(a^2 b^2) + b^4 - a^2 c^2 - 2b^2 c^2 + c^4)}{(-a + b - c)^2 (a + b - c)^2 (-a + b + c)^2 (a + b + c)^2}
\end{aligned}$$

soit

$$AK^2 = \frac{a^2 b^2 c^2}{(-a + b + c)(a + b - c)(a - b + c)(a + b + c)}$$

La distance BK^2 est égale à

$$\begin{aligned}
BK^2 &= \frac{a^2 AC^2 c^2 (a^2 - b^2 - c^2)(a^2 + b^2 - c^2)}{(a - b - c)^2 (a + b - c)^2 (a - b + c)^2 (a + b + c)^2} \\
&+ \frac{a^2 AB^2 (a^2 - b^2 - c^2)(a^4 - a^2 b^2 - 2a^2 c^2 - b^2 c^2 + c^4)}{(a - b - c)^2 (a + b - c)^2 (a - b + c)^2 (a + b + c)^2} \\
&- \frac{BC^2 c^2 (a^2 + b^2 - c^2)(a^4 - a^2 b^2 - 2a^2 c^2 - b^2 c^2 + c^4)}{(a - b - c)^2 (a + b - c)^2 (a - b + c)^2 (a + b + c)^2}
\end{aligned}$$

soit

$$BK^2 = \frac{a^2 b^2 c^2}{(-a+b+c)(a+b-c)(a-b+c)(a+b+c)}$$

La distance CK^2 est égale à

$$\begin{aligned} CK^2 &= \frac{a^2 AB^2 b^2 (a^2 - b^2 - c^2) (a^2 - b^2 + c^2)}{(a-b-c)^2 (a+b-c)^2 (a-b+c)^2 (a+b+c)^2} \\ &+ \frac{a^2 AC^2 (a^2 - b^2 - c^2) (a^4 - 2a^2 b^2 + b^4 - a^2 c^2 - b^2 c^2)}{(a-b-c)^2 (a+b-c)^2 (a-b+c)^2 (a+b+c)^2} \\ &+ \frac{b^2 BC^2 (-a^2 + b^2 - c^2) (a^4 - 2a^2 b^2 + b^4 - a^2 c^2 - b^2 c^2)}{(-a+b-c)^2 (a+b-c)^2 (-a+b+c)^2 (a+b+c)^2} \end{aligned}$$

soit

$$CK^2 = \frac{a^2 b^2 c^2}{(-a+b+c)(a+b-c)(a-b+c)(a+b+c)}$$

La distance AH^2 est égale à

$$\begin{aligned} AH^2 &= \frac{2a^2 AB^2 (a^2 - b^2 - c^2)^2 (a^2 + b^2 - c^2)}{(a-b-c)^2 (a+b-c)^2 (a-b+c)^2 (a+b+c)^2} \\ &+ \frac{2a^2 AC^2 (a^2 - b^2 - c^2)^2 (a^2 - b^2 + c^2)}{(a-b-c)^2 (a+b-c)^2 (a-b+c)^2 (a+b+c)^2} \\ &- \frac{BC^2 (a^2 - b^2 - c^2)^2 (a^2 + b^2 - c^2) (a^2 - b^2 + c^2)}{(a-b-c)^2 (a+b-c)^2 (a-b+c)^2 (a+b+c)^2} \end{aligned}$$

soit

$$AH^2 = \frac{a^2 (a^2 - b^2 - c^2)^2}{(-a+b+c)(a+b-c)(a-b+c)(a+b+c)}$$

La distance BH^2 est égale à

$$\begin{aligned} BH^2 &= \frac{-2b^2 BC^2 (a^2 - b^2 - c^2) (a^2 - b^2 + c^2)^2}{(a-b-c)^2 (a+b-c)^2 (a-b+c)^2 (a+b+c)^2} \\ &+ \frac{2AB^2 b^2 (a^2 + b^2 - c^2) (a^2 - b^2 + c^2)^2}{(a-b-c)^2 (a+b-c)^2 (a-b+c)^2 (a+b+c)^2} \\ &+ \frac{AC^2 (a^2 - b^2 - c^2) (a^2 + b^2 - c^2) (a^2 - b^2 + c^2)^2}{(a-b-c)^2 (a+b-c)^2 (a-b+c)^2 (a+b+c)^2} \end{aligned}$$

soit

$$BH^2 = \frac{b^2 (a^2 - b^2 + c^2)^2}{(-a+b+c)(a+b-c)(a-b+c)(a+b+c)}$$

La distance CH^2 est égale à

$$\begin{aligned} CH^2 = & \frac{-2BC^2c^2(a^2-b^2-c^2)(a^2+b^2-c^2)^2}{(a-b-c)^2(a+b-c)^2(a-b+c)^2(a+b+c)^2} \\ & + \frac{2AC^2c^2(a^2+b^2-c^2)^2(a^2-b^2+c^2)}{(a-b-c)^2(a+b-c)^2(a-b+c)^2(a+b+c)^2} \\ & + \frac{AB^2(a^2-b^2-c^2)(a^2+b^2-c^2)^2(a^2-b^2+c^2)}{(a-b-c)^2(a+b-c)^2(a-b+c)^2(a+b+c)^2} \end{aligned}$$

soit

$$CH^2 = \frac{c^2(a^2+b^2-c^2)^2}{(-a+b+c)(a+b-c)(a-b+c)(a+b+c)}$$

La distance AJ^2 est égale à

$$AJ^2 = -\frac{bBC^2c}{(a+b+c)^2} + \frac{AB^2b(b+c)}{(a+b+c)^2} + \frac{AC^2c(b+c)}{(a+b+c)^2} = \frac{b(-a+b+c)c}{a+b+c}$$

La distance BJ^2 est égale à

$$BJ^2 = -\frac{aAC^2c}{(a+b+c)^2} + \frac{aAB^2(a+c)}{(a+b+c)^2} + \frac{BC^2c(a+c)}{(a+b+c)^2} = \frac{ac(a-b+c)}{a+b+c}$$

La distance CJ^2 est égale à

$$CJ^2 = -\frac{aAB^2b}{(a+b+c)^2} + \frac{aAC^2(a+b)}{(a+b+c)^2} + \frac{b(a+b)BC^2}{(a+b+c)^2} = \frac{ab(a+b-c)}{a+b+c}$$

La distance KH^2 est égale à

$$\begin{aligned} KH^2 = & \frac{AC^2(a^4-2a^2b^2+b^4+a^2c^2+b^2c^2-2c^4)(2a^4-a^2b^2-b^4-a^2c^2+2b^2c^2-c^4)}{(a-b-c)^2(a+b-c)^2(a-b+c)^2(a+b+c)^2} \\ & - \frac{BC^2(a^4-2a^2b^2+b^4+a^2c^2+b^2c^2-2c^4)(a^4+a^2b^2-2b^4-2a^2c^2+b^2c^2+c^4)}{(a-b-c)^2(a+b-c)^2(a-b+c)^2(a+b+c)^2} \\ & + \frac{AB^2(2a^4-a^2b^2-b^4-a^2c^2+2b^2c^2-c^4)(a^4+a^2b^2-2b^4-2a^2c^2+b^2c^2+c^4)}{(a-b-c)^2(a+b-c)^2(a-b+c)^2(a+b+c)^2} \end{aligned}$$

soit

$$KH^2 = \frac{a^6 - a^4b^2 - a^2b^4 + b^6 - a^4c^2 + 3a^2b^2c^2 - b^4c^2 - a^2c^4 - b^2c^4 + c^6}{(a-b+c)(a+b-c)(-a+b+c)(a+b+c)}$$

La distance KG^2 est égale à

$$\begin{aligned} KG^2 = & \frac{AC^2(a^4-2a^2b^2+b^4+a^2c^2+b^2c^2-2c^4)(2a^4-a^2b^2-b^4-a^2c^2+2b^2c^2-c^4)}{9(a-b-c)^2(a+b-c)^2(a-b+c)^2(a+b+c)^2} \\ & - \frac{BC^2(a^4-2a^2b^2+b^4+a^2c^2+b^2c^2-2c^4)(a^4+a^2b^2-2b^4-2a^2c^2+b^2c^2+c^4)}{9(a-b-c)^2(a+b-c)^2(a-b+c)^2(a+b+c)^2} \\ & + \frac{AB^2(2a^4-a^2b^2-b^4-a^2c^2+2b^2c^2-c^4)(a^4+a^2b^2-2b^4-2a^2c^2+b^2c^2+c^4)}{9(a-b-c)^2(a+b-c)^2(a-b+c)^2(a+b+c)^2} \end{aligned}$$

soit

$$KG^2 = \frac{(a^6 - a^4 b^2 - a^2 b^4 + b^6 - a^4 c^2 + 3 a^2 b^2 c^2 - b^4 c^2 - a^2 c^4 - b^2 c^4 + c^6)}{9 (a - b + c) (a + b - c) (-a + b + c) (a + b + c)}$$

La distance KJ^2 est égale à

$$\begin{aligned} KJ^2 = & \frac{a AC^2 c (a^3 - a^2 b - a b^2 + b^3 + 2 a b c - a c^2 - b c^2) (a^2 b - b^3 + a^2 c - 2 a b c + b^2 c + b c^2 - c^3)}{(a - b - c)^2 (a + b - c)^2 (a - b + c)^2 (a + b + c)^2} \\ & - \frac{b BC^2 c (a^3 - a^2 b - a b^2 + b^3 + 2 a b c - a c^2 - b c^2) (a^3 - a b^2 - a^2 c + 2 a b c - b^2 c - a c^2 + c^3)}{(a - b - c)^2 (a + b - c)^2 (a - b + c)^2 (a + b + c)^2} \\ & + \frac{a AB^2 b (a^2 b - b^3 + a^2 c - 2 a b c + b^2 c + b c^2 - c^3) (a^3 - a b^2 - a^2 c + 2 a b c - b^2 c - a c^2 + c^3)}{(a - b - c)^2 (a + b - c)^2 (a - b + c)^2 (a + b + c)^2} \end{aligned}$$

soit

$$KJ^2 = \frac{a b c (a^3 - a^2 b - a b^2 + b^3 - a^2 c + 3 a b c - b^2 c - a c^2 - b c^2 + c^3)}{(-a + b + c) (a + b - c) (a - b + c) (a + b + c)}$$

La distance JG^2 est égale à

$$JG^2 = \frac{AC^2 (a + b - 2 c) (2 a - b - c)}{9 (a + b + c)^2} - \frac{BC^2 (a + b - 2 c) (a - 2 b + c)}{9 (a + b + c)^2} + \frac{AB^2 (2 a - b - c) (a - 2 b + c)}{9 (a + b + c)^2}$$

soit

$$JG^2 = \frac{-(a^3 - 2 a^2 b - 2 a b^2 + b^3 - 2 a^2 c + 9 a b c - 2 b^2 c - 2 a c^2 - 2 b c^2 + c^3)}{9 (a + b + c)}$$

La distance HG^2 est égale à

$$\begin{aligned} HG^2 = & \frac{4 AC^2 (a^4 - 2 a^2 b^2 + b^4 + a^2 c^2 + b^2 c^2 - 2 c^4) (2 a^4 - a^2 b^2 - b^4 - a^2 c^2 + 2 b^2 c^2 - c^4)}{9 (a - b - c)^2 (a + b - c)^2 (a - b + c)^2 (a + b + c)^2} \\ & - \frac{4 BC^2 (a^4 - 2 a^2 b^2 + b^4 + a^2 c^2 + b^2 c^2 - 2 c^4) (a^4 + a^2 b^2 - 2 b^4 - 2 a^2 c^2 + b^2 c^2 + c^4)}{9 (a - b - c)^2 (a + b - c)^2 (a - b + c)^2 (a + b + c)^2} \\ & + \frac{4 AB^2 (2 a^4 - a^2 b^2 - b^4 - a^2 c^2 + 2 b^2 c^2 - c^4) (a^4 + a^2 b^2 - 2 b^4 - 2 a^2 c^2 + b^2 c^2 + c^4)}{9 (a - b - c)^2 (a + b - c)^2 (a - b + c)^2 (a + b + c)^2} \end{aligned}$$

soit

$$HG^2 = \frac{4 (a^6 - a^4 b^2 - a^2 b^4 + b^6 - a^4 c^2 + 3 a^2 b^2 c^2 - b^4 c^2 - a^2 c^4 - b^2 c^4 + c^6)}{9 (a - b + c) (a + b - c) (-a + b + c) (a + b + c)}$$

La distance AL_0^2 est égale à

$$AL_0^2 = -\frac{b^2 BC^2 c^2}{(a^2 + b^2 + c^2)^2} + \frac{AB^2 b^2 (b^2 + c^2)}{(a^2 + b^2 + c^2)^2} + \frac{AC^2 c^2 (b^2 + c^2)}{(a^2 + b^2 + c^2)^2} = \frac{b^2 c^2 (-a^2 + 2 b^2 + 2 c^2)}{(a^2 + b^2 + c^2)^2}$$

La distance BL_0^2 est égale à

$$BL_0^2 = -\frac{a^2 AC^2 c^2}{(a^2 + b^2 + c^2)^2} + \frac{a^2 AB^2 (a^2 + c^2)}{(a^2 + b^2 + c^2)^2} + \frac{BC^2 c^2 (a^2 + c^2)}{(a^2 + b^2 + c^2)^2} = \frac{a^2 c^2 (2 a^2 - b^2 + 2 c^2)}{(a^2 + b^2 + c^2)^2}$$

La distance CL_0^2 est égale à

$$CL_0^2 = -\frac{a^2 AB^2 b^2}{(a^2 + b^2 + c^2)^2} + \frac{a^2 AC^2 (a^2 + b^2)}{(a^2 + b^2 + c^2)^2} + \frac{b^2 (a^2 + b^2) BC^2}{(a^2 + b^2 + c^2)^2} = \frac{a^2 b^2 (2a^2 + 2b^2 - c^2)}{(a^2 + b^2 + c^2)^2}$$

La distance GL_0^2 est égale à

$$GL_0^2 = \frac{AC^2 (a^2 + b^2 - 2c^2) (2a^2 - b^2 - c^2)}{9(a^2 + b^2 + c^2)^2} - \frac{BC^2 (a^2 + b^2 - 2c^2) (a^2 - 2b^2 + c^2)}{9(a^2 + b^2 + c^2)^2} + \frac{AB^2 (2a^2 - b^2 - c^2) (a^2 - 2b^2 + c^2)}{9(a^2 + b^2 + c^2)^2}$$

soit

$$GL_0^2 = \frac{(-a^6 + 3a^4 b^2 + 3a^2 b^4 - b^6 + 3a^4 c^2 - 15a^2 b^2 c^2 + 3b^4 c^2 + 3a^2 c^4 + 3b^2 c^4 - c^6)}{9(a^2 + b^2 + c^2)^2}$$

La distance HL_0^2 est égale à

$$HL_0^2 = \frac{AC^2 (a^6 - a^4 b^2 - a^2 b^4 + b^6 + a^2 c^4 + b^2 c^4 - 2c^6) (2a^6 - a^4 b^2 - b^6 - a^4 c^2 + b^4 c^2 + b^2 c^4 - c^6)}{(a-b-c)^2 (a+b-c)^2 (a-b+c)^2 (a+b+c)^2 (a^2 + b^2 + c^2)^2} - \frac{BC^2 (a^6 - a^4 b^2 - a^2 b^4 + b^6 + a^2 c^4 + b^2 c^4 - 2c^6) (a^6 + a^2 b^4 - 2b^6 - a^4 c^2 + b^4 c^2 - a^2 c^4 + c^6)}{(a-b-c)^2 (a+b-c)^2 (a-b+c)^2 (a+b+c)^2 (a^2 + b^2 + c^2)^2} + \frac{AB^2 (2a^6 - a^4 b^2 - b^6 - a^4 c^2 + b^4 c^2 + b^2 c^4 - c^6) (a^6 + a^2 b^4 - 2b^6 - a^4 c^2 + b^4 c^2 - a^2 c^4 + c^6)}{(a-b-c)^2 (a+b-c)^2 (a-b+c)^2 (a+b+c)^2 (a^2 + b^2 + c^2)^2}$$

soit

$$HL_0^2 = \frac{a^{10} - a^8 b^2 - a^2 b^8 + b^{10} - a^8 c^2 + a^6 b^2 c^2 + a^2 b^6 c^2 - b^8 c^2 + a^2 b^2 c^6 - a^2 c^8 - b^2 c^8 + c^{10}}{(a-b+c) (a+b-c) (-a+b+c) (a+b+c) (a^2 + b^2 + c^2)^2}$$

La distance JL_0^2 est égale à

$$JL_0^2 = \frac{a AC^2 c (a^2 + b^2 - ac - bc) (ab - b^2 + ac - c^2)}{(a+b+c)^2 (a^2 + b^2 + c^2)^2} - \frac{b BC^2 c (a^2 + b^2 - ac - bc) (a^2 - ab - bc + c^2)}{(a+b+c)^2 (a^2 + b^2 + c^2)^2} + \frac{a AB^2 b (ab - b^2 + ac - c^2) (a^2 - ab - bc + c^2)}{(a+b+c)^2 (a^2 + b^2 + c^2)^2}$$

soit

$$JL_0^2 = \frac{abc (-a^4 + 2a^3 b - 2a^2 b^2 + 2ab^3 - b^4 + 2a^3 c - a^2 bc - ab^2 c)}{(a+b+c) (a^2 + b^2 + c^2)^2} + \frac{abc (2b^3 c - 2a^2 c^2 - abc^2 - 2b^2 c^2 + 2ac^3 + 2bc^3 - c^4)}{(a+b+c) (a^2 + b^2 + c^2)^2}$$

CHAPITRE

5

Droites orthogonales

5 Droites orthogonales

Toute droite est décrite par deux points, cette description étant indispensable à l'obtention par l'informatique des points d'intersection de ladite droite avec d'autres droites. Les tangentes à un cercle, la droite orthogonale à une droite donnée nécessitent donc pour leur description complète, l'obtention d'un point supplémentaire ayant des coordonnées barycentriques les plus simples possibles servant à la description informatique de la droite. La section *triangle tangentiel* fait ample utilisation de la construction de tels points. Les tangentes à une courbe quelconque (voir le cas des coniques) s'obtiennent par une démarche distincte.

5.1 Point M tel que MM_1 soit orthogonal à M_2M_3 .**Exercice 5.1.1**

Soit $M_i = \{X_i, Y_i, 1 - X_i - Y_i\}$ pour $i = 1, 2, 3$ des points du plan, et M un point de coordonnées barycentriques $\{X, Y, 1 - X - Y\}$.

1. Déterminer la relation entre X et Y traduisant l'orthogonalité des vecteurs $\overrightarrow{MM_1}$ et $\overrightarrow{M_2M_3}$.
2. Exprimer cette relation en regroupant les termes en fonction des expressions $(X - X_1)$ et $(Y - Y_1)$.
3. En déduire que le point de coordonnées barycentriques

$$M = \{X_1 + (a^2 X_2 + b^2 X_2 - c^2 X_2 - a^2 X_3 - b^2 X_3 + c^2 X_3 + 2a^2 Y_2 - 2a^2 Y_3), \\ Y_1 - (2b^2 X_2 - 2b^2 X_3 + a^2 Y_2 + b^2 Y_2 - c^2 Y_2 - a^2 Y_3 - b^2 Y_3 + c^2 Y_3), \\ 1 - X_1 - Y_1 - a^2 X_2 + b^2 X_2 + c^2 X_2 + a^2 X_3 - b^2 X_3 - c^2 X_3 \\ - a^2 Y_2 + b^2 Y_2 - c^2 Y_2 + a^2 Y_3 - b^2 Y_3 + c^2 Y_3\}$$

est tel que $\overrightarrow{MM_1} \cdot \overrightarrow{M_2M_3} = 0$. Comparer les distances MM_1^2 et $M_2M_3^2$.

Solution:

1). La condition $\overrightarrow{MM_1} \cdot \overrightarrow{M_2M_3}$ se traduit par l'équation

$$\begin{aligned} 0 = & 2b^2 X_1 X_2 - 2b^2 X_1 X_3 + a^2 X_2 Y_1 + b^2 X_2 Y_1 - c^2 X_2 Y_1 - a^2 X_3 Y_1 - b^2 X_3 Y_1 + c^2 X_3 Y_1 \\ & + a^2 X_1 Y_2 + b^2 X_1 Y_2 - c^2 X_1 Y_2 + 2a^2 Y_1 Y_2 - a^2 X_1 Y_3 - b^2 X_1 Y_3 + c^2 X_1 Y_3 - 2a^2 Y_1 Y_3 \\ & + Y \left(- (a^2 X_2) - b^2 X_2 + c^2 X_2 + a^2 X_3 + b^2 X_3 - c^2 X_3 - 2a^2 Y_2 + 2a^2 Y_3 \right) \\ & + X \left(-2b^2 X_2 + 2b^2 X_3 - a^2 Y_2 - b^2 Y_2 + c^2 Y_2 + a^2 Y_3 + b^2 Y_3 - c^2 Y_3 \right) \end{aligned}$$

2). L'expression est nulle lorsque $X = X_1$ et $Y = Y_1$ puisque le produit scalaire est alors nul. En posant $X_1 = X + h$ et $Y_1 = Y + k$, l'expression devient

$$\begin{aligned} 0 = & k \left(a^2 X_2 + b^2 X_2 - c^2 X_2 - a^2 X_3 - b^2 X_3 + c^2 X_3 + 2a^2 Y_2 - 2a^2 Y_3 \right) \\ & + h \left(2b^2 X_2 - 2b^2 X_3 + a^2 Y_2 + b^2 Y_2 - c^2 Y_2 - a^2 Y_3 - b^2 Y_3 + c^2 Y_3 \right) \end{aligned}$$

On obtient ainsi

$$\begin{aligned} 0 = & (X - X_1) \left(2b^2 X_2 - 2b^2 X_3 + a^2 Y_2 + b^2 Y_2 - c^2 Y_2 - a^2 Y_3 - b^2 Y_3 + c^2 Y_3 \right) \\ & + (Y - Y_1) \left(a^2 X_2 + b^2 X_2 - c^2 X_2 - a^2 X_3 - b^2 X_3 + c^2 X_3 + 2a^2 Y_2 - 2a^2 Y_3 \right) \end{aligned}$$

3). Choisissons X et Y dans la deuxième question de telle sorte que l'on satisfasse

$$\begin{aligned} X - X_1 = & (a^2 X_2 + b^2 X_2 - c^2 X_2 - a^2 X_3 - b^2 X_3 + c^2 X_3 + 2a^2 Y_2 - 2a^2 Y_3) \\ Y - Y_1 = & - (2b^2 X_2 - 2b^2 X_3 + a^2 Y_2 + b^2 Y_2 - c^2 Y_2 - a^2 Y_3 - b^2 Y_3 + c^2 Y_3) \end{aligned}$$

On a donc

$$\begin{aligned} X = & X_1 + (a^2 X_2 + b^2 X_2 - c^2 X_2 - a^2 X_3 - b^2 X_3 + c^2 X_3 + 2a^2 Y_2 - 2a^2 Y_3) \\ Y = & Y_1 - (2b^2 X_2 - 2b^2 X_3 + a^2 Y_2 + b^2 Y_2 - c^2 Y_2 - a^2 Y_3 - b^2 Y_3 + c^2 Y_3) \end{aligned}$$

Il résulte que

$$\begin{aligned} 1 - X - Y = & 1 - X_1 - Y_1 - a^2 X_2 + b^2 X_2 + c^2 X_2 + a^2 X_3 - b^2 X_3 - c^2 X_3 \\ & - a^2 Y_2 + b^2 Y_2 - c^2 Y_2 + a^2 Y_3 - b^2 Y_3 + c^2 Y_3 \end{aligned}$$

ce qui décrit complètement les coordonnées barycentriques de M .

On obtient alors:

$$\begin{aligned} MM_1^2 = & (a + b - c) (a - b + c) (-a + b + c) (a + b + c) (b^2 X_2^2 - 2b^2 X_2 X_3 + b^2 X_3^2 + a^2 X_2 Y_2 \\ & + b^2 X_2 Y_2 - c^2 X_2 Y_2 - a^2 X_3 Y_2 - b^2 X_3 Y_2 + c^2 X_3 Y_2 + a^2 Y_2^2 - a^2 X_2 Y_3 - b^2 X_2 Y_3 \\ & + c^2 X_2 Y_3 + a^2 X_3 Y_3 + b^2 X_3 Y_3 - c^2 X_3 Y_3 - 2a^2 Y_2 Y_3 + a^2 Y_3^2) \end{aligned}$$

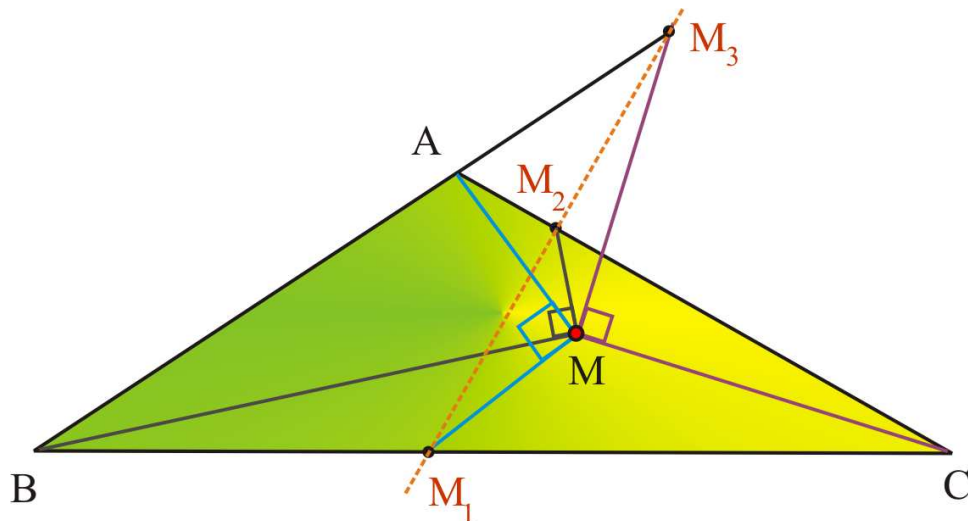
$$\begin{aligned} M_2M_3^2 = & (b^2 X_2^2 - 2b^2 X_2 X_3 + b^2 X_3^2 + a^2 X_2 Y_2 + b^2 X_2 Y_2 - c^2 X_2 Y_2 - a^2 X_3 Y_2 - b^2 X_3 Y_2 \\ & + c^2 X_3 Y_2 + a^2 Y_2^2 - a^2 X_2 Y_3 - b^2 X_2 Y_3 + c^2 X_2 Y_3 + a^2 X_3 Y_3 + b^2 X_3 Y_3 - c^2 X_3 Y_3 \\ & - 2a^2 Y_2 Y_3 + a^2 Y_3^2) \end{aligned}$$

donc $MM_1^2 = (a + b - c) (a - b + c) (-a + b + c) (a + b + c) M_2M_3^2$.

5.2 Illustration par des exemples

Exercice 5.2.1

Soit ABC un triangle et M un point du plan. La perpendiculaire à la droite (MA) (resp. (MB) , (MC)) passant par M coupe le côté (BC) (resp. (CA) , (AB)) en M_1 (resp. en M_2, M_3).
Montrer que les points M_1, M_2, M_3 sont alignés.



$M_1 M_2 M_3$ alignés ?

Solution:

Dessin = $\{A, B, C, M\}$

Les points purs choisis sont A, B, C .

Les points composés sont M .

Les coordonnées barycentriques du point composé M sont $\{X, Y, 1 - X - Y\}$.

Dessin = $\text{Dessin} \cup \{P_1, P_2, P_3\} = \{A, B, C, M, P_1, P_2, P_3\}$

Un point P_1 situé sur la perpendiculaire à (AM) passant par M est

$$\begin{aligned}
 P_1 = & \{a^2 + b^2 - c^2 + X - a^2 X - b^2 X + c^2 X - 2a^2 Y, \\
 & -2b^2 + 2b^2 X + Y + a^2 Y + b^2 Y - c^2 Y, \\
 & 1 - a^2 + b^2 + c^2 - X + a^2 X - b^2 X - c^2 X - Y + a^2 Y - b^2 Y + c^2 Y\}
 \end{aligned}$$

Un point P_2 situé sur la perpendiculaire à (BM) passant par M est

$$P_2 = \{2a^2 + X - a^2 X - b^2 X + c^2 X - 2a^2 Y, \\ -a^2 - b^2 + c^2 + 2b^2 X + Y + a^2 Y + b^2 Y - c^2 Y, \\ 1 - a^2 + b^2 - c^2 - X + a^2 X - b^2 X - c^2 X - Y + a^2 Y - b^2 Y + c^2 Y\}$$

Un point P_3 situé sur la perpendiculaire à (CM) passant par M est

$$P_3 = \{X - a^2 X - b^2 X + c^2 X - 2a^2 Y, \\ 2b^2 X + Y + a^2 Y + b^2 Y - c^2 Y, \\ 1 - X + a^2 X - b^2 X - c^2 X - Y + a^2 Y - b^2 Y + c^2 Y\}$$

Détermination du point M_1 :

Soit M_1 le point $(BC) \cap (MP_1)$. Le point M_1 est composé.

Comme $M_1 \in (BC)$, on a, en choisissant les inconnues ν_1

$$\overrightarrow{OM_1} = \nu_1 \overrightarrow{OB} + (1 - \nu_1) \overrightarrow{OC}$$

Comme $M_1 \in (MP_1)$, on a, en choisissant les inconnues μ_1

$$\overrightarrow{OM_1} = \mu_1 \overrightarrow{OM} + (1 - \mu_1) \overrightarrow{OP_1}$$

On déduit:

$$\overrightarrow{OM_1} = b(1) \overrightarrow{OA} + b(2) \overrightarrow{OB} + b(3) \overrightarrow{OC}$$

avec

$$b(1) = a^2 + b^2 - c^2 - a^2 \mu_1 - b^2 \mu_1 + c^2 \mu_1 + X - a^2 X - b^2 X + c^2 X + a^2 \mu_1 X + b^2 \mu_1 X - c^2 \mu_1 X - 2a^2 Y + 2a^2 \mu_1 Y$$

$$b(2) = -2b^2 + 2b^2 \mu_1 + 2b^2 X - 2b^2 \mu_1 X + Y + a^2 Y + b^2 Y - c^2 Y - a^2 \mu_1 Y - b^2 \mu_1 Y + c^2 \mu_1 Y$$

$$b(3) = 1 - a^2 + b^2 + c^2 + a^2 \mu_1 - b^2 \mu_1 - c^2 \mu_1 - X + a^2 X - b^2 X - c^2 X - a^2 \mu_1 X + b^2 \mu_1 X + \\ c^2 \mu_1 X - Y + a^2 Y - b^2 Y + c^2 Y - a^2 \mu_1 Y + b^2 \mu_1 Y - c^2 \mu_1 Y$$

La résolution du système linéaire d'inconnues ν_1, μ_1 donne

$$\nu_1 = \frac{-2b^2 X + 2b^2 X^2 - a^2 Y - b^2 Y + c^2 Y + 2a^2 XY + 2b^2 XY - 2c^2 XY + 2a^2 Y^2}{-a^2 - b^2 + c^2 + a^2 X + b^2 X - c^2 X + 2a^2 Y}$$

$$\mu_1 = \frac{-a^2 - b^2 + c^2 - X + a^2 X + b^2 X - c^2 X + 2a^2 Y}{-a^2 - b^2 + c^2 + a^2 X + b^2 X - c^2 X + 2a^2 Y}$$

On déduit que:

$$M_1 = \left\{0, \frac{-2b^2 X + 2b^2 X^2 - a^2 Y - b^2 Y + c^2 Y + 2a^2 XY + 2b^2 XY - 2c^2 XY + 2a^2 Y^2}{-a^2 - b^2 + c^2 + a^2 X + b^2 X - c^2 X + 2a^2 Y}, \right. \\ \left. \frac{NumZ(M_1)}{-a^2 - b^2 + c^2 + a^2 X + b^2 X - c^2 X + 2a^2 Y} \right\}$$

avec

$$NumZ(M_1) = -a^2 - b^2 + c^2 + a^2 X + 3b^2 X - c^2 X - 2b^2 X^2 + 3a^2 Y + b^2 Y - c^2 Y \\ - 2a^2 XY - 2b^2 XY + 2c^2 XY - 2a^2 Y^2$$

Dessin = Dessin $\cup \{M_2\} = \{A, B, C, M, M_1, M_2, P_1, P_2, P_3\}$

Détermination du point M_2 :

Soit M_2 le point $(CA) \cap (MP_2)$. Le point M_2 est composé.

Comme $M_2 \in (CA)$, on a, en choisissant les inconnues ν_1

$$\overrightarrow{OM_2} = (1 - \nu_1) \overrightarrow{OA} + \nu_1 \overrightarrow{OC}$$

Comme $M_2 \in (MP_2)$, on a, en choisissant les inconnues μ_1

$$\overrightarrow{OM_2} = \mu_1 \overrightarrow{OM} + (1 - \mu_1) \overrightarrow{OP_2}$$

On déduit:

$$\overrightarrow{OM_2} = d(1) \overrightarrow{OA} + d(2) \overrightarrow{OB} + d(3) \overrightarrow{OC}$$

avec

$$d(1) = 2a^2 - 2a^2\mu_1 + X - a^2X - b^2X + c^2X + a^2\mu_1X + b^2\mu_1X - c^2\mu_1X - 2a^2Y + 2a^2\mu_1Y$$

$$d(2) = -a^2 - b^2 + c^2 + a^2\mu_1 + b^2\mu_1 - c^2\mu_1 + 2b^2X - 2b^2\mu_1X + Y + a^2Y + b^2Y - c^2Y -$$

$$a^2\mu_1Y - b^2\mu_1Y + c^2\mu_1Y$$

$$d(3) = 1 - a^2 + b^2 - c^2 + a^2\mu_1 - b^2\mu_1 + c^2\mu_1 - X + a^2X - b^2X - c^2X - a^2\mu_1X + b^2\mu_1X + c^2\mu_1X - Y +$$

$$a^2Y - b^2Y + c^2Y - a^2\mu_1Y + b^2\mu_1Y - c^2\mu_1Y$$

La résolution du système linéaire d'inconnues ν_1, μ_1 donne

$$\nu_1 = \frac{b^2(1 - 2X)(-1 + X + Y) + a^2(-1 + X + Y)(1 - 2Y) - c^2(-1 + X + Y - 2XY)}{a^2(-1 + Y) - c^2(-1 + Y) + b^2(-1 + 2X + Y)}$$

$$\mu_1 = \frac{-a^2 - b^2 + c^2 + 2b^2X + Y + a^2Y + b^2Y - c^2Y}{-a^2 - b^2 + c^2 + 2b^2X + a^2Y + b^2Y - c^2Y}$$

On déduit que:

$$M_2 = \left\{ \frac{-a^2X - b^2X + c^2X + 2b^2X^2 - 2a^2Y + 2a^2XY + 2b^2XY - 2c^2XY + 2a^2Y^2}{-a^2 - b^2 + c^2 + 2b^2X + a^2Y + b^2Y - c^2Y}, 0, \right.$$

$$\left. \frac{NumZ(M_2)}{a^2 + b^2 - c^2 - 2b^2X - a^2Y - b^2Y + c^2Y} \right\}$$

avec

$$NumZ(M_2) = a^2 + b^2 - c^2 - a^2X - 3b^2X + c^2X + 2b^2X^2 - 3a^2Y - b^2Y + c^2Y$$

$$+ 2a^2XY + 2b^2XY - 2c^2XY + 2a^2Y^2$$

Dessin = Dessin $\cup \{M_3\} = \{A, B, C, M, M_1, M_2, M_3, P_1, P_2, P_3\}$

Détermination du point M_3 :

Soit M_3 le point $(AB) \cap (MP_3)$. Le point M_3 est composé.

Comme $M_3 \in (AB)$, on a, en choisissant les inconnues ν_1

$$\overrightarrow{OM_3} = \nu_1 \overrightarrow{OA} + (1 - \nu_1) \overrightarrow{OB}$$

Comme $M_3 \in (MP_3)$, on a, en choisissant les inconnues μ_1

$$\overrightarrow{OM_3} = \mu_1 \overrightarrow{OM} + (1 - \mu_1) \overrightarrow{OP_3}$$

On déduit:

$$\overrightarrow{OM_3} = f(1) \overrightarrow{OA} + f(2) \overrightarrow{OB} + f(3) \overrightarrow{OC}$$

avec

$$\begin{aligned} f(1) &= X - a^2 X - b^2 X + c^2 X + a^2 \mu_1 X + b^2 \mu_1 X - c^2 \mu_1 X - 2a^2 Y + 2a^2 \mu_1 Y \\ f(2) &= 2b^2 X - 2b^2 \mu_1 X + Y + a^2 Y + b^2 Y - c^2 Y - a^2 \mu_1 Y - b^2 \mu_1 Y + c^2 \mu_1 Y \\ f(3) &= 1 - X + a^2 X - b^2 X - c^2 X - a^2 \mu_1 X + b^2 \mu_1 X + c^2 \mu_1 X - Y + a^2 Y - b^2 Y + c^2 Y \\ &\quad - a^2 \mu_1 Y + b^2 \mu_1 Y - c^2 \mu_1 Y \end{aligned}$$

La résolution du système linéaire d'inconnues ν_1, μ_1 donne

$$\begin{aligned} \nu_1 &= \frac{a^2 X + b^2 X - c^2 X - 2b^2 X^2 + 2a^2 Y - 2a^2 XY - 2b^2 XY + 2c^2 XY - 2a^2 Y^2}{a^2 X - b^2 X - c^2 X + a^2 Y - b^2 Y + c^2 Y} \\ \mu_1 &= \frac{1 - X + a^2 X - b^2 X - c^2 X - Y + a^2 Y - b^2 Y + c^2 Y}{a^2 X - b^2 X - c^2 X + a^2 Y - b^2 Y + c^2 Y} \end{aligned}$$

On déduit que:

$$M_3 = \left\{ \frac{a^2 X + b^2 X - c^2 X - 2b^2 X^2 + 2a^2 Y - 2a^2 XY - 2b^2 XY + 2c^2 XY - 2a^2 Y^2}{a^2 X - b^2 X - c^2 X + a^2 Y - b^2 Y + c^2 Y}, \frac{2b^2 X - 2b^2 X^2 + a^2 Y + b^2 Y - c^2 Y - 2a^2 XY - 2b^2 XY + 2c^2 XY - 2a^2 Y^2}{-(a^2 X) + b^2 X + c^2 X - a^2 Y + b^2 Y - c^2 Y}, 0 \right\}$$

Calculons le vecteur $\overrightarrow{M_1 M_2}$. On a:

$$\overrightarrow{M_1 M_2} = g(1) \overrightarrow{OA} + g(2) \overrightarrow{OB} + g(3) \overrightarrow{OC}$$

avec

$$\begin{aligned} g(1) &= \frac{-a^2 X - b^2 X + c^2 X + 2b^2 X^2 - 2a^2 Y + 2a^2 XY + 2b^2 XY - 2c^2 XY + 2a^2 Y^2}{-a^2 - b^2 + c^2 + 2b^2 X + a^2 Y + b^2 Y - c^2 Y} \\ g(2) &= \frac{2b^2 X - 2b^2 X^2 + a^2 Y + b^2 Y - c^2 Y - 2a^2 XY - 2b^2 XY + 2c^2 XY - 2a^2 Y^2}{-a^2 - b^2 + c^2 + a^2 X + b^2 X - c^2 X + 2a^2 Y} \\ g(3) &= \frac{(a^2 X - b^2 X - c^2 X + a^2 Y - b^2 Y + c^2 Y) g^*(3)}{(-a^2 - b^2 + c^2 + a^2 X + b^2 X - c^2 X + 2a^2 Y) (-a^2 - b^2 + c^2 + 2b^2 X + a^2 Y + b^2 Y - c^2 Y)} \end{aligned}$$

avec

$$g^*(3) = a^2 + b^2 - c^2 - a^2 X - 3b^2 X + c^2 X + 2b^2 X^2 - 3a^2 Y - b^2 Y + c^2 Y + 2a^2 XY + 2b^2 XY - 2c^2 XY + 2a^2 Y^2$$

Calculons le vecteur $\overrightarrow{M_1 M_3}$. On a:

$$\overrightarrow{M_1 M_3} = h(1) \overrightarrow{OA} + h(2) \overrightarrow{OB} + h(3) \overrightarrow{OC}$$

avec

$$h(1) = \frac{a^2 X + b^2 X - c^2 X - 2b^2 X^2 + 2a^2 Y - 2a^2 XY - 2b^2 XY + 2c^2 XY - 2a^2 Y^2}{a^2 X - b^2 X - c^2 X + a^2 Y - b^2 Y + c^2 Y}$$

$$h(2) = \frac{-a^2 - b^2 + c^2 + 2b^2 X + a^2 Y + b^2 Y - c^2 Y}{-a^2 - b^2 + c^2 + a^2 X + b^2 X - c^2 X + 2a^2 Y} h^*(2)$$

$$h(3) = \frac{Num(h(3))}{-a^2 - b^2 + c^2 + a^2 X + b^2 X - c^2 X + 2a^2 Y}$$

avec

$$Num(h(3)) = a^2 + b^2 - c^2 - a^2 X - 3b^2 X + c^2 X + 2b^2 X^2 - 3a^2 Y - b^2 Y + c^2 Y + 2a^2 XY + 2b^2 XY - 2c^2 XY + 2a^2 Y^2$$

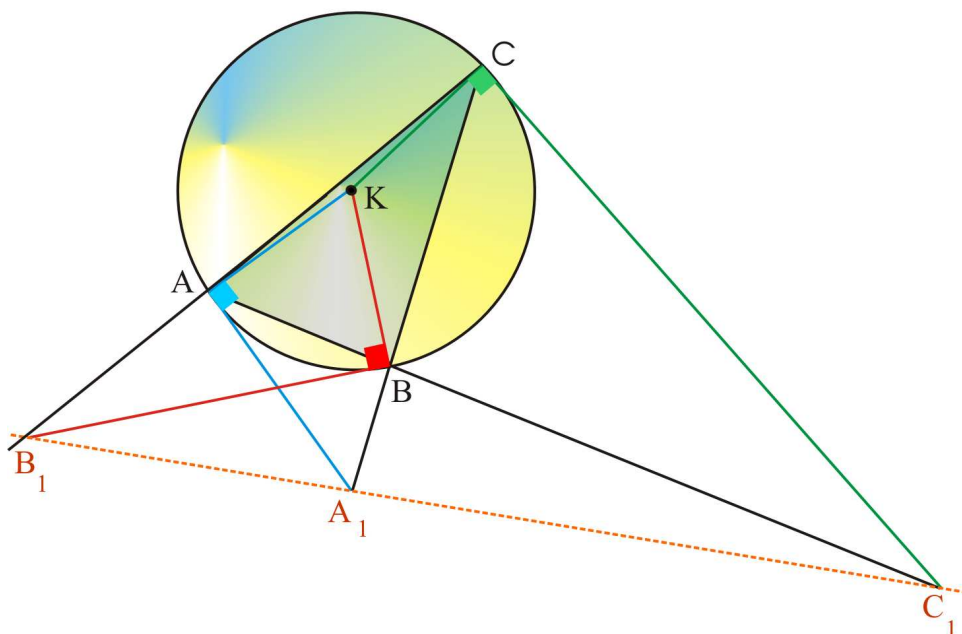
$$h^*(2) = \frac{(-2b^2 X + 2b^2 X^2 - a^2 Y - b^2 Y + c^2 Y + 2a^2 XY + 2b^2 XY - 2c^2 XY + 2a^2 Y^2)}{(a^2 X - b^2 X - c^2 X + a^2 Y - b^2 Y + c^2 Y)}$$

On a ainsi

$$\overrightarrow{M_1 M_2} = \frac{a^2 X - b^2 X - c^2 X + a^2 Y - b^2 Y + c^2 Y}{a^2 + b^2 - c^2 - 2b^2 X - a^2 Y - b^2 Y + c^2 Y} \overrightarrow{M_1 M_3}$$

Exercice 5.2.2

Soit un triangle ABC inscrit dans un cercle de centre K . Les tangentes à ce cercle aux sommets A, B, C coupent les côtés opposés en des points A_1, B_1, C_1 . Montrer que les points A_1, B_1, C_1 sont alignés.



Solution:

Dessin = {A, B, C, P₁, P₂, P₃}

Les points purs choisis sont A, B, C .

Un point P_1 situé sur la perpendiculaire à (AK) passant par A est

$$P_1 = \{1 + b^2 - c^2, -b^2, c^2\}$$

Un point P_2 situé sur la perpendiculaire à (BK) passant par B est

$$P_2 = \{a^2, 1 - a^2 + c^2, -c^2\}$$

Un point P_3 situé sur la perpendiculaire à (CK) passant par C est

$$P_3 = \{-a^2, b^2, 1 + a^2 - b^2\}$$

Dessin = Dessin $\cup \{A_1\} = \{A, A_1, B, C, P_1, P_2, P_3\}$

Détermination du point A_1 :

Soit A_1 le point $(AP_1) \cap (BC)$. Le point A_1 est composé.

Comme $A_1 \in (AP_1)$, on a, en choisissant les inconnues ν_1

$$\overrightarrow{OA_1} = \nu_1 \overrightarrow{OA} + (1 - \nu_1) \overrightarrow{OP_1}$$

On déduit:

$$\overrightarrow{OA_1} = a(1) \overrightarrow{OA} + a(2) \overrightarrow{OB} + a(3) \overrightarrow{OC}$$

avec

$$a(1) = 1 + b^2 - c^2 - b^2 \nu_1 + c^2 \nu_1$$

$$a(2) = b^2 (-1 + \nu_1)$$

$$a(3) = c^2 (1 - \nu_1)$$

Comme $A_1 \in (BC)$, on a, en choisissant les inconnues μ_1

$$\overrightarrow{OA_1} = \mu_1 \overrightarrow{OB} + (1 - \mu_1) \overrightarrow{OC}$$

La résolution du système linéaire d'inconnues ν_1, μ_1 donne

$$\mu_1 = \frac{b^2}{b^2 - c^2} \quad \nu_1 = \frac{1 + b^2 - c^2}{b^2 - c^2}$$

On déduit que:

$$A_1 = \left\{0, \frac{b^2}{(b-c)(b+c)}, \frac{c^2}{(-b+c)(b+c)}\right\}$$

Dessin = Dessin $\cup \{B_1\} = \{A, A_1, B, B_1, C, P_1, P_2, P_3\}$

Détermination du point B_1 :

Soit B_1 le point $(BP_2) \cap (AC)$. Le point B_1 est composé.

Comme $B_1 \in (BP_2)$, on a, en choisissant les inconnues ν_1

$$\overrightarrow{OB_1} = \nu_1 \overrightarrow{OB} + (1 - \nu_1) \overrightarrow{OP_2}$$

On déduit:

$$\overrightarrow{OB_1} = c(1) \overrightarrow{OA} + c(2) \overrightarrow{OB} + c(3) \overrightarrow{OC}$$

avec

$$\begin{aligned}c(1) &= a^2 (1 - \nu_1) \\c(2) &= 1 - a^2 + c^2 + a^2 \nu_1 - c^2 \nu_1 \\c(3) &= c^2 (-1 + \nu_1)\end{aligned}$$

Comme $B_1 \in (AC)$, on a, en choisissant les inconnues μ_1

$$\overrightarrow{OB_1} = \mu_1 \overrightarrow{OA} + (1 - \mu_1) \overrightarrow{OC}$$

La résolution du système linéaire d'inconnues ν_1, μ_1 donne

$$\mu_1 = \frac{a^2}{a^2 - c^2} \quad \nu_1 = \frac{1 - a^2 + c^2}{-a^2 + c^2}$$

On déduit que:

$$B_1 = \left\{ \frac{a^2}{(a-c)(a+c)}, 0, \frac{c^2}{(-a+c)(a+c)} \right\}$$

Dessin = Dessin $\cup \{C_1\} = \{A, A_1, B, B_1, C, C_1, P_1, P_2, P_3\}$

Détermination du point C_1 :

Soit C_1 le point $(CP_3) \cap (AB)$. Le point C_1 est composé.

Comme $C_1 \in (CP_3)$, on a, en choisissant les inconnues ν_1

$$\overrightarrow{OC_1} = \nu_1 \overrightarrow{OC} + (1 - \nu_1) \overrightarrow{OP_3}$$

On déduit:

$$\overrightarrow{OC_1} = e(1) \overrightarrow{OA} + e(2) \overrightarrow{OB} + e(3) \overrightarrow{OC}$$

avec

$$\begin{aligned}e(1) &= a^2 (-1 + \nu_1) \\e(2) &= b^2 (1 - \nu_1) \\e(3) &= 1 + a^2 - b^2 - a^2 \nu_1 + b^2 \nu_1\end{aligned}$$

Comme $C_1 \in (AB)$, on a, en choisissant les inconnues μ_1

$$\overrightarrow{OC_1} = \mu_1 \overrightarrow{OA} + (1 - \mu_1) \overrightarrow{OB}$$

La résolution du système linéaire d'inconnues ν_1, μ_1 donne

$$\mu_1 = \frac{a^2}{a^2 - b^2} \quad \nu_1 = \frac{1 + a^2 - b^2}{a^2 - b^2}$$

On déduit que:

$$C_1 = \left\{ \frac{a^2}{(a-b)(a+b)}, \frac{b^2}{(-a+b)(a+b)}, 0 \right\}$$

Calculons le vecteur $\overrightarrow{A_1B_1}$. On a:

$$\overrightarrow{A_1B_1} = g(1) \overrightarrow{OA} + g(2) \overrightarrow{OB} + g(3) \overrightarrow{OC}$$

avec

$$\begin{aligned} g(1) &= \frac{a^2}{(a-c)(a+c)} \\ g(2) &= \frac{b^2}{(-b+c)(b+c)} \\ g(3) &= \frac{(a-b)(a+b)c^2}{(a-c)(a+c)(b-c)(b+c)} \end{aligned}$$

Calculons le vecteur $\overrightarrow{A_1C_1}$. On a:

$$\overrightarrow{A_1C_1} = h(1) \overrightarrow{OA} + h(2) \overrightarrow{OB} + h(3) \overrightarrow{OC}$$

avec

$$\begin{aligned} h(1) &= \frac{a^2}{(a-b)(a+b)} \\ h(2) &= \frac{-b^2(a-c)(a+c)}{(a-b)(a+b)(b-c)(b+c)} \\ h(3) &= \frac{c^2}{(b-c)(b+c)} \end{aligned}$$

On a ainsi

$$\overrightarrow{A_1B_1} = \frac{a^2 - b^2}{a^2 - c^2} \overrightarrow{A_1C_1}$$

5.3 Le théorème des trois cercles de Monge et d'Alembert

Exercice 5.3.1 les trois cercles de Monge et d'Alembert

Soient trois cercles $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$ disjoints deux à deux, de centres A, B, C et de rayons respectifs R_1, R_2, R_3 . Les tangentes extérieures communes à deux cercles se coupent en J_1 pour Γ_1 et Γ_2 , en J_2 pour Γ_1 et Γ_3 , en J_3 pour Γ_2 et Γ_3 . Les tangentes intérieures communes à deux cercles se coupent en K_1 pour Γ_1 et Γ_2 , en K_2 pour Γ_1 et Γ_3 , en K_3 pour Γ_2 et Γ_3 .

1. Montrer que les points J_1, J_2, J_3 appartiennent à une même droite Δ .
2. Montrer que la droite passant par deux des points K_i, K_j avec $i \neq j$ coupe la droite Δ au point K_k avec $k \neq i, k \neq j$.

Solution:

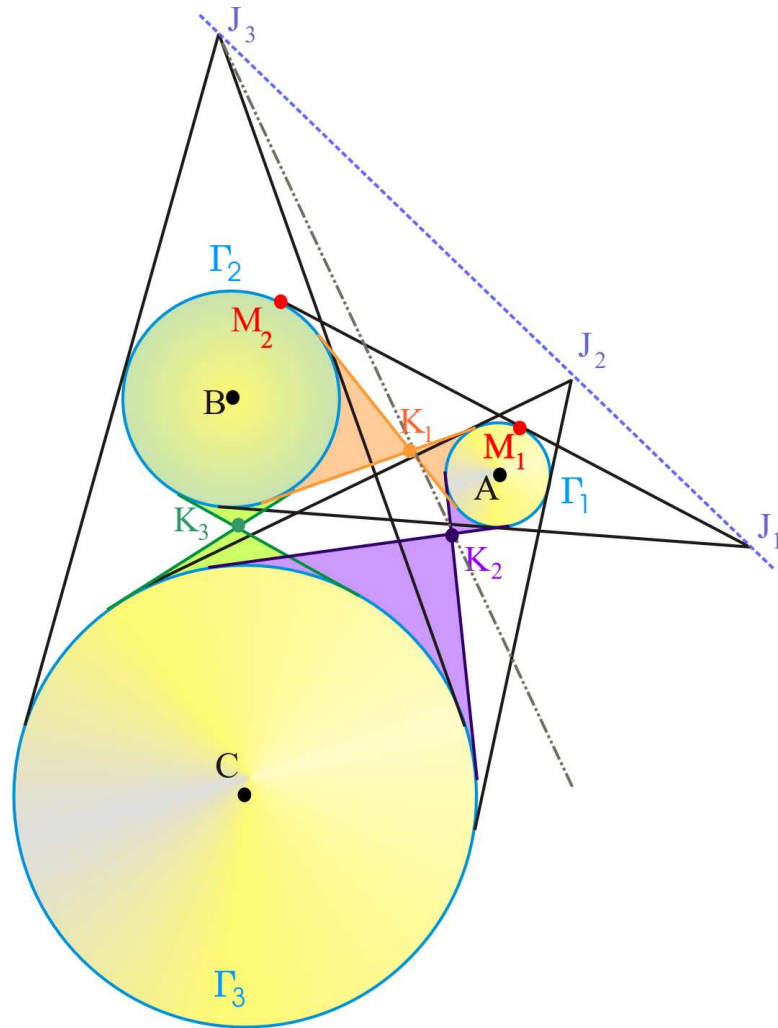
On suppose $R_1 \leq R_2 \leq R_3$ quitte à changer l'ordre des notations.

Dessin = $\{A, B, C, J_1, J_2, J_3\}$

1). L'application du théorème de Thalès permet de déterminer directement les équations vectorielles. En effet, en désignant par $M_1 \in \Gamma_1$ et $M_2 \in \Gamma_2$ les points de contact de l'une des tangentes extérieures aux cercles Γ_1 et Γ_2 , on a

$$\frac{J_1M_1}{J_1M_2} = \frac{J_1A}{J_1B} = \frac{AM_1}{BM_2} = \frac{R_1}{R_2}$$

donc $\overrightarrow{J_1 A} = \frac{R_1}{R_2} \overrightarrow{J_1 B}$.



On a ainsi les équations vectorielles

$$\vec{0} = \overrightarrow{J_1 A} - \frac{R_1}{R_2} \overrightarrow{J_1 B}$$

$$\vec{0} = \overrightarrow{J_2 A} - \frac{R_1}{R_3} \overrightarrow{J_2 C}$$

$$\vec{0} = \overrightarrow{J_3 B} - \frac{R_2}{R_3} \overrightarrow{J_3 C}$$

et, par découpages automatiques, le système linéaire

$$\vec{0} = \overrightarrow{OA} - \frac{R_1}{R_2} \overrightarrow{OB} + \frac{(R_1 - R_2)}{R_2} \overrightarrow{OJ_1}$$

$$\vec{0} = \overrightarrow{OA} - \frac{R_1}{R_3} \overrightarrow{OC} + \frac{(R_1 - R_3)}{R_3} \overrightarrow{OJ_2}$$

$$\vec{0} = \overrightarrow{OB} - \frac{R_2}{R_3} \overrightarrow{OC} + \frac{(R_2 - R_3)}{R_3} \overrightarrow{OJ_3}$$

Les points purs choisis sont A, B, C .

Les points composés sont J_1, J_2, J_3 .

On déduit les coordonnées barycentriques des points composés:

$$J_1 = \left\{ \frac{-R_2}{R_1 - R_2}, \frac{R_1}{R_1 - R_2}, 0 \right\}$$

$$J_2 = \left\{ \frac{-R_3}{R_1 - R_3}, 0, \frac{R_1}{R_1 - R_3} \right\}$$

$$J_3 = \left\{ 0, \frac{-R_3}{R_2 - R_3}, \frac{R_2}{R_2 - R_3} \right\}$$

Calculons le vecteur $\overrightarrow{J_1 J_2}$. On a:

$$\overrightarrow{J_1 J_2} = a(1) \overrightarrow{OA} + a(2) \overrightarrow{OB} + a(3) \overrightarrow{OC}$$

avec

$$a(1) = \frac{R_1 (R_2 - R_3)}{(R_1 - R_2) (R_1 - R_3)}$$

$$a(2) = \frac{-R_1}{R_1 - R_2}$$

$$a(3) = \frac{R_1}{R_1 - R_3}$$

Calculons le vecteur $\overrightarrow{J_1 J_3}$. On a:

$$\overrightarrow{J_1 J_3} = b(1) \overrightarrow{OA} + b(2) \overrightarrow{OB} + b(3) \overrightarrow{OC}$$

avec

$$b(1) = \frac{R_2}{R_1 - R_2}$$

$$b(2) = \frac{R_2 (R_3 - R_1)}{(R_1 - R_2) (R_2 - R_3)}$$

$$b(3) = \frac{R_2}{R_2 - R_3}$$

On a ainsi

$$\overrightarrow{J_1 J_2} = \frac{R_1 (R_2 - R_3)}{R_2 (R_1 - R_3)} \overrightarrow{J_1 J_3}$$

Dessin = Dessin $\cup \{K_1, K_2, K_3\} = \{A, B, C, J_1, J_2, J_3, K_1, K_2, K_3\}$

2). L'application du théorème de Thalès aux tangentes intérieures détermine les équations vectorielles

$$\vec{0} = \overrightarrow{K_1 A} + \frac{R_1}{R_2} \overrightarrow{K_1 B}$$

$$\vec{0} = \overrightarrow{K_2 A} + \frac{R_1}{R_3} \overrightarrow{K_2 C}$$

$$\vec{0} = \overrightarrow{K_3 B} + \frac{R_2}{R_3} \overrightarrow{K_3 C}$$

et, par découpages automatiques, le système linéaire

$$\begin{aligned}\vec{0} &= \vec{OA} + \frac{R_1}{R_2} \vec{OB} - \frac{(R_1 + R_2)}{R_2} \vec{OK}_1 \\ \vec{0} &= \vec{OA} + \frac{R_1}{R_3} \vec{OC} - \frac{(R_1 + R_3)}{R_3} \vec{OK}_2 \\ \vec{0} &= \vec{OB} + \frac{R_2}{R_3} \vec{OC} - \frac{(R_2 + R_3)}{R_3} \vec{OK}_3\end{aligned}$$

Les points purs choisis sont A, B, C .

Les points composés sont K_1, K_2, K_3 .

On déduit les coordonnées barycentriques des points composés:

$$\begin{aligned}K_1 &= \left\{ \frac{R_2}{R_1 + R_2}, \frac{R_1}{R_1 + R_2}, 0 \right\} \\ K_2 &= \left\{ \frac{R_3}{R_1 + R_3}, 0, \frac{R_1}{R_1 + R_3} \right\} \\ K_3 &= \left\{ 0, \frac{R_3}{R_2 + R_3}, \frac{R_2}{R_2 + R_3} \right\}\end{aligned}$$

Dessin = Dessin $\cup \{P\} = \{A, B, C, J_1, J_2, J_3, K_1, K_2, K_3, P\}$

Détermination du point P :

Soit P le point $(J_1 J_2) \cap (K_1 K_2)$. Le point P est composé.

Comme $P \in (J_1 J_2)$, on a, en choisissant les inconnues ν_1

$$\vec{OP} = \nu_1 \vec{OJ}_1 + (1 - \nu_1) \vec{OJ}_2$$

On déduit:

$$\vec{OP} = c(1) \vec{OA} + c(2) \vec{OB} + c(3) \vec{OC}$$

avec

$$\begin{aligned}c(1) &= \frac{\nu_1 R_1 R_2 + R_1 R_3 - \nu_1 R_1 R_3 - R_2 R_3}{(R_1 - R_2)(R_3 - R_1)} \\ c(2) &= \frac{\nu_1 R_1}{R_1 - R_2} \\ c(3) &= \frac{(1 - \nu_1) R_1}{R_1 - R_3}\end{aligned}$$

Comme $P \in (K_1 K_2)$, on a, en choisissant les inconnues μ_1

$$\vec{OP} = \mu_1 \vec{OK}_1 + (1 - \mu_1) \vec{OK}_2$$

On déduit:

$$\vec{OP} = d(1) \vec{OA} + d(2) \vec{OB} + d(3) \vec{OC}$$

avec

$$d(1) = \frac{\mu_1 R_1 R_2 + R_1 R_3 - \mu_1 R_1 R_3 + R_2 R_3}{(R_1 + R_2)(R_1 + R_3)}$$

$$d(2) = \frac{\mu_1 R_1}{R_1 + R_2}$$

$$d(3) = \frac{(1 - \mu_1) R_1}{R_1 + R_3}$$

La résolution du système linéaire d'inconnues ν_1, μ_1 donne

$$\nu_1 = \frac{(-R_1 + R_2) R_3}{R_1 (R_2 - R_3)} \quad \mu_1 = \frac{(R_1 + R_2) R_3}{R_1 (R_3 - R_2)}$$

On déduit que:

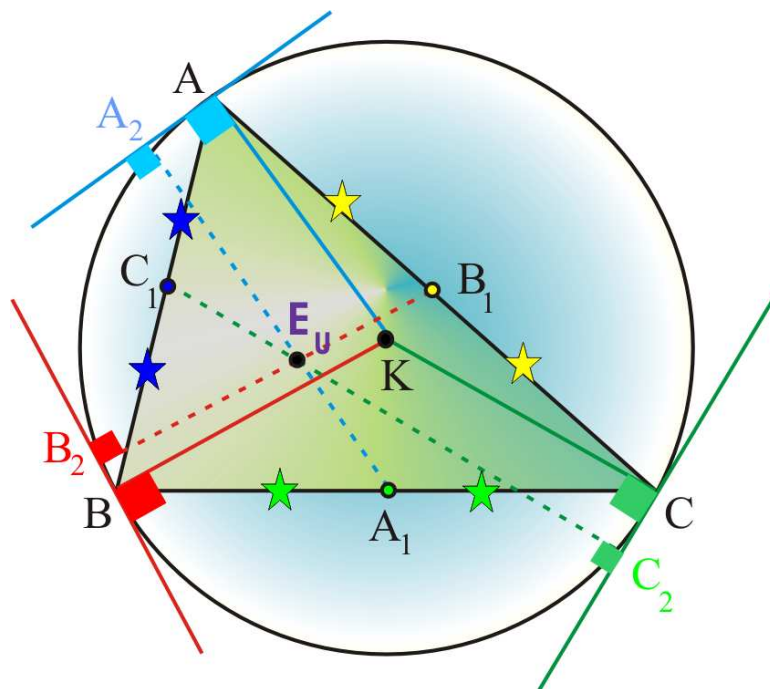
$$P = \left\{0, \frac{R_3}{-R_2 + R_3}, \frac{R_2}{R_2 - R_3}\right\}$$

Le point $P = (J_1 J_2) \cap (K_1 K_2)$ est donc le point J_3 . Les intersections avec les autres couples de droites se résument à un calcul analogue.

5.4 Un théorème de Cantor

Exercice 5.4.1

Soient ABC un triangle, A_1, B_1, C_1 les milieux respectifs des segments $[BC], [AC], [AB]$, Γ le cercle circonscrit au triangle ABC de centre K . Soient A_2 (resp. B_2, C_2) la projection orthogonale du point A_1 (resp. B_1, C_1) sur la tangente au cercle Γ issue de A (resp. issue de B, C respectivement). Montrer que les droites $(A_1 A_2), (B_1 B_2), (C_1 C_2)$ sont concourantes en un même point qui est le centre du cercle des neuf points d'Euler du triangle ABC .



Solution:

Dessin = $\{A, A_0, A_1, B, B_0, B_1, C, C_0, C_1, K\}$

Le repère barycentrique choisi est A, B, C .

Les points composés sont $K, A_1, B_1, C_1, A_0, B_0, C_0$.

Les coordonnées barycentriques des points composés (autres que K) sont:

$$A_1 = \{0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\}$$

$$B_1 = \{\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}\}$$

$$C_1 = \{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\}$$

Un point A_0 situé sur la perpendiculaire à (AK) passant par A est

$$A_0 = \{1 + b^2 - c^2, -b^2, c^2\}$$

Un point B_0 situé sur la perpendiculaire à (BK) passant par B est

$$B_0 = \{a^2, 1 - a^2 + c^2, -c^2\}$$

Un point C_0 situé sur la perpendiculaire à (CK) passant par C est

$$C_0 = \{-a^2, b^2, 1 + a^2 - b^2\}$$

Dessin = $\text{Dessin} \cup \{A_2, B_2, C_2\} = \{A, A_0, A_1, A_2, B, B_0, B_1, B_2, C, C_0, C_1, C_2, K\}$

Le repère barycentrique choisi est A, B, C .

Les points composés sont A_2, B_2, C_2 .

La projection du point A_1 sur la droite (AA_0) est le point A_2 de coordonnées barycentriques

$$A_2 = \left\{ \frac{(b^2 + c^2) (a^2 b^2 - b^4 + a^2 c^2 + 2 b^2 c^2 - c^4)}{4 a^2 b^2 c^2}, \frac{(-b + c) (b + c) (a^2 - b^2 - c^2)}{4 a^2 c^2}, \frac{(b - c) (b + c) (a^2 - b^2 - c^2)}{4 a^2 b^2} \right\}$$

La projection du point B_1 sur la droite (BB_0) est le point B_2 de coordonnées barycentriques

$$B_2 = \left\{ \frac{(a - c) (a + c) (a^2 - b^2 + c^2)}{4 b^2 c^2}, \frac{-((a^2 + c^2) (a^4 - a^2 b^2 - 2 a^2 c^2 - b^2 c^2 + c^4))}{4 a^2 b^2 c^2}, \frac{(-a + c) (a + c) (a^2 - b^2 + c^2)}{4 a^2 b^2} \right\}$$

La projection du point C_1 sur la droite (CC_0) est le point C_2 de coordonnées barycentriques

$$C_2 = \left\{ \frac{(a - b) (a + b) (a^2 + b^2 - c^2)}{4 b^2 c^2}, \frac{(-a + b) (a + b) (a^2 + b^2 - c^2)}{4 a^2 c^2}, \frac{-(a^2 + b^2) (a^4 - 2 a^2 b^2 + b^4 - a^2 c^2 - b^2 c^2)}{4 a^2 b^2 c^2} \right\}$$

Dessin = $\text{Dessin} \cup \{J\} = \{A, A_0, A_1, A_2, B, B_0, B_1, B_2, C, C_0, C_1, C_2, J, K\}$

Détermination du point J :

Soit J le point $(A_1A_2) \cap (B_1B_2)$. Le point J est composé.
Comme $J \in (A_1A_2)$, on a, en choisissant l'inconnue ν_1

$$\overrightarrow{OJ} = \nu_1 \overrightarrow{OA_1} + (1 - \nu_1) \overrightarrow{OA_2}$$

On déduit:

$$\overrightarrow{OJ} = a(1) \overrightarrow{OA} + a(2) \overrightarrow{OB} + a(3) \overrightarrow{OC}$$

avec

$$\begin{aligned} a(1) &= \frac{(b^2 + c^2) (a^2 b^2 - b^4 + a^2 c^2 + 2 b^2 c^2 - c^4) (1 - \nu_1)}{4 a^2 b^2 c^2} \\ a(2) &= \frac{-a^2 b^2 + b^4 + a^2 c^2 - c^4 + a^2 b^2 \nu_1 - b^4 \nu_1 + a^2 c^2 \nu_1 + c^4 \nu_1}{4 a^2 c^2} \\ a(3) &= \frac{a^2 b^2 - b^4 - a^2 c^2 + c^4 + a^2 b^2 \nu_1 + b^4 \nu_1 + a^2 c^2 \nu_1 - c^4 \nu_1}{4 a^2 b^2} \end{aligned}$$

Comme $J \in (B_1B_2)$, on a, en choisissant l'inconnue μ_1

$$\overrightarrow{OJ} = \mu_1 \overrightarrow{OB_1} + (1 - \mu_1) \overrightarrow{OB_2}$$

On déduit:

$$\overrightarrow{OJ} = b(1) \overrightarrow{OA} + b(2) \overrightarrow{OB} + b(3) \overrightarrow{OC}$$

avec

$$\begin{aligned} b(1) &= \frac{a^4 - a^2 b^2 + b^2 c^2 - c^4 - a^4 \mu_1 + a^2 b^2 \mu_1 + b^2 c^2 \mu_1 + c^4 \mu_1}{4 b^2 c^2} \\ b(2) &= \frac{(a^2 + c^2) (a^4 - a^2 b^2 - 2 a^2 c^2 - b^2 c^2 + c^4) (-1 + \mu_1)}{4 a^2 b^2 c^2} \\ b(3) &= \frac{-a^4 + a^2 b^2 - b^2 c^2 + c^4 + a^4 \mu_1 + a^2 b^2 \mu_1 + b^2 c^2 \mu_1 - c^4 \mu_1}{4 a^2 b^2} \end{aligned}$$

La résolution du système linéaire d'inconnues ν_1, μ_1 donne

$$\begin{aligned} \nu_1 &= \frac{a^4 b^2 - 2 a^2 b^4 + b^6 + a^4 c^2 - 2 a^2 b^2 c^2 - b^4 c^2 - 2 a^2 c^4 - b^2 c^4 + c^6}{(-a + b - c) (a + b - c) (-a + b + c) (a + b + c) (b^2 + c^2)} \\ \mu_1 &= \frac{a^6 - 2 a^4 b^2 + a^2 b^4 - a^4 c^2 - 2 a^2 b^2 c^2 + b^4 c^2 - a^2 c^4 - 2 b^2 c^4 + c^6}{(a - b - c) (a + b - c) (a - b + c) (a + b + c) (a^2 + c^2)} \end{aligned}$$

On déduit que:

$$J = \left\{ \frac{-(a^2 b^2 - b^4 + a^2 c^2 + 2 b^2 c^2 - c^4)}{2 (a - b - c) (a + b - c) (a - b + c) (a + b + c)}, \right. \\ \left. \frac{a^4 - a^2 b^2 - 2 a^2 c^2 - b^2 c^2 + c^4}{2 (a - b - c) (a + b - c) (a - b + c) (a + b + c)}, \right. \\ \left. \frac{a^4 - 2 a^2 b^2 + b^4 - a^2 c^2 - b^2 c^2}{2 (a - b - c) (a + b - c) (a - b + c) (a + b + c)} \right\}$$

Ce point est le centre E_u du cercle des neuf points d'Euler.

CHAPITRE

6

Points cocycliques

6 Points cocycliques

6.1 Condition de cocyclicité

Exercice 6.1.1

Déterminer le rayon et les coordonnées barycentriques du centre K du cercle circonscrit à un triangle ABC . Montrer qu'un point $M = \{X, Y, Z\}$ appartient à ce cercle si et seulement si

$$c^2 XY + b^2 XZ + a^2 YZ = 0$$

Solution:

Equation du cercle passant par les points A, B, C :

Le centre $K = \{x, y, 1 - x, y\}$ de ce cercle doit vérifier $KA^2 - KB^2 = 0$ et $KA^2 - KC^2 = 0$, soit

$$\begin{cases} -a^2 + b^2 + (a^2 - b^2 - c^2)x + (a^2 - b^2 + c^2)y = 0 \\ b^2 - 2b^2x + (-a^2 - b^2 + c^2)y = 0 \end{cases}$$

La résolution de ce système linéaire donne

$$x = \frac{a^2 (a^2 - b^2 - c^2)}{(a - b - c)(a + b - c)(a - b + c)(a + b + c)}$$

$$y = \frac{b^2 (-a^2 + b^2 - c^2)}{(-a + b - c)(a + b - c)(-a + b + c)(a + b + c)}$$

Les coordonnées du centre K du cercle circonscrit au triangle ABC sont ainsi

$$K = \left\{ \frac{a^2 (a^2 - b^2 - c^2)}{(a - b - c)(a + b - c)(a - b + c)(a + b + c)}, \frac{b^2 (-a^2 + b^2 - c^2)}{(-a + b - c)(a + b - c)(-a + b + c)(a + b + c)}, \frac{c^2 (a^2 + b^2 - c^2)}{(-a + b + c)(a + b - c)(a - b + c)(a + b + c)} \right\}$$

Le rayon R au carré de ce cercle a pour valeur $R^2 = AK^2$, soit

$$R^2 = \frac{a^2 b^2 c^2}{(-a + b + c)(a + b - c)(a - b + c)(a + b + c)}$$

Un point $M = \{X, Y, Z\}$ appartient à ce cercle si et seulement si sa distance (au carré) au centre est égale à cette valeur, soit

$$0 = c^2 XY + b^2 XZ + a^2 YZ$$

En termes de coordonnées barycentriques non-normalisées, il revient au même d'écrire $M = \{X, Y, -\frac{c^2 XY}{b^2 X + a^2 Y}\}$. Les coordonnées barycentriques deviennent normalisées en les divisant par le total $X + Y - \frac{c^2 XY}{b^2 X + a^2 Y}$, ce qui donne

$$M = \left\{ \frac{X (b^2 X + a^2 Y)}{b^2 X^2 + a^2 XY + b^2 XY - c^2 XY + a^2 Y^2}, \frac{Y (b^2 X + a^2 Y)}{b^2 X^2 + a^2 XY + b^2 XY - c^2 XY + a^2 Y^2}, \frac{-c^2 XY}{b^2 X^2 + a^2 XY + b^2 XY - c^2 XY + a^2 Y^2} \right\}$$

Il est parfois pratique de poser $Y = tX$ afin d'obtenir une expression plus simple dépendant d'un seul paramètre t . On obtient

$$M = \left\{ \frac{b^2 + a^2 t}{b^2 + a^2 t + b^2 t - c^2 t + a^2 t^2}, \frac{t (b^2 + a^2 t)}{b^2 + a^2 t + b^2 t - c^2 t + a^2 t^2}, \frac{-c^2 t}{b^2 + a^2 t + b^2 t - c^2 t + a^2 t^2} \right\}$$

6.2 Autour du théorème de Ptolémée

Exercice 6.2.1 Ptolémée, Viète

Soient A, B, C, D des points cocycliques. Calculer CD^2 , AD^2 , BD^2 .

1. Soit R le point d'intersection des droites (AC) et (BD) . Préciser les coordonnées barycentriques du point R et les quantités

$$RA^2 \quad RB^2 \quad RC^2 \quad RD^2 \quad RA^2 \cdot RC^2$$

2. Même question avec le point M intersection des droites (AB) et (CD) .
3. Même question avec le point N intersection des droites (AD) et (BC) .
4. En déduire l'égalité de Ptolémée

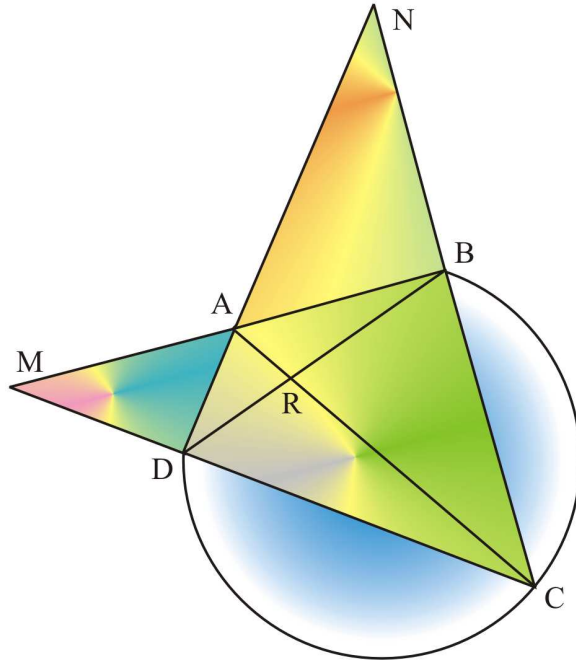
$$AC \cdot BD = AB \cdot CD + AD \cdot BC$$

(on suppose ici que AC et BD sont les diagonales du quadrilatère inscrit $ABCD$).

5. Montrer que

$$\frac{BD}{AC} = \frac{BA \cdot BC + DA \cdot DC}{AB \cdot AD + BC \cdot CD}$$

(formule de Viète)

**Solution:****Dessin** = $\{A, B, C, D\}$ Les points purs choisis sont A, B, C .Le point D de coordonnées barycentriques $\{X, Y, Z\}$ est situé sur le cercle passant par A, B, C , donc les coordonnées barycentriques X, Y, Z satisfont

$$c^2 XY + b^2 XZ + a^2 YZ = 0$$

d'où $Z = -\frac{c^2 XY}{b^2 X + a^2 Y}$.On déduit directement la description du point composé D :

$$D = \left\{ \frac{X (b^2 X + a^2 Y)}{b^2 X^2 + a^2 XY + b^2 XY - c^2 XY + a^2 Y^2}, \frac{Y (b^2 X + a^2 Y)}{b^2 X^2 + a^2 XY + b^2 XY - c^2 XY + a^2 Y^2}, \frac{c^2 XY}{-b^2 X^2 - a^2 XY - b^2 XY + c^2 XY - a^2 Y^2} \right\}$$

La distance CD^2 est égale à

$$CD^2 = \frac{(b^2 X + a^2 Y)^2}{b^2 X^2 + a^2 XY + b^2 XY - c^2 XY + a^2 Y^2}$$

La distance AD^2 est égale à

$$AD^2 = \frac{a^2 c^2 Y^2}{b^2 X^2 + a^2 XY + b^2 XY - c^2 XY + a^2 Y^2}$$

La distance BD^2 est égale à

$$BD^2 = \frac{b^2 c^2 X^2}{b^2 X^2 + a^2 XY + b^2 XY - c^2 XY + a^2 Y^2}$$

Dessin = **Dessin** $\cup R = \{A, B, C, D, R\}$

Détermination du point R :

Soit R le point $(AC) \cap (BD)$. Le point R est composé.

Comme $R \in (AC)$, on a, en choisissant les inconnues ν_1

$$\overrightarrow{OR} = \nu_1 \overrightarrow{OA} + (1 - \nu_1) \overrightarrow{OC}$$

Comme $R \in (BD)$, on a, en choisissant les inconnues μ_1

$$\overrightarrow{OR} = \mu_1 \overrightarrow{OB} + (1 - \mu_1) \overrightarrow{OD}$$

On déduit:

$$\overrightarrow{OR} = \overrightarrow{OA} b(1) + \overrightarrow{OB} b(2) + \overrightarrow{OC} b(3)$$

avec

$$\begin{aligned} b(1) &= -\frac{(-1 + \mu_1) X (b^2 X + a^2 Y)}{b^2 X^2 + a^2 X Y + b^2 X Y - c^2 X Y + a^2 Y^2} \\ b(2) &= \frac{b^2 \mu_1 X^2 + b^2 X Y + a^2 \mu_1 X Y - c^2 \mu_1 X Y + a^2 Y^2}{b^2 X^2 + a^2 X Y + b^2 X Y - c^2 X Y + a^2 Y^2} \\ b(3) &= \frac{c^2 (1 - \mu_1) X Y}{-b^2 X^2 - a^2 X Y - b^2 X Y + c^2 X Y - a^2 Y^2} \end{aligned}$$

La résolution du système linéaire d'inconnues ν_1, μ_1 donne

$$\begin{aligned} \nu_1 &= \frac{b^2 X + a^2 Y}{b^2 X + a^2 Y - c^2 Y} \\ \mu_1 &= \frac{-Y (b^2 X + a^2 Y)}{X (b^2 X + a^2 Y - c^2 Y)} \end{aligned}$$

On déduit que:

$$R = \left\{ \frac{b^2 X + a^2 Y}{b^2 X + a^2 Y - c^2 Y}, 0, \frac{-c^2 Y}{b^2 X + a^2 Y - c^2 Y} \right\}$$

La distance RB^2 est égale à

$$RB^2 = \frac{-b^2 c^2 (+b^2 X^2 + a^2 X Y + b^2 X Y - c^2 X Y + a^2 Y^2)}{(b^2 X + a^2 Y - c^2 Y)^2}$$

La distance RD^2 est égale à

$$RD^2 = \frac{b^2 c^2 Y^2 (b^2 X + a^2 Y)^2}{(b^2 X + a^2 Y - c^2 Y)^2 (b^2 X^2 + a^2 X Y + b^2 X Y - c^2 X Y + a^2 Y^2)}$$

La distance RA^2 est égale à

$$RA^2 = \frac{b^2 c^4 Y^2}{(b^2 X + a^2 Y - c^2 Y)^2}$$

La distance RC^2 est égale à

$$RC^2 = \frac{b^2 (b^2 X + a^2 Y)^2}{(b^2 X + a^2 Y - c^2 Y)^2}$$

Il résulte que

$$RA^2 \cdot RC^2 = \frac{b^4 c^4 Y^2 (b^2 X + a^2 Y)^2}{(b^2 X + a^2 Y - c^2 Y)^4}$$

Dessin = Dessin $\cup M = \{A, B, C, D, M, R\}$

Détermination du point M :

Soit M le point $(AB) \cap (CD)$. Le point M est composé.

Comme $M \in (AB)$, on a, en choisissant les inconnues ν_1

$$\overrightarrow{OM} = \nu_1 \overrightarrow{OA} + (1 - \nu_1) \overrightarrow{OB}$$

Comme $M \in (CD)$, on a, en choisissant les inconnues μ_1

$$\overrightarrow{OM} = \mu_1 \overrightarrow{OC} + (1 - \mu_1) \overrightarrow{OD}$$

On déduit:

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} d(1) + \overrightarrow{OB} d(2) + \overrightarrow{OC} d(3)$$

avec

$$\begin{aligned} d(1) &= \frac{(1 - \mu_1) X (b^2 X + a^2 Y)}{b^2 X^2 + a^2 X Y + b^2 X Y - c^2 X Y + a^2 Y^2} \\ d(2) &= \frac{(1 - \mu_1) Y (b^2 X + a^2 Y)}{b^2 X^2 + a^2 X Y + b^2 X Y - c^2 X Y + a^2 Y^2} \\ d(3) &= \frac{b^2 \mu_1 X^2 - c^2 X Y + a^2 \mu_1 X Y + b^2 \mu_1 X Y + a^2 \mu_1 Y^2}{b^2 X^2 + a^2 X Y + b^2 X Y - c^2 X Y + a^2 Y^2} \end{aligned}$$

La résolution du système linéaire d'inconnues ν_1, μ_1 donne

$$\nu_1 = \frac{X}{X + Y} \quad \mu_1 = \frac{c^2 X Y}{(X + Y) (b^2 X + a^2 Y)}$$

On déduit que:

$$M = \left\{ \frac{X}{X + Y}, \frac{Y}{X + Y}, 0 \right\}$$

La distance MA^2 est égale à

$$MA^2 = \frac{c^2 Y^2}{(X + Y)^2}$$

La distance MB^2 est égale à

$$MB^2 = \frac{c^2 X^2}{(X + Y)^2}$$

La distance MC^2 est égale à

$$MC^2 = \frac{b^2 X^2 + a^2 X Y + b^2 X Y - c^2 X Y + a^2 Y^2}{(X + Y)^2}$$

La distance MD^2 est égale à

$$MD^2 = \frac{c^4 X^2 Y^2}{(X + Y)^2 (b^2 X^2 + a^2 X Y + b^2 X Y - c^2 X Y + a^2 Y^2)}$$

Il résulte que

$$MA^2 \cdot MB^2 = \frac{c^4 X^2 Y^2}{(X + Y)^4}$$

Dessin = Dessin $\cup N = \{A, B, C, D, M, N, R\}$

Détermination du point N :

Soit N le point $(AD) \cap (BC)$. Le point N est composé.

Comme $N \in (AD)$, on a, en choisissant les inconnues ν_1

$$\overrightarrow{ON} = \nu_1 \overrightarrow{OA} + (1 - \nu_1) \overrightarrow{OD}$$

On déduit:

$$\overrightarrow{ON} = \overrightarrow{OA} e(1) + \overrightarrow{OB} e(2) + \overrightarrow{OC} e(3)$$

avec

$$\begin{aligned} e(1) &= \frac{b^2 X^2 + a^2 X Y + b^2 \nu_1 X Y - c^2 \nu_1 X Y + a^2 \nu_1 Y^2}{b^2 X^2 + a^2 X Y + b^2 X Y - c^2 X Y + a^2 Y^2} \\ e(2) &= \frac{(1 - \nu_1) Y (b^2 X + a^2 Y)}{b^2 X^2 + a^2 X Y + b^2 X Y - c^2 X Y + a^2 Y^2} \\ e(3) &= \frac{c^2 (1 - \nu_1) X Y}{-b^2 X^2 - a^2 X Y - b^2 X Y + c^2 X Y - a^2 Y^2} \end{aligned}$$

Comme $N \in (BC)$, on a, en choisissant les inconnues μ_1

$$\overrightarrow{ON} = \mu_1 \overrightarrow{OB} + (1 - \mu_1) \overrightarrow{OC}$$

La résolution du système linéaire d'inconnues ν_1, μ_1 donne

$$\mu_1 = \frac{b^2 X + a^2 Y}{b^2 X - c^2 X + a^2 Y} \quad \nu_1 = \frac{-X (b^2 X + a^2 Y)}{Y (b^2 X - c^2 X + a^2 Y)}$$

On déduit que:

$$N = \{0, \frac{b^2 X + a^2 Y}{b^2 X - c^2 X + a^2 Y}, \frac{-c^2 X}{b^2 X - c^2 X + a^2 Y}\}$$

La distance NB^2 est égale à

$$NB^2 = \frac{a^2 c^4 X^2}{(b^2 X - c^2 X + a^2 Y)^2}$$

La distance NC^2 est égale à

$$NC^2 = \frac{a^2 (b^2 X + a^2 Y)^2}{(b^2 X - c^2 X + a^2 Y)^2}$$

La distance NA^2 est égale à

$$NA^2 = \frac{a^2 c^2 (b^2 X^2 + a^2 X Y + b^2 X Y - c^2 X Y + a^2 Y^2)}{(b^2 X - c^2 X + a^2 Y)^2}$$

La distance ND^2 est égale à

$$ND^2 = \frac{a^2 c^2 X^2 (b^2 X + a^2 Y)^2}{(b^2 X - c^2 X + a^2 Y)^2 (b^2 X^2 + a^2 X Y + b^2 X Y - c^2 X Y + a^2 Y^2)}$$

Il résulte que

$$NB^2 \cdot NC^2 = \frac{a^4 c^4 X^2 (b^2 X + a^2 Y)^2}{(b^2 X - c^2 X + a^2 Y)^4}$$

La distance RM^2 est égale à

$$RM^2 = \frac{c^2 Y^2 (-a^2 b^2 X^2 + 2b^4 X^2 + 2b^2 c^2 X^2 - a^4 XY + 2a^2 b^2 XY + b^4 XY + 2a^2 c^2 XY - c^4 XY + a^2 b^2 Y^2)}{(X + Y)^2 (b^2 X + a^2 Y - c^2 Y)^2}$$

La distance RN^2 est égale à

$$RN^2 = \frac{c^2 (b^2 X + a^2 Y)^2 (a^2 b^2 X^2 + a^4 XY + b^4 XY - 2a^2 c^2 XY - 2b^2 c^2 XY + c^4 XY + a^2 b^2 Y^2)}{(b^2 X - c^2 X + a^2 Y)^2 (b^2 X + a^2 Y - c^2 Y)^2}$$

La distance MN^2 est égale à

$$MN^2 = \frac{c^2 X^2 (a^2 b^2 X^2 + a^4 XY + 2a^2 b^2 XY - b^4 XY + 2b^2 c^2 XY - c^4 XY + 2a^4 Y^2 - a^2 b^2 Y^2 + 2a^2 c^2 Y^2)}{(X + Y)^2 (b^2 X - c^2 X + a^2 Y)^2}$$

Egalité de Ptolémée. Posons

$$K^2 = b^2 X^2 + a^2 XY + b^2 XY - c^2 XY + a^2 Y^2$$

avec $K > 0$. Il est clair que:

$$CD = \frac{|b^2 X + a^2 Y|}{K} \quad AD = \frac{ac|Y|}{K} \quad BD = \frac{bc|X|}{K}$$

L'égalité de Ptolémée

$$AC \cdot BD = AB \cdot CD + AD \cdot BC$$

équivalent à

$$b \frac{bc|X|}{K} = c \frac{|b^2 X + a^2 Y|}{K} + a \frac{ac|Y|}{K}$$

Le point D a pour coordonnées barycentriques $\{X, Y, -\frac{c^2 XY}{b^2 X + a^2 Y}\}$ dans le repère $\{A, B, C\}$. Puisque AC et BD sont les diagonales du quadrilatère inscrit $ABCD$, le point R de coordonnées barycentriques $\{X, 0, -\frac{c^2 XY}{b^2 X + a^2 Y}\}$ est intérieur au segment BC , donc les quantités $(b^2 X + a^2 Y)$ et $(-Y)$ sont de même signe que l'on peut supposer positif. Il suit que $X > 0$ et la formule contenant les valeurs absolues équivalent à

$$b \frac{bcX}{K} = c \frac{b^2 X + a^2 Y}{K} + a \frac{ac(-Y)}{K}$$

qui est vraie.

On a maintenant

$$\begin{aligned} BA \cdot BC + DA \cdot DC &= ac + \frac{ac|Y|}{K} \frac{|b^2 X + a^2 Y|}{K} \\ AB \cdot AD + BC \cdot CD &= c \frac{ac|Y|}{K} + a \frac{|b^2 X + a^2 Y|}{K} \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned}
 \frac{BA \cdot BC + DA \cdot DC}{AB \cdot AD + BC \cdot CD} &= \frac{acK^2 - acY(b^2X + a^2Y)}{-K(ac^2Y + a(b^2X + a^2Y))} \\
 &= \frac{ac(b^2X^2 + a^2XY + b^2XY - c^2XY + a^2Y^2) - acY(b^2X + a^2Y)}{-K(ac^2Y + a(b^2X + a^2Y))} \\
 &= \frac{cX}{K} = \frac{\frac{bc|X|}{K}}{b} = \frac{BD}{AC}
 \end{aligned}$$

Exercice 6.2.2

Soit $ABCD$ un quadrilatère inscrit dans un cercle de centre K et de rayon R . En désignant par M_1 (resp. M_2) le point d'intersection des côtés opposés AB et CD (resp. AD et BC), montrer la relation

$$M_1M_2^2 = KM_1^2 + KM_2^2 - 2R^2$$

Solution:

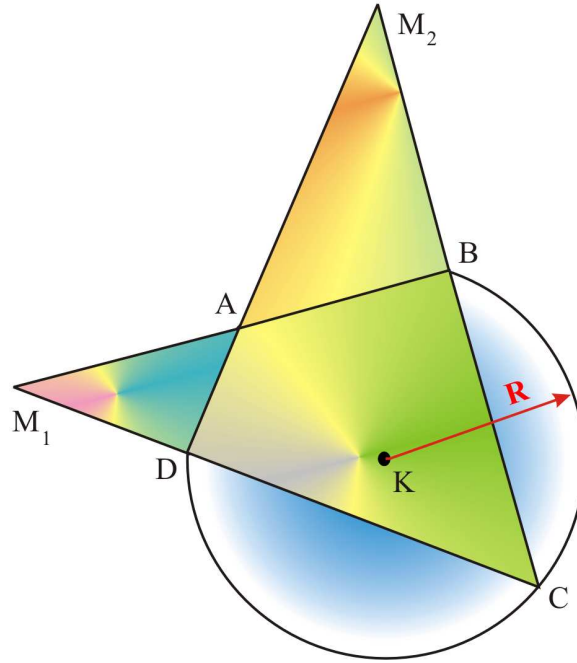
Dessin = $\{A, B, C, D, K\}$

Les points purs choisis sont A, B, C .

Les points composés sont D, K .

On a directement les coordonnées barycentriques des points composés:

$$\begin{aligned}
 D &= \left\{ \frac{x(b^2x + a^2y)}{b^2x^2 + a^2xy + b^2xy - c^2xy + a^2y^2}, \frac{y(b^2x + a^2y)}{b^2x^2 + a^2xy + b^2xy - c^2xy + a^2y^2}, \right. \\
 &\quad \left. \frac{-c^2xy}{b^2x^2 + a^2xy + b^2xy - c^2xy + a^2y^2} \right\} \\
 K &= \left\{ \frac{a^2(a^2 - b^2 - c^2)}{(a - b - c)(a + b - c)(a - b + c)(a + b + c)}, \frac{b^2(-a^2 + b^2 - c^2)}{(-a + b - c)(a + b - c)(-a + b + c)(a + b + c)}, \right. \\
 &\quad \left. \frac{c^2(a^2 + b^2 - c^2)}{(-a + b + c)(a + b - c)(a - b + c)(a + b + c)} \right\}
 \end{aligned}$$



Dessin = Dessin $\cup \{M_1\} = \{A, B, C, D, K, M_1\}$

Détermination du point M_1 :

Soit M_1 le point $(AB) \cap (CD)$. Le point M_1 est composé.

Comme $M_1 \in (AB)$, on a, en choisissant l'inconnue ν_1

$$\overrightarrow{OM_1} = \nu_1 \overrightarrow{OA} + (1 - \nu_1) \overrightarrow{OB}$$

Comme $M_1 \in (CD)$, on a, en choisissant l'inconnue μ_1

$$\overrightarrow{OM_1} = \mu_1 \overrightarrow{OC} + (1 - \mu_1) \overrightarrow{OD}$$

On déduit:

$$\overrightarrow{OM_1} = b(1) \overrightarrow{OA} + b(2) \overrightarrow{OB} + b(3) \overrightarrow{OC}$$

avec

$$\begin{aligned} b(1) &= \frac{(1 - \mu_1) x (b^2 x + a^2 y)}{b^2 x^2 + a^2 x y + b^2 x y - c^2 x y + a^2 y^2} \\ b(2) &= \frac{(1 - \mu_1) y (b^2 x + a^2 y)}{b^2 x^2 + a^2 x y + b^2 x y - c^2 x y + a^2 y^2} \\ b(3) &= \frac{b^2 \mu_1 x^2 - c^2 x y + a^2 \mu_1 x y + b^2 \mu_1 x y + a^2 \mu_1 y^2}{b^2 x^2 + a^2 x y + b^2 x y - c^2 x y + a^2 y^2} \end{aligned}$$

La résolution du système linéaire d'inconnues ν_1, μ_1 donne

$$\nu_1 = \frac{x}{x + y} \quad \mu_1 = \frac{c^2 x y}{(x + y) (b^2 x + a^2 y)}$$

On déduit que:

$$M_1 = \left\{ \frac{x}{x + y}, \frac{y}{x + y}, 0 \right\}$$

Dessin = Dessin $\cup \{M_2\} = \{A, B, C, D, K, M_1, M_2\}$

Détermination du point M_2 :

Soit M_2 le point $(AD) \cap (BC)$. Le point M_2 est composé.

Comme $M_2 \in (AD)$, on a, en choisissant l'inconnue ν_1

$$\overrightarrow{OM_2} = \nu_1 \overrightarrow{OA} + (1 - \nu_1) \overrightarrow{OD}$$

On déduit:

$$\overrightarrow{OM_2} = c(1) \overrightarrow{OA} + c(2) \overrightarrow{OB} + c(3) \overrightarrow{OC}$$

avec

$$\begin{aligned} c(1) &= \frac{b^2 x^2 + a^2 x y + b^2 \nu_1 x y - c^2 \nu_1 x y + a^2 \nu_1 y^2}{b^2 x^2 + a^2 x y + b^2 x y - c^2 x y + a^2 y^2} \\ c(2) &= \frac{(1 - \nu_1) y (b^2 x + a^2 y)}{b^2 x^2 + a^2 x y + b^2 x y - c^2 x y + a^2 y^2} \\ c(3) &= \frac{c^2 (-1 + \nu_1) x y}{b^2 x^2 + a^2 x y + b^2 x y - c^2 x y + a^2 y^2} \end{aligned}$$

Comme $M_2 \in (BC)$, on a, en choisissant l'inconnue μ_1

$$\overrightarrow{OM_2} = \mu_1 \overrightarrow{OB} + (1 - \mu_1) \overrightarrow{OC}$$

La résolution du système linéaire d'inconnues ν_1, μ_1 donne

$$\mu_1 = \frac{b^2 x + a^2 y}{b^2 x - c^2 x + a^2 y} \quad \nu_1 = \frac{-x (b^2 x + a^2 y)}{y (b^2 x - c^2 x + a^2 y)}$$

On déduit que:

$$M_2 = \left\{ 0, \frac{b^2 x + a^2 y}{b^2 x - c^2 x + a^2 y}, \frac{c^2 x}{-b^2 x + c^2 x - a^2 y} \right\}$$

La distance $M_1 M_2^2$ est égale à

$$M_1 M_2^2 = \frac{AC^2 c^2 x^2}{(x+y) (- (b^2 x) + c^2 x - a^2 y)} + \frac{BC^2 c^2 x^2 (b^2 x + a^2 y + c^2 y)}{(x+y) (- (b^2 x) + c^2 x - a^2 y)^2} - \frac{AB^2 x^2 (b^2 x + a^2 y + c^2 y)}{(x+y)^2 (- (b^2 x) + c^2 x - a^2 y)}$$

soit

$$M_1 M_2^2 = \frac{c^2 x^2 (a^2 b^2 x^2 + a^4 x y + 2 a^2 b^2 x y - b^4 x y + 2 b^2 c^2 x y - c^4 x y + 2 a^4 y^2 - a^2 b^2 y^2 + 2 a^2 c^2 y^2)}{(x+y)^2 (b^2 x - c^2 x + a^2 y)^2}$$

La distance $K M_1^2$ est égale à

$$K M_1^2 = \frac{c^2 (a^2 b^2 x^2 + a^4 x y + b^4 x y - 2 a^2 c^2 x y - 2 b^2 c^2 x y + c^4 x y + a^2 b^2 y^2)}{(a-b+c) (a+b-c) (-a+b+c) (a+b+c) (x+y)^2}$$

La distance $K M_2^2$ est égale à

$$K M_2^2 = \frac{a^4 c^2 (a^2 b^2 x^2 - 2 b^4 x^2 - 2 b^2 c^2 x^2 + a^4 x y - 2 a^2 b^2 x y - b^4 x y - 2 a^2 c^2 x y + c^4 x y - a^2 b^2 y^2)}{(a-b-c) (a+b-c) (a-b+c) (a+b+c) (b^2 x - c^2 x + a^2 y)^2}$$

On obtient

$$M_1 M_2^2 - K M_1^2 - K M_2^2 = \frac{2 a^2 b^2 c^2}{(a-b-c)(a+b-c)(a-b+c)(a+b+c)} = 2 R^2$$

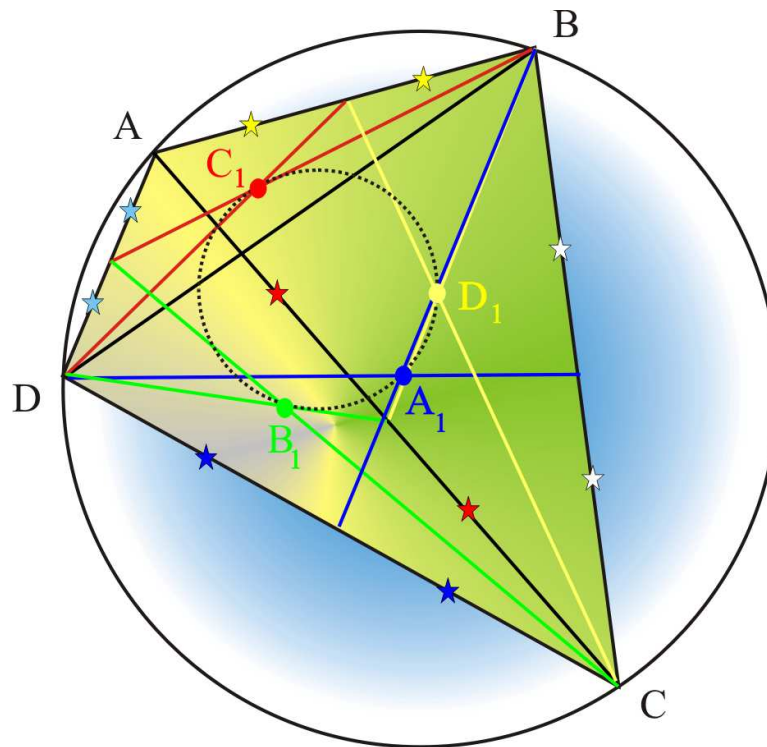
car

$$R^2 = AK^2 = \frac{a^2 b^2 c^2}{(a-b-c)(a+b-c)(a-b+c)(a+b+c)}$$

6.3 Centres de gravité de points cocycliques

Exercice 6.3.1

Soient donnés quatre points A, B, C, D . On désigne par A_1, B_1, C_1, D_1 les centres de gravité respectifs des triangles BCD, ACD, ABD, ABC . Montrer que les points A_1, B_1, C_1, D_1 sont cocycliques si et seulement si A, B, C, D sont cocycliques.



Solution:

Supposons A, B, C, D cocycliques.

Dessin = $\{A, B, C, D\}$

Avec des notations naturelles, on a

$$D = \left\{ X, Y, -\frac{c^2 XY}{b^2 X + a^2 Y} \right\}$$

Les points purs choisis sont A, B, C .

Les points composés sont D .

On déduit les coordonnées barycentriques du point composé:

$$D = \left\{ \frac{X (b^2 X + a^2 Y)}{b^2 X^2 + a^2 X Y + b^2 X Y - c^2 X Y + a^2 Y^2}, \right. \\ \frac{Y (b^2 X + a^2 Y)}{b^2 X^2 + a^2 X Y + b^2 X Y - c^2 X Y + a^2 Y^2}, \\ \left. \frac{-c^2 X Y}{b^2 X^2 + a^2 X Y + b^2 X Y - c^2 X Y + a^2 Y^2} \right\}$$

Dessin = Dessin $\cup \{A_1, B_1, C_1, D_1\} = \{A, A_1, B, B_1, C, C_1, D, D_1\}$

On a les équations vectorielles

$$\vec{0} = \overrightarrow{A_1 B} + \overrightarrow{A_1 C} + \overrightarrow{A_1 D}$$

$$\vec{0} = \overrightarrow{B_1 A} + \overrightarrow{B_1 C} + \overrightarrow{B_1 D}$$

$$\vec{0} = \overrightarrow{C_1 A} + \overrightarrow{C_1 B} + \overrightarrow{C_1 D}$$

$$\vec{0} = \overrightarrow{D_1 A} + \overrightarrow{D_1 B} + \overrightarrow{D_1 C}$$

et, par découpages automatiques, le système linéaire

$$\vec{0} = -3 \overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}$$

$$\vec{0} = \overrightarrow{OA} - 3 \overrightarrow{OB_1} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}$$

$$\vec{0} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} - 3 \overrightarrow{OC_1} + \overrightarrow{OD}$$

$$\vec{0} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} - 3 \overrightarrow{OD_1}$$

Les points composés sont A_1, B_1, C_1, D_1 .

On déduit les coordonnées barycentriques des points composés:

$$A_1 = \left\{ \frac{X (b^2 X + a^2 Y)}{3 (b^2 X^2 + a^2 X Y + b^2 X Y - c^2 X Y + a^2 Y^2)}, \right. \\ \frac{b^2 X^2 + a^2 X Y + 2 b^2 X Y - c^2 X Y + 2 a^2 Y^2}{3 (b^2 X^2 + a^2 X Y + b^2 X Y - c^2 X Y + a^2 Y^2)}, \\ \left. \frac{b^2 X^2 + a^2 X Y + b^2 X Y - 2 c^2 X Y + a^2 Y^2}{3 (b^2 X^2 + a^2 X Y + b^2 X Y - c^2 X Y + a^2 Y^2)} \right\}$$

$$B_1 = \left\{ \frac{2 b^2 X^2 + 2 a^2 X Y + b^2 X Y - c^2 X Y + a^2 Y^2}{3 (b^2 X^2 + a^2 X Y + b^2 X Y - c^2 X Y + a^2 Y^2)}, \right. \\ \frac{Y (b^2 X + a^2 Y)}{3 (b^2 X^2 + a^2 X Y + b^2 X Y - c^2 X Y + a^2 Y^2)}, \\ \left. \frac{b^2 X^2 + a^2 X Y + b^2 X Y - 2 c^2 X Y + a^2 Y^2}{3 (b^2 X^2 + a^2 X Y + b^2 X Y - c^2 X Y + a^2 Y^2)} \right\}$$

$$C_1 = \left\{ \frac{2b^2X^2 + 2a^2XY + b^2XY - c^2XY + a^2Y^2}{3(b^2X^2 + a^2XY + b^2XY - c^2XY + a^2Y^2)}, \right. \\ \left. \frac{b^2X^2 + a^2XY + 2b^2XY - c^2XY + 2a^2Y^2}{3(b^2X^2 + a^2XY + b^2XY - c^2XY + a^2Y^2)}, \right. \\ \left. \frac{-c^2XY}{3(b^2X^2 + a^2XY + b^2XY - c^2XY + a^2Y^2)} \right\}$$

$$D_1 = \left\{ \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3} \right\}$$

Un point M de coordonnées $\{X, Y, Z\}$ appartient au cercle passant par A_1, B_1, C_1 si et seulement si

$$0 = -a^2b^2X^4 + b^4X^4 + b^2c^2X^4 - a^4X^3Y + b^4X^3Y + 3a^2c^2X^3Y - 4b^2c^2X^3Y - 2c^4X^3Y - a^4X^2Y^2 \\ + 2a^2b^2X^2Y^2 - b^4X^2Y^2 - 2a^2c^2X^2Y^2 - 2b^2c^2X^2Y^2 + 5c^4X^2Y^2 + a^4XY^3 - b^4XY^3 - 4a^2c^2XY^3 \\ + 3b^2c^2XY^3 - 2c^4XY^3 + a^4Y^4 - a^2b^2Y^4 + a^2c^2Y^4 + a^2b^2X^3Z - 4b^4X^3Z - b^2c^2X^3Z + a^4X^2YZ \\ - 7a^2b^2X^2YZ - 3b^4X^2YZ + 8b^2c^2X^2YZ - c^4X^2YZ - 3a^4XY^2Z - 7a^2b^2XY^2Z + b^4XY^2Z \\ + 8a^2c^2XY^2Z - c^4XY^2Z - 4a^4Y^3Z + a^2b^2Y^3Z - a^2c^2Y^3Z + 2a^2b^2X^2Z^2 + 4b^4X^2Z^2 - 2b^2c^2X^2Z^2 \\ + 2a^4XYZ^2 + 8a^2b^2XYZ^2 + 2b^4XYZ^2 - 3a^2c^2XYZ^2 - 3b^2c^2XYZ^2 + c^4XYZ^2 + 4a^4Y^2Z^2 \\ + 2a^2b^2Y^2Z^2 - 2a^2c^2Y^2Z^2$$

Le point $M = D_1$ convient.

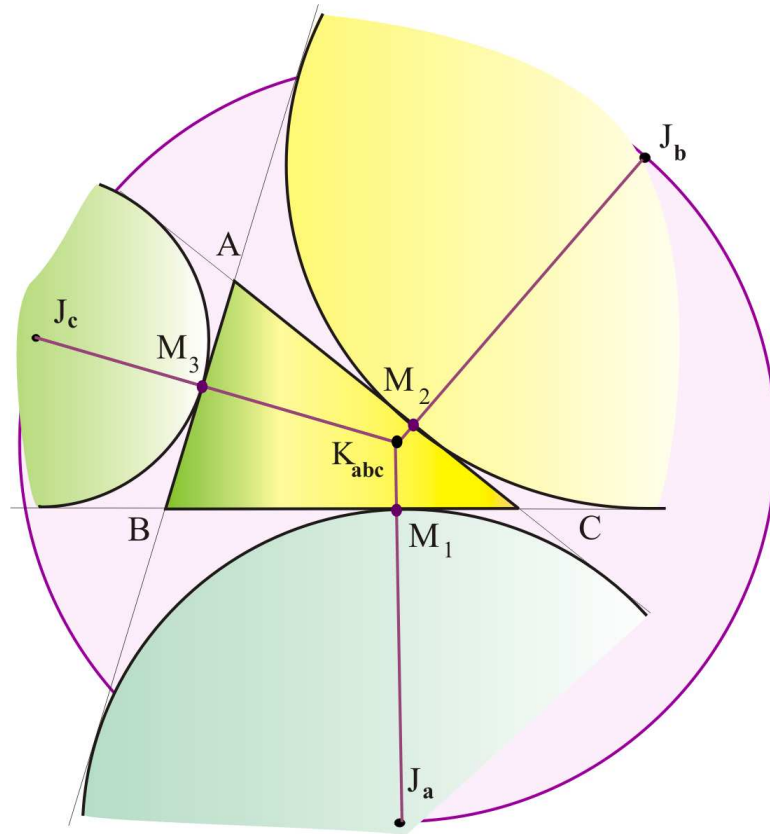
La réciproque se démontre de la même façon.

6.4 Cercle passant par les centres des cercles ex-inscrits

Exercice 6.4.1

Soit Γ le cercle passant par les centres J_a, J_b, J_c des cercles ex-inscrits à un triangle ABC . Déterminer le centre K_{abc} de Γ , le rayon et la condition nécessaire et suffisante pour qu'un point $M = \{X, Y, Z\}$ appartienne à ce cercle.

Etudier les points M_1, M_2, M_3 intersection des segments issus de J_a, J_b, J_c joignant le centre K_{abc} de Γ avec les côtés du triangle ABC ($M_1 = (J_a K_{abc}) \cap (BC)$, $M_2 = (J_b K_{abc}) \cap (AC)$, $M_3 = (J_c K_{abc}) \cap (AB)$). Calculer les distances $K_{abc}M_1^2$, $K_{abc}M_2^2$, $K_{abc}M_3^2$.

**Solution:**

Dessin = { $A, B, C, J_a, J_b, J_c, K_{abc}$ }

Les points purs choisis sont A, B, C .

Les points composés sont J_a, J_b, J_c .

Les coordonnées barycentriques des points composés sont:

$$J_a = \left\{ \frac{a}{a-b-c}, \frac{b}{-a+b+c}, -\frac{c}{a-b-c} \right\}$$

$$J_b = \left\{ \frac{a}{a-b+c}, \frac{b}{-a+b-c}, \frac{c}{a-b+c} \right\}$$

$$J_c = \left\{ \frac{a}{a+b-c}, \frac{b}{a+b-c}, -\frac{c}{a+b-c} \right\}$$

Equation du cercle passant par les points J_a, J_b, J_c

Le centre $M = \{x, y, 1-x, y\}$ de ce cercle doit vérifier $MJ_a^2 - MJ_b^2 = 0$ et $MJ_a^2 - MJ_c^2 = 0$, soit

$$\begin{cases} (2a^2b - 2ab^2)c + c(-a^2b + 2ab^2 - b^3 + bc^2)x + c(a^3 - 2a^2b + ab^2 - ac^2)y = 0 \\ b(a^3 - ab^2 - ac^2) + b(-a^3 + ab^2 + a^2c + ac^2 + cb^2 - c^3)x + b(-a^3 + ab^2 + 2a^2c - ac^2)y = 0 \end{cases}$$

La résolution de ce système linéaire donne

$$x = \frac{a(a^3 + a^2b - ab^2 - b^3 + a^2c - 2abc + b^2c - ac^2 + bc^2 - c^3)}{(a-b-c)(a+b-c)(a-b+c)(a+b+c)}$$

$$y = \frac{b(-a^3 - a^2b + ab^2 + b^3 + a^2c - 2abc + b^2c + ac^2 - bc^2 - c^3)}{(-a + b - c)(a + b - c)(-a + b + c)(a + b + c)}$$

Les coordonnées du centre sont ainsi

$$K_{abc} = \left\{ \frac{a(a^3 + a^2b - ab^2 - b^3 + a^2c - 2abc + b^2c - ac^2 + bc^2 - c^3)}{(a - b - c)(a + b - c)(a - b + c)(a + b + c)}, \right. \\ \frac{b(-a^3 - a^2b + ab^2 + b^3 + a^2c - 2abc + b^2c + ac^2 - bc^2 - c^3)}{(-a + b - c)(a + b - c)(-a + b + c)(a + b + c)}, \\ \left. \frac{c(a^3 - a^2b - ab^2 + b^3 + a^2c + 2abc + b^2c - ac^2 - bc^2 - c^3)}{(-a + b + c)(a + b - c)(a - b + c)(a + b + c)} \right\}$$

Le carré r^2 du rayon de ce cercle a pour valeur

$$r^2 = \frac{4a^2b^2c^2}{(-a + b + c)(a + b - c)(a - b + c)(a + b + c)}$$

Un point $M = \{X, Y, Z\}$ appartient à ce cercle si et seulement si sa distance (au carré) au centre est égale à cette valeur, soit

$$0 = bcX^2 + acXY + bcXY + c^2XY + acY^2 + abXZ + b^2XZ \\ + bcXZ + a^2YZ + abYZ + acYZ + abZ^2$$

Dessin = Dessin $\cup \{M_1\} = \{A, B, C, J_a, J_b, J_c, K_{abc}, M_1\}$

Détermination du point M_1 :

Soit M_1 le point $(J_aK_{abc}) \cap (BC)$. Le point M_1 est composé.

Comme $M_1 \in (J_aK_{abc})$, on a, en choisissant l'inconnue ν_1

$$\overrightarrow{OM_1} = \nu_1 \overrightarrow{OJ_a} + (1 - \nu_1) \overrightarrow{OK_{abc}}$$

On déduit:

$$\overrightarrow{OM_1} = a(1) \overrightarrow{OA} + a(2) \overrightarrow{OB} + a(3) \overrightarrow{OC}$$

avec

$$a(1) = \frac{a(a^3 + a^2b - ab^2 - b^3 + a^2c - 2abc + b^2c - ac^2 + bc^2 - c^3 + 4abc\nu_1)}{(a - b - c)(a + b - c)(a - b + c)(a + b + c)} \\ a(2) = \frac{b(a^3 + a^2b - ab^2 - b^3 - a^2c + 2abc - b^2c - ac^2 + bc^2 + c^3 + 2a^2c\nu_1 + 2b^2c\nu_1 - 2c^3\nu_1)}{(-a + b + c)(a + b - c)(a - b + c)(a + b + c)} \\ a(3) = \frac{c(a^3 - a^2b - ab^2 + b^3 + a^2c + 2abc + b^2c - ac^2 - bc^2 - c^3 + 2a^2b\nu_1 - 2b^3\nu_1 + 2bc^2\nu_1)}{(-a + b + c)(a + b - c)(a - b + c)(a + b + c)}$$

Comme $M_1 \in (BC)$, on a, en choisissant l'inconnue μ_1

$$\overrightarrow{OM_1} = \mu_1 \overrightarrow{OB} + (1 - \mu_1) \overrightarrow{OC}$$

La résolution du système linéaire d'inconnues ν_1, μ_1 donne

$$\mu_1 = \frac{a - b + c}{2a} \quad \nu_1 = \frac{(-a^3 - a^2b + ab^2 + b^3 - a^2c + 2abc - b^2c + ac^2 - bc^2 + c^3)}{4abc}$$

Calculons le vecteur $\overrightarrow{BM_1}$. On a:

$$\overrightarrow{BM_1} = c(1) \overrightarrow{OA} + c(2) \overrightarrow{OB} + c(3) \overrightarrow{OC}$$

avec

$$\begin{aligned} c(1) &= 0 \\ c(2) &= \frac{-a-b+c}{2a} \\ c(3) &= \frac{a+b-c}{2a} \end{aligned}$$

Calculons le vecteur $\overrightarrow{BC}$. On a:

$$\overrightarrow{BC} = d(1) \overrightarrow{OA} + d(2) \overrightarrow{OB} + d(3) \overrightarrow{OC}$$

avec

$$\begin{aligned} d(1) &= 0 \\ d(2) &= -1 \\ d(3) &= 1 \end{aligned}$$

On a ainsi

$$\overrightarrow{BM_1} = \frac{a+b-c}{2a} \overrightarrow{BC}$$

Dessin = Dessin $\cup \{M_2\} = \{A, B, C, J_a, J_b, J_c, K_{abc}, M_1, M_2\}$

Détermination du point M_2 :

Soit M_2 le point $(J_b K_{abc}) \cap (AC)$. Le point M_2 est composé.

Comme $M_2 \in (J_b K_{abc})$, on a, en choisissant l'inconnue ν_1

$$\overrightarrow{OM_2} = \nu_1 \overrightarrow{OJ_b} + (1 - \nu_1) \overrightarrow{OK_{abc}}$$

On déduit:

$$\overrightarrow{OM_2} = e(1) \overrightarrow{OA} + e(2) \overrightarrow{OB} + e(3) \overrightarrow{OC}$$

avec

$$\begin{aligned} e(1) &= \frac{a(a^3 + a^2b - ab^2 - b^3 + a^2c - 2abc + b^2c - ac^2 + bc^2 - c^3 - 2a^2c\nu_1 - 2b^2c\nu_1 + 2c^3\nu_1)}{(a-b-c)(a+b-c)(a-b+c)(a+b+c)} \\ e(2) &= \frac{b(a^3 + a^2b - ab^2 - b^3 - a^2c + 2abc - b^2c - ac^2 + bc^2 + c^3 - 4abc\nu_1)}{(-a+b+c)(a+b-c)(a-b+c)(a+b+c)} \\ e(3) &= \frac{c(-a^3 + a^2b + ab^2 - b^3 - a^2c - 2abc - b^2c + ac^2 + bc^2 + c^3 + 2a^3\nu_1 - 2ab^2\nu_1 - 2ac^2\nu_1)}{(a-b-c)(a+b-c)(a-b+c)(a+b+c)} \end{aligned}$$

Comme $M_2 \in (AC)$, on a, en choisissant l'inconnue μ_1

$$\overrightarrow{OM_2} = \mu_1 \overrightarrow{OA} + (1 - \mu_1) \overrightarrow{OC}$$

La résolution du système linéaire d'inconnues ν_1, μ_1 donne

$$\mu_1 = \frac{-a + b + c}{2b} \quad \nu_1 = \frac{a^3 + a^2 b - a b^2 - b^3 - a^2 c + 2 a b c - b^2 c - a c^2 + b c^2 + c^3}{4 a b c}$$

On déduit que:

$$M_2 = \left\{ \frac{-a + b + c}{2b}, 0, \frac{a + b - c}{2b} \right\}$$

Calculons le vecteur $\overrightarrow{AM_2}$. On a:

$$\overrightarrow{AM_2} = g(1) \overrightarrow{OA} + g(2) \overrightarrow{OB} + g(3) \overrightarrow{OC}$$

avec

$$g(1) = \frac{-a - b + c}{2b}$$

$$g(2) = 0$$

$$g(3) = \frac{a + b - c}{2b}$$

Calculons le vecteur $\overrightarrow{AC}$. On a:

$$\overrightarrow{AC} = h(1) \overrightarrow{OA} + h(2) \overrightarrow{OB} + h(3) \overrightarrow{OC}$$

avec

$$h(1) = -1$$

$$h(2) = 0$$

$$h(3) = 1$$

On a ainsi

$$\overrightarrow{AM_2} = \frac{a + b - c}{2b} \overrightarrow{AC}$$

Dessin = Dessin $\cup \{M_3\} = \{A, B, C, J_a, J_b, J_c, K_{abc}, M_1, M_2, M_3\}$

Détermination du point M_3 :

Soit M_3 le point $(J_c K_{abc}) \cap (AB)$. Le point M_3 est composé.

Comme $M_3 \in (J_c K_{abc})$, on a, en choisissant l'inconnue ν_1

$$\overrightarrow{OM_3} = \nu_1 \overrightarrow{OJ_c} + (1 - \nu_1) \overrightarrow{OK_{abc}}$$

On déduit:

$$\overrightarrow{OM_3} = i(1) \overrightarrow{OA} + i(2) \overrightarrow{OB} + i(3) \overrightarrow{OC}$$

avec

$$i(1) = \frac{a (a^3 + a^2 b - a b^2 - b^3 + a^2 c - 2 a b c + b^2 c - a c^2 + b c^2 - c^3 - 2 a^2 b \nu_1 + 2 b^3 \nu_1 - 2 b c^2 \nu_1)}{(a - b - c) (a + b - c) (a - b + c) (a + b + c)}$$

$$i(2) = \frac{b (-a^3 - a^2 b + a b^2 + b^3 + a^2 c - 2 a b c + b^2 c + a c^2 - b c^2 - c^3 + 2 a^3 \nu_1 - 2 a b^2 \nu_1 - 2 a c^2 \nu_1)}{(a - b - c) (a + b - c) (a - b + c) (a + b + c)}$$

$$i(3) = \frac{c(a^3 - a^2b - ab^2 + b^3 + a^2c + 2abc + b^2c - ac^2 - bc^2 - c^3 - 4abc\nu_1)}{(-a+b+c)(a+b-c)(a-b+c)(a+b+c)}$$

Comme $M_3 \in (AB)$, on a, en choisissant l'inconnue μ_1

$$\overrightarrow{OM_3} = \mu_1 \overrightarrow{OA} + (1 - \mu_1) \overrightarrow{OB}$$

La résolution du système linéaire d'inconnues ν_1, μ_1 donne

$$\mu_1 = \frac{-a+b+c}{2c} \quad \nu_1 = \frac{a^3 - a^2b - ab^2 + b^3 + a^2c + 2abc + b^2c - ac^2 - bc^2 - c^3}{4abc}$$

On déduit que:

$$M_3 = \left\{ \frac{-a+b+c}{2c}, \frac{a-b+c}{2c}, 0 \right\}$$

Calculons le vecteur $\overrightarrow{BM_3}$. On a:

$$\overrightarrow{BM_3} = k(1) \overrightarrow{OA} + k(2) \overrightarrow{OB} + k(3) \overrightarrow{OC}$$

avec

$$\begin{aligned} k(1) &= \frac{-a+b+c}{2c} \\ k(2) &= \frac{a-b-c}{2c} \\ k(3) &= 0 \end{aligned}$$

Calculons le vecteur $\overrightarrow{AB}$. On a:

$$\overrightarrow{AB} = l(1) \overrightarrow{OA} + l(2) \overrightarrow{OB} + l(3) \overrightarrow{OC}$$

avec

$$\begin{aligned} l(1) &= -1 \\ l(2) &= 1 \\ l(3) &= 0 \end{aligned}$$

On a ainsi

$$\overrightarrow{BM_3} = \frac{a-b-c}{2c} \overrightarrow{AB}$$

La distance $K_{abc}M_1^2$ est égale à

$$\begin{aligned} K_{abc}M_1^2 &= \frac{AB^2 (a^2 + b^2 - c^2) (a^3 + a^2b - ab^2 - b^3 + a^2c - 2abc + b^2c - ac^2 + bc^2 - c^3)^2}{2(a-b-c)^2(a+b-c)^2(a-b+c)^2(a+b+c)^2} \\ &+ \frac{AC^2 (a^2 - b^2 + c^2) (a^3 + a^2b - ab^2 - b^3 + a^2c - 2abc + b^2c - ac^2 + bc^2 - c^3)^2}{2(a-b-c)^2(a+b-c)^2(a-b+c)^2(a+b+c)^2} \\ &- \frac{BC^2 (a^2 + b^2 - c^2) (a^2 - b^2 + c^2) (a^3 + a^2b - ab^2 - b^3 + a^2c - 2abc + b^2c - ac^2 + bc^2 - c^3)^2}{4a^2(a-b-c)^2(a+b-c)^2(a-b+c)^2(a+b+c)^2} \end{aligned}$$

soit

$$K_{abc}M_1^2 = \frac{(a^3 + a^2b - ab^2 - b^3 + a^2c - 2abc + b^2c - ac^2 + bc^2 - c^3)^2}{4(-a + b + c)(a + b - c)(a - b + c)(a + b + c)}$$

La distance $K_{abc}M_2^2$ est égale à

$$K_{abc}M_2^2 = \frac{(a^3 + a^2b - ab^2 - b^3 - a^2c + 2abc - b^2c - ac^2 + bc^2 + c^3)^2}{4(-a + b + c)(a + b - c)(a - b + c)(a + b + c)}$$

La distance $K_{abc}M_3^2$ est égale à

$$K_{abc}M_3^2 = \frac{(a^3 - a^2b - ab^2 + b^3 + a^2c + 2abc + b^2c - ac^2 - bc^2 - c^3)^2}{4(a - b + c)(a + b - c)(-a + b + c)(a + b + c)}$$

CHAPITRE

7

Formes fondamentales

7 Formes fondamentales

7.1 Expression analytique du produit scalaire dans le cas du plan

Le produit scalaire $(-2) \overrightarrow{MM_2} \cdot \overrightarrow{M_1M_3}$ a pour valeur

$$\begin{aligned}
& \frac{AB^2 (-X_1 Y + X Y_1 - X_1 Z + X Z_1) (-X_1 Y + X Y_1 + Y_1 Z - Y Z_1)}{(X + Y + Z)^2 (X_1 + Y_1 + Z_1)^2} \\
& + \frac{AC^2 (-X_1 Y + X Y_1 - X_1 Z + X Z_1) (-X_1 Z - Y_1 Z + X Z_1 + Y Z_1)}{(X + Y + Z)^2 (X_1 + Y_1 + Z_1)^2} \\
& - \frac{BC^2 (-X_1 Y + X Y_1 + Y_1 Z - Y Z_1) (-X_1 Z - Y_1 Z + X Z_1 + Y Z_1)}{(X + Y + Z)^2 (X_1 + Y_1 + Z_1)^2} \\
& - \frac{AB^2 (-X_2 Y_1 + X_1 Y_2 - X_2 Z_1 + X_1 Z_2) (-X_2 Y_1 + X_1 Y_2 + Y_2 Z_1 - Y_1 Z_2)}{(X_1 + Y_1 + Z_1)^2 (X_2 + Y_2 + Z_2)^2} \\
& - \frac{AC^2 (-X_2 Y_1 + X_1 Y_2 - X_2 Z_1 + X_1 Z_2) (-X_2 Z_1 - Y_2 Z_1 + X_1 Z_2 + Y_1 Z_2)}{(X_1 + Y_1 + Z_1)^2 (X_2 + Y_2 + Z_2)^2} \\
& + \frac{BC^2 (-X_2 Y_1 + X_1 Y_2 + Y_2 Z_1 - Y_1 Z_2) (-X_2 Z_1 - Y_2 Z_1 + X_1 Z_2 + Y_1 Z_2)}{(X_1 + Y_1 + Z_1)^2 (X_2 + Y_2 + Z_2)^2} \\
& - \frac{AB^2 (-X_3 Y + X Y_3 - X_3 Z + X Z_3) (-X_3 Y + X Y_3 + Y_3 Z - Y Z_3)}{(X + Y + Z)^2 (X_3 + Y_3 + Z_3)^2} \\
& - \frac{AC^2 (-X_3 Y + X Y_3 - X_3 Z + X Z_3) (-X_3 Z - Y_3 Z + X Z_3 + Y Z_3)}{(X + Y + Z)^2 (X_3 + Y_3 + Z_3)^2} \\
& + \frac{BC^2 (-X_3 Y + X Y_3 + Y_3 Z - Y Z_3) (-X_3 Z - Y_3 Z + X Z_3 + Y Z_3)}{(X + Y + Z)^2 (X_3 + Y_3 + Z_3)^2} \\
& + \frac{AB^2 (-X_3 Y_2 + X_2 Y_3 - X_3 Z_2 + X_2 Z_3) (-X_3 Y_2 + X_2 Y_3 + Y_3 Z_2 - Y_2 Z_3)}{(X_2 + Y_2 + Z_2)^2 (X_3 + Y_3 + Z_3)^2} \\
& + \frac{AC^2 (-X_3 Y_2 + X_2 Y_3 - X_3 Z_2 + X_2 Z_3) (-X_3 Z_2 - Y_3 Z_2 + X_2 Z_3 + Y_2 Z_3)}{(X_2 + Y_2 + Z_2)^2 (X_3 + Y_3 + Z_3)^2} \\
& - \frac{BC^2 (-X_3 Y_2 + X_2 Y_3 + Y_3 Z_2 - Y_2 Z_3) (-X_3 Z_2 - Y_3 Z_2 + X_2 Z_3 + Y_2 Z_3)}{(X_2 + Y_2 + Z_2)^2 (X_3 + Y_3 + Z_3)^2}
\end{aligned}$$

avec $M = \{X, Y, Z\}$, $M_i = \{X_i, Y_i, Z_i\}$ pour $1 \leq i \leq 3$ coordonnées barycentriques non nécessairement normalisées de points du plan.

7.2 Expression générale de la distance entre deux points

Exercice 7.2.1 *formule de la distance*

Soient $(A_i)_{1 \leq i \leq n}$ n points affinement indépendants dans un espace affine fixe. Pour deux points M et M^* de coordonnées barycentriques $M = \{x_1, \dots, x_j, \dots, x_n\}$ et $M^* = \{x_1^*, \dots, x_j^*, \dots, x_n^*\}$ dans le repère $\{A_1, \dots, A_j, \dots, A_n\}$, la distance MM^{*2} a pour valeur

$$MM^{*2} = \sum_{1 \leq i < j \leq n} \frac{\left(\sum_{k=1}^{k=n} \begin{vmatrix} x_i^* & x_k^* \\ x_i & x_k \end{vmatrix} \right) \cdot \left(\sum_{k=1}^{k=n} \begin{vmatrix} x_k^* & x_j^* \\ x_k & x_j \end{vmatrix} \right)}{\left(\sum_{k=1}^{k=n} x_k \right)^2 \cdot \left(\sum_{k=1}^{k=n} x_k^* \right)^2} A_i A_j^2$$

Solution:

Posons

$$f(M, M^*) = \sum_{1 \leq i < j \leq n} \frac{\left(\sum_{k=1}^{k=n} \begin{vmatrix} x_i^* & x_k^* \\ x_i & x_k \end{vmatrix} \right) \cdot \left(\sum_{k=1}^{k=n} \begin{vmatrix} x_k^* & x_j^* \\ x_k & x_j \end{vmatrix} \right)}{\left(\sum_{k=1}^{k=n} x_k \right)^2 \cdot \left(\sum_{k=1}^{k=n} x_k^* \right)^2} A_i A_j^2$$

Il est clair que $f(M, M^*) = f(M^*M)$ et que $f(M, M^*)$ et que $f(M, M^*)$ est une forme invariante par translation des points M et M^* .

Évaluons l'expression lorsque $M = A_i$ et $M^* = A_j$ avec $i \neq j$, i, j étant fixés. On a donc $x_k = 0$ sauf pour $k = i$ et $x_k^* = 0$ sauf pour $k = j$. Pour $1 \leq r < p \leq n$, on a

$$\sum_{k=1}^{k=n} \begin{vmatrix} x_r^* & x_k^* \\ x_r & x_k \end{vmatrix} = \sum_{k=1}^{k=n} \begin{vmatrix} \delta_r^j & \delta_k^j \\ \delta_r^i & \delta_k^i \end{vmatrix} = \sum_{k=1}^{k=n} \delta_r^j \delta_k^i - \delta_r^i \delta_k^j = \delta_r^j - \delta_r^i$$

et

$$\sum_{k=1}^{k=n} \begin{vmatrix} x_k^* & x_p^* \\ x_k & x_p \end{vmatrix} = \sum_{k=1}^{k=n} \begin{vmatrix} \delta_k^j & \delta_p^j \\ \delta_k^i & \delta_p^i \end{vmatrix} = \sum_{k=1}^{k=n} (\delta_k^j \delta_p^i - \delta_k^i \delta_p^j) = \delta_p^i - \delta_p^j$$

Ainsi

$$\left(\sum_{k=1}^{k=n} \begin{vmatrix} x_r^* & x_k^* \\ x_r & x_k \end{vmatrix} \right) \cdot \left(\sum_{k=1}^{k=n} \begin{vmatrix} x_k^* & x_p^* \\ x_k & x_p \end{vmatrix} \right) = 0$$

lorsque le couple (i, j) est différent du couple (r, p) .

Puisque

$$\left(\sum_{k=1}^{k=n} \begin{vmatrix} x_i^* & x_k^* \\ x_i & x_k \end{vmatrix} \right) \cdot \left(\sum_{k=1}^{k=n} \begin{vmatrix} x_k^* & x_j^* \\ x_k & x_j \end{vmatrix} \right) = \left(\sum_{k=1}^{k=n} \begin{vmatrix} 0 & \delta_k^j \\ 1 & \delta_k^i \end{vmatrix} \right) \cdot \left(\sum_{k=1}^{k=n} \begin{vmatrix} \delta_k^j & 1 \\ \delta_k^i & 0 \end{vmatrix} \right) = 1$$

on obtient que $f(A_i, A_j) = A_i A_j^2$ pour tout $1 \leq i < j \leq n$.

Dans la base $\{ \overrightarrow{A_1 A_2}, \dots, \overrightarrow{A_1 A_i}, \dots, \overrightarrow{A_1 A_n} \}$, le vecteur $\overrightarrow{A_1 M}$ a pour coordonnées

$$\frac{x_2}{\sum_{k=1}^{k=n} x_k}, \dots, \frac{x_i}{\sum_{k=1}^{k=n} x_k}, \dots, \frac{x_n}{\sum_{k=1}^{k=n} x_k}$$

En posant pour tout i , $u_i = \frac{x_i}{\sum_{k=1}^{k=n} x_k}$, $u_i^* = \frac{x_i^*}{\sum_{k=1}^{k=n} x_k^*}$, on obtient,

$$f(M, M^*) = \sum_{1 \leq i < j \leq n} \left(\sum_{k=1}^{k=n} \begin{vmatrix} u_i^* & u_k^* \\ u_i & u_k \end{vmatrix} \right) \cdot \left(\sum_{k=1}^{k=n} \begin{vmatrix} u_k^* & u_j^* \\ u_k & u_j \end{vmatrix} \right) A_i A_j^2$$

égal à

$$\sum_{1 \leq i < j \leq n} \left(\sum_{k=1}^{k=n} \begin{vmatrix} u_i^* - u_i & u_k^* - u_k \\ u_i & u_k \end{vmatrix} \right) \cdot \left(\sum_{k=1}^{k=n} \begin{vmatrix} u_k^* - u_k & u_j^* - u_j \\ u_k & u_j \end{vmatrix} \right) A_i A_j^2$$

En fixant M comme point origine, les u_i deviennent des constantes. On obtient que $f(M, M^*)$ est une forme bilinéaire symétrique en les variables $(u_i^* - u_i)_{1 \leq i \leq n}$ car $f(M, M^*) = f(M^*, M)$ et chaque sommation est linéaire en ces variables. Il résulte que $f(M, M^*)$ est la distance euclidienne.

7.3 Multi-produit scalaire

Exercice 7.3.1

Soit $n = 2p \geq 4$ un entier pair, $A_1, A_2, \dots, A_{2p-1}, A_{2p}$ des points d'un espace affine euclidien. On pose

$$\delta(A_1, A_2, \dots, A_{2p-1}, A_{2p}) = \sum_{i=1}^{i=2p} (-1)^{i+1} A_i A_{i+1}^2$$

avec la convention $A_{i+1} = A_1$ lorsque $i = 2p$ ($A_i A_{i+1}^2$ étant le carré de la distance entre les points A_i et A_{i+1}) et

$$\Delta(A_1, A_2, \dots, A_{2p-1}, A_{2p}) = \sum_{i=1}^{i=2p} (-1)^{i+1} \overrightarrow{OA_i} \overrightarrow{OA_{i+1}}$$

Alors, l'expression $\Delta(A_1, A_2, \dots, A_{2p-1}, A_{2p})$ est indépendante du choix du point O et a pour valeur $\frac{-1}{2} \delta(A_1, A_2, \dots, A_{2p-1}, A_{2p})$.

La notation Δ a uniquement pour but de supprimer le facteur $\frac{-1}{2}$ particulièrement encombrant dans les calculs. On a donc $\Delta = \frac{-1}{2} \delta$.

Lorsqu'aucune ambiguïté n'est possible, nous abrégons les notations en posant

$$\delta(A_1, A_2, \dots, A_{2p-1}, A_{2p}) = \delta(A_1, \dots, A_{2p})$$

ou

$$\Delta(A_1, A_2, \dots, A_{2p-1}, A_{2p}) = \Delta(A_1, \dots, A_{2p})$$

et en convenant que $A_{2p+r} = A_r$ lorsque $1 \leq r \leq p$. On a, en explicitant

$$\delta(A_1, A_2, \dots, A_{2p-1}, A_{2p}) = A_1 A_2^2 - A_2 A_3^2 + \dots + (-1)^{i+1} A_i A_{i+1} + \dots - A_{2p} A_1^2$$

$$\Delta(A_1, A_2, \dots, A_{2p-1}, A_{2p}) = \overrightarrow{OA_1} \cdot \overrightarrow{OA_2} - \overrightarrow{OA_2} \cdot \overrightarrow{OA_3} + \dots + \overrightarrow{OA_{2p-1}} \cdot \overrightarrow{OA_{2p}} - \overrightarrow{OA_{2p}} \cdot \overrightarrow{OA_1}$$

Rappelons que $\Delta(A_1, A_2, A_3, A_4) = \overrightarrow{A_1 A_3} \cdot \overrightarrow{A_2 A_4}$, l'identité d'Euler étant l'égalité

$$\overrightarrow{A_1 A_3} \cdot \overrightarrow{A_2 A_4} + \overrightarrow{A_1 A_4} \cdot \overrightarrow{A_3 A_2} + \overrightarrow{A_1 A_2} \cdot \overrightarrow{A_4 A_3} = 0$$

Solution:

La démonstration de l'égalité $\Delta = \frac{-1}{2} \delta$ effectuée pour $2p = 4$ (chapitre I), reprend les mêmes arguments.

Exercice 7.3.2

On désigne par Rot la rotation circulaire à gauche effectuée sur la liste $\{A_1, A_2, \dots, A_{2p-1}, A_{2p}\}$ définie par l'action

$$Rot(A_1, A_2, \dots, A_{2p-1}, A_{2p}) = (A_2, A_3, \dots, A_{2p}, A_1)$$

1. L'identité d'Euler devient l'identité

$$\sum_{j=0}^{(2p-1)-1} \Delta(A_1, Rot^j(A_2, \dots, A_{2p-1}, A_{2p})) = 0$$

Pour tout $k \geq 1$, on a l'identité

$$\sum_{j=0}^{j=2(2p-1)-1} (-1)^j \Delta(A_1, A_2, \dots, A_k, Rot^j(B_1, B_2, \dots, B_{2p-1})) = 0$$

(on peut remplacer $4p-3$ par $4p-3 \equiv 0$ modulo $2p$).

2. La formule d'Euler se généralise selon

$$\sum_{j=0}^{j=(2k-1)(2p-1)-1} \Delta(Rot^j(A_1, A_2, \dots, A_{2k-1}), Rot^j(B_1, B_2, \dots, B_{2p-1})) = 0$$

pour $k \neq p$. Lorsque $k = p$, on a, pour $q \geq 0$,

$$\begin{aligned} & \sum_{j=0}^{j=(2p-2)+q(2p-1)} \Delta(Rot^j(A_1, A_2, \dots, A_{2p-1}), Rot^j(B_1, B_2, \dots, B_{2p-1})) \\ &= (q+1) \Delta(A_1, B_2, A_3, B_4, \dots, A_{2p-1}, B_1, A_2, B_3, \dots, A_{2p-2}, B_{2p-1}) \end{aligned}$$

pour $k = p$.

Plus généralement, soient E le plan ou l'espace et $f : E \times E = \mathbb{R}$ une fonction vérifiant $f(M_1, M_2) = f(M_2, M_1)$ pour tous points $M_1, M_2 \in E$. Le lecteur vérifiera rapidement que les identités d'Euler (et toute autre formule trouvée antérieurement dont la démonstration utilise uniquement la sommation sous forme de carrés de Δ) sont valables lorsque Δ est remplacé par Δ_f défini par

$$\Delta_f(A_1, A_2, \dots, A_{2p-1}, A_{2p}) = \sum_{i=1}^{i=2p} (-1)^{i+1} f(A_i, A_{i+1})$$

La géométrie euclidienne traditionnelle correspond donc à $f(M_1, M_2) = M_1 M_2^\alpha$ avec $\alpha = 2$.

Solution:

Posons

$$\delta_i = \delta(A_1, Rot^i(A_2, \dots, A_{2p-1}, A_{2p}))$$

Développons chaque δ_i $0 \leq i \leq 8$ en disposant horizontalement chaque expression. La sommation des termes de la première colonne du tableau ainsi obtenu, est la somme

$$A_1 A_2^2 + A_1 A_3^2 + \dots + A_1 A_{2p-1}^2 + A_1 A_{2p}^2$$

celle de la dernière est la somme

$$-A_1 A_{2p}^2 - A_1 A_2^2 - A_1 A_3^2 + \dots - A_1 A_{2p-1}^2$$

Le total des deux colonnes est donc nul.

Soit la suite infinie

$$I = \{2, 3, \dots, 2p-1, 2p, 2, 3, \dots, 2p-1, 2p, \dots, 2, 3, \dots, 2p-1, 2p, \dots\}$$

On note (I_i) le terme de la suite I situé à la i -ème position et on pose $T(I_i) = I_{i+1}$. Le premier terme de la k -ième colonne du tableau précité est de la forme $(-1)^k A_{2k} A_{2k+1}$, les termes suivants de cette même colonne sont de la forme $(-1)^k A_{T^j(2k)} A_{T^j(2k+1)}$ pour $1 \leq j \leq 2p-2$. Il suit que la somme des termes des colonnes $2k$ et $2k+1$ est nulle, pour $1 \leq k \leq p-1$, ce qui implique $\sum_{i=0}^{i=2p-2} \delta_i = 0$. La question 2) se démontre de la même façon.

Exercice 7.3.3

1. On a

$$\Delta(A_1, A_2, \dots, A_{2p-1}, A_{2p}) = (-1)^k \Delta(\text{Rot}^k(A_1, A_2, \dots, A_{2p-1}, A_{2p}))$$

$$\Delta(A_1, A_2, \dots, A_{2p-1}, A_{2p}) = \Delta(A_{2p}, A_{2p-1}, \dots, A_2, A_1)$$

2.

$$\begin{aligned} \Delta(A_1, A_2, \dots, A_i, A_{i+1}, \dots, A_{2p-1}, A_{2p}) &= \Delta(A_1, A_2, \dots, A_{i+1}, A_i, \dots, A_{2p-1}, A_{2p}) \\ &\quad + (-1)^{i+1} \Delta(A_i, A_{i+2}, A_{i+1}, A_{i-1}) \end{aligned}$$

3. Pour i entier avec $2i < 2p$

$$\begin{aligned} \Delta(A_1, A_2, \dots, A_{2i}, A_{2i+1}, \dots, A_{2p-1}, A_{2p}) \\ = \Delta(A_1, A_2, \dots, A_{2i-1}, A_{2i}) + \Delta(A_1, A_{2i}, A_{2i+1}, \dots, A_{2p}) \end{aligned}$$

ou encore

$$\begin{aligned} \Delta(A_1, A_2, \dots, A_{2i}, A_{2i+1}, \dots, A_{2p-1}, A_{2p}) &= \Delta(A_1, A_2, \dots, A_{2i-1}, A_{2i}) \\ &\quad + \Delta(A_{2i+1}, A_{2i+2}, \dots, A_{2p-1}, A_{2p}) + \Delta(A_1, A_{2i}, A_{2i+1}, A_{2p}) \end{aligned}$$

Il résulte directement de ce qui précède que, pour k pair

$$\sum_{j=0}^{j=k} \Delta(\text{Rot}^j(A_1, A_2, \dots, A_{2p-1}, A_{2p})) = \Delta(A_1, A_2, \dots, A_{2p-1}, A_{2p})$$

et pour k impair

$$\sum_{j=0}^{j=k} \Delta(\text{Rot}^j(A_1, A_2, \dots, A_{2p-1}, A_{2p})) = 0$$

et, pour k quelconque

$$\sum_{j=0}^{j=k} (-1)^j \Delta(\text{Rot}^j(A_1, A_2, \dots, A_{2p-1}, A_{2p})) = (j+1) \Delta(A_1, A_2, \dots, A_{2p-1}, A_{2p})$$

Fixons les points A_i pour $1 \leq i \leq n = 2p$ et effectuons toutes les permutations possibles sur la liste $\{A_1, \dots, A_n\}$. Pour $n = 4$, il y a $4! = 24$ quantités $\Delta(A_{i_1}, A_{i_2}, A_{i_3}, A_{i_4})$ dont $3! = 6$ sont différentes. Comme ces valeurs différentes sont disposées symétriquement par rapport à l'origine, il y a 3 valeurs a priori distinctes qui sont $\Delta_1 = \Delta(A_1, A_2, A_3, A_4)$, $\Delta_2 = \Delta(A_1, A_3, A_4, A_2)$, $\Delta_3 = \Delta(A_1, A_4, A_2, A_3)$, avec $\Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3 = 0$.

Pour $n = 6$, il y a $6! = 720$ quantités $\Delta(A_{i_1}, A_{i_2}, A_{i_3}, A_{i_4}, A_{i_5}, A_{i_6})$ dont $5! = 120$ sont différentes. Au signe près, il y a 60 valeurs a priori distinctes.

Solution:

L'assertion 1) est directe. Pour 2), on est ramené à comparer $\delta(A_1, A_2, \dots, A_{2p-1}, A_{2p})$ et $\delta(A_2, A_1, \dots, A_{2p-1}, A_{2p})$.
Posons

$$\delta_{1,2} \equiv \delta(A_1, A_2, \dots, A_i, A_{i+1}, \dots, A_{2p-1}, A_{2p})$$

$$\delta_{2,1} \equiv \delta(A_1, A_2, \dots, A_{i+1}, A_i, \dots, A_{2p-1}, A_{2p})$$

On a:

$$\delta_{1,2} = A_1 A_2^2 - \dots + (-1)^i A_{i-1} A_i^2 + (-1)^{i+1} A_i A_{i+1}^2 + (-1)^{i+2} A_{i+1} A_{i+2}^2 + \dots + A_{2p-1} A_{2p}^2 - A_1 A_{2p}^2$$

$$\delta_{2,1} = A_1 A_2^2 - \dots + (-1)^i A_{i-1} A_{i+1}^2 + (-1)^{i+1} A_i A_{i+1}^2 + (-1)^{i+2} A_i A_{i+2}^2 + \dots + A_{2p-1} A_{2p}^2 - A_2 A_{2p}^2$$

Ainsi

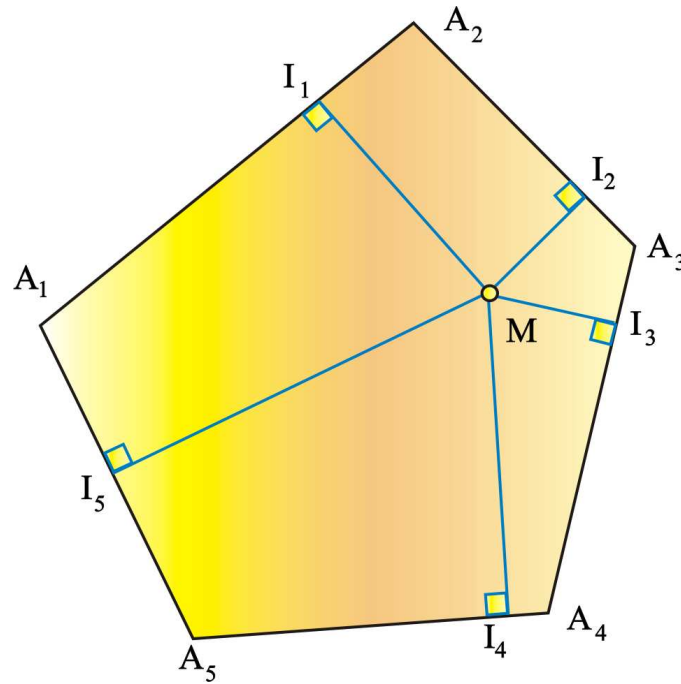
$$\begin{aligned} \delta_{1,2} - \delta_{2,1} &= (-1)^i A_{i-1} A_i^2 + (-1)^{i+2} A_{i+1} A_{i+2}^2 + (-1)^{i+1} A_{i-1} A_{i+1}^2 + (-1)^{i+3} A_i A_{i+2}^2 \\ &= (-1)^{i+1} \delta(A_i, A_{i+2}, A_{i+1}, A_{i-1}) \end{aligned}$$

La troisième assertion est directe.

Exercice 7.3.4 *Un exemple*

Soit n un entier et $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$ des points distincts 2 à 2. Pour M un point quelconque du plan distinct des A_i , on définit pour $i = 1, 2, \dots, n$, le point I_i égal à la projection orthogonale sur (A_i, A_{i+1}) du point M (on pose $A_{n+1} = A_1$). Alors:

$$\Delta(A_1, I_1, A_2, I_2, \dots, A_n, I_n) = 0$$



Solution:

On a, pour tout i , $\Delta(A_i, M, A_{i+1}, I_i) = 0$ donc:

$$A_i M^2 - M A_{i+1}^2 + A_{i+1} I_i^2 - I_i A_i^2 = 0$$

En écrivant les relations pour $i = 1, 2, \dots, n$ et en ajoutant membre à membre, il reste

$$(A_2 I_1^2 - I_1 A_1^2) + \dots + (A_{i+1} I_i^2 - I_i A_i^2) + \dots + (A_1 I_n^2 - I_n A_n^2) = 0$$

égal à $-\Delta(A_1, I_1, A_2, I_2, \dots, A_n, I_n)$.

Exercice 7.3.5 propriétés de linéarité

1. Soient k_i des réels pour $1 \leq i \leq 2p$. Alors

$$\begin{aligned} & \Delta(A_1, \dots, A_{j-1}, M, A_{j+1}, \dots, A_{2p}) - \Delta(A_1, \dots, A_{j-1}, A_j, A_{j+1}, \dots, A_{2p}) \\ &= (-1)^{j+1} \overrightarrow{A_{j-1} A_{j+1}} \cdot \overrightarrow{A_j M} \\ &= \frac{(-1)^{j+1}}{\sum_{i=1}^{2p} k_i} \overrightarrow{A_{j-1} A_{j+1}} \cdot \sum_{i=1}^{2p} k_i \overrightarrow{A_j A_i} \end{aligned}$$

en ayant posé

$$M = \frac{1}{\sum_{i=1}^{2p} k_i} \sum_{i=1}^{2p} k_i A_i$$

2. Soit j un entier fixé et k_i des réels pour $1 \leq i \leq 2p$ avec $i \neq j$. On a

$$\begin{aligned} & \Delta(A_1, \dots, A_{j-1}, M, A_{j+1}, \dots, A_{2p}) - \Delta(A_1, \dots, A_{j-1}, A_j, A_{j+1}, \dots, A_{2p}) \\ &= (-1)^{j+1} \overrightarrow{A_{j-1} A_{j+1}} \cdot \left(\sum_{i \neq j, i \in [1; 2p]} k_i \overrightarrow{A_j A_i} \right) \end{aligned}$$

en ayant posé

$$M = \sum_{i \neq j} k_i A_i + (1 - \sum_{i \neq j} k_i) A_j$$

équivalent à

$$\overrightarrow{A_j M} = \sum_i k_i \overrightarrow{A_j A_i}$$

3. Soit j un entier fixé et $m > j$. On a, pour $k_j, k_{j+1}, \dots, k_i, \dots, k_{m-1} \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} & \Delta(A_1, \dots, A_j, M, A_{j+2}, \dots, A_i, \dots, A_{2p}) - \Delta(A_1, \dots, A_j, A_{j+1}, A_{j+2}, \dots, A_i, \dots, A_{2p}) \\ &= (-1)^{j+1} \overrightarrow{A_j A_{j+2}} \cdot (k_j \overrightarrow{A_m A_j} + (k_{j+1} - 1) \overrightarrow{A_m A_{j+1}} + k_{j+2} \overrightarrow{A_m A_{j+2}} + \dots \\ &+ k_i \overrightarrow{A_m A_i} + \dots + k_{m-1} \overrightarrow{A_m A_{m-1}}) \end{aligned}$$

en ayant défini le point M par

$$\begin{aligned} M &= k_j A_j + k_{j+1} A_{j+1} + k_{j+2} A_{j+2} + \dots + k_i A_i + \dots + k_{m-1} A_{m-1} \\ &+ (1 - k_j - k_{j+1} - \dots - k_i - \dots - k_{m-1}) A_m \end{aligned}$$

Explicitons quelques exemples. En posant

$$M = a B_1 + b B_2 + c B_3 + d B_4 + (1 - a - b - c - d) B_5$$

on obtient

$$\begin{aligned} & \Delta(A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, B_1, M, B_3, B_4, B_5) - \Delta(A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, B_1, B_2, B_3, B_4, B_5) \\ &= -\overrightarrow{B_3 B_1} \cdot (a \overrightarrow{B_5 B_1} + (b-1) \overrightarrow{B_5 B_2} + c \overrightarrow{B_5 B_3} + d \overrightarrow{B_5 B_4}) \end{aligned}$$

Pour $k \in \mathbb{R}$,

$$\Delta(A_1, A_2, k A_3 + (1-k) A_4, \dots, A_{2p}) = \Delta(A_1, A_2, A_3, A_4, \dots, A_{2p}) + (1-k) \overrightarrow{A_4 A_2} \cdot \overrightarrow{A_4 A_3}$$

De même

$$\begin{aligned} & \Delta(A_1, A_2, A_3, A_4, (1-k) B_1 + k A_1, B_2, B_3, B_4) - \Delta(A_1, A_2, A_3, A_4, B_1, B_2, B_3, B_4) \\ &= (-1)^6 \overrightarrow{A_4 B_2} \cdot (k \overrightarrow{B_1 A_1} + (1-k) \overrightarrow{B_1 B_1}) = k \overrightarrow{A_4 B_2} \cdot \overrightarrow{B_1 A_1} \end{aligned}$$

En réitérant

$$\begin{aligned} & \Delta(A_1, A_2, k A_1 + (1-k) A_6, A_4, A_5, A_6, k_1 A_7 + (1-k_1) A_1, A_8, A_9, A_{10}) \\ & - \Delta(A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6, A_7, A_8, A_9, A_{10}) \\ &= \overrightarrow{A_4 A_2} \cdot \overrightarrow{A_6 A_3} + \overrightarrow{A_1 A_7} \cdot \overrightarrow{A_8 A_6} + k \overrightarrow{A_2 A_4} \cdot \overrightarrow{A_6 A_1} + k_1 \overrightarrow{A_7 A_1} \cdot \overrightarrow{A_8 A_6} \end{aligned}$$

Solution:

Montrons 1). On a

$$\begin{aligned} & \Delta(A_1, \dots, A_{j-1}, M, A_{j+1}, \dots, A_{2p}) \\ &= \sum_{i=1}^{i=2p} \sum_{i \neq j} \sum_{i \neq j+1} (-1)^{i+1} \overrightarrow{OA_i} \cdot \overrightarrow{OA_{i+1}} + (-1)^j (\overrightarrow{OA_{j-1}} \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{OA_{j+1}}) \\ &= \sum_{i=1}^{i=2p} \sum_{i \neq j} \sum_{i \neq j+1} (-1)^{i+1} \overrightarrow{OA_i} \cdot \overrightarrow{OA_{i+1}} + (-1)^j \overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{A_{j-1} A_{j+1}} \\ &= \sum_{i=1}^{i=2p} \sum_{i \neq j} \sum_{i \neq j+1} (-1)^{i+1} \overrightarrow{OA_i} \cdot \overrightarrow{OA_{i+1}} + (-1)^j (\overrightarrow{OA_j} + \overrightarrow{A_j M}) \cdot \overrightarrow{A_{j-1} A_{j+1}} \\ &= \Delta(A_1, \dots, A_{j-1}, A_j, A_{j+1}, \dots, A_{2p}) + (-1)^j \overrightarrow{A_j M} \cdot \overrightarrow{A_{j-1} A_{j+1}} \\ &= \Delta(A_1, \dots, A_{j-1}, A_j, A_{j+1}, \dots, A_{2p}) + (-1)^j \frac{1}{\sum_{i=1}^{2p} k_i} \sum_{i=1}^{2p} k_i \overrightarrow{A_j A_i} \cdot \overrightarrow{A_{j-1} A_{j+1}} \\ &= \Delta(A_1, \dots, A_{j-1}, A_j, A_{j+1}, \dots, A_{2p}) + \frac{(-1)^{j+1}}{\sum_{i=1}^{2p} k_i} \overrightarrow{A_{j-1} A_{j+1}} \cdot \sum_{i=1}^{2p} k_i \overrightarrow{A_j A_i} \end{aligned}$$

Les autres assertions sont conséquences plus ou moins directe de cette formule (pour 3), l'expression $\overrightarrow{A_{j+1} M}$ se simplifie comme indiqué).

Notons que

Exercice 7.3.6

1. Pour $p = 2r$ pair

$$\Delta(B_1, \dots, B_{2r}, A_1, \dots, A_{2r}) = \Delta(A_1, \dots, A_{2r}, B_1, \dots, B_{2r})$$

Pour $p = 2r + 1$ impair

$$\Delta(B_1, \dots, B_{2r+1}, A_1, \dots, A_{2r+1}) = -\Delta(A_1, \dots, A_{2r+1}, B_1, \dots, B_{2r+1})$$

2.

$$\Delta(A_{2r+1}, \dots, A_1, B_{2r+1}, \dots, B_1) = -\Delta(A_1, \dots, A_{2r+1}, B_1, \dots, B_{2r+1})$$

$$\Delta(A_{2r}, \dots, A_1, B_{2r}, \dots, B_1) = \Delta(A_1, \dots, A_{2r}, B_1, \dots, B_{2r})$$

3.

$$\Delta(A_1, \dots, A_{2r+1}, A_1, \dots, A_{2r+1}) = 0$$

$$\Delta(A_1, \dots, A_{2r}, A_1, \dots, A_{2r}) = 2 \Delta(A_1, \dots, A_{2r})$$

Exercice 7.3.7

1. Soit

$$M = \frac{1}{\sum_{i=1}^{2p} k_i} \sum_{i=1}^{2p} k_i A_i$$

on a

$$\sum_{j=1}^{i=2p} \Delta(A_1, \dots, A_{j-1}, M, A_{j+1}, \dots, A_{2p}) = (2p - 2) \Delta(A_1, \dots, A_{j-1}, A_j, A_{j+1}, \dots, A_{2p})$$

2. Avec des notations naturelles, posons, pour $r \geq 0$,

$$M_r = \frac{1}{\sum_{i=1}^{2p} k_i} \sum_{i=1}^{2p} k_i A_{i+r}$$

Alors, à j fixé, on a

$$\begin{aligned} & \sum_{r=1}^{i=2p} \Delta(A_1, \dots, A_{j-1}, M_r, A_{j+1}, \dots, A_{2p}) \\ &= (2r) \Delta(A_1, \dots, A_{j-1}, A_j, A_{j+1}, \dots, A_{2p}) + (-1)^{j+1} \overrightarrow{A_{r-1}A_{r+1}} \cdot \sum_{i=1}^{2p} \overrightarrow{A_r A_i} \end{aligned}$$

Solution:

On peut supposer $\sum_{i=1}^{2p} k_i = 1$. On a :

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^{i=2p} \Delta(A_1, \dots, A_{j-1}, M, A_{j+1}, \dots, A_{2p}) \\ &= \sum_{j=1}^{i=2p} \Delta(A_1, \dots, A_{j-1}, A_j, A_{j+1}, \dots, A_{2p}) + \sum_{j=1}^{i=2p} (-1)^{j+1} \overrightarrow{A_{j-1}A_{j+1}} \cdot \sum_{i=1}^{2p} k_i \overrightarrow{A_jA_i} \\ &= (2p) \Delta(A_1, \dots, A_{j-1}, A_j, A_{j+1}, \dots, A_{2p}) + \sum_{i=1}^{2p} k_i \sum_{j=1}^{i=2p} (-1)^{j+1} \overrightarrow{A_{j-1}A_{j+1}} \cdot \overrightarrow{A_jA_i} \end{aligned}$$

Or

$$\overrightarrow{A_{j-1}A_{j+1}} \cdot \overrightarrow{A_jA_i} = \overrightarrow{OA_{j+1}} \cdot \overrightarrow{OA_i} - \overrightarrow{OA_{j-1}} \cdot \overrightarrow{OA_i} - \overrightarrow{OA_{j+1}} \cdot \overrightarrow{OA_j} + \overrightarrow{OA_j} \cdot \overrightarrow{OA_{j-1}}$$

Comme

$$\sum_{j=1}^{2p} (\overrightarrow{OA_{j+1}} - \overrightarrow{OA_{j-1}}) = 0$$

et

$$\sum_{j=1}^{2p} (-1)^{j+1} (-\overrightarrow{OA_{j+1}} \cdot \overrightarrow{OA_j} + \overrightarrow{OA_j} \cdot \overrightarrow{OA_{j-1}}) = (-2) \Delta(A_1, \dots, A_{j-1}, A_j, A_{j+1}, \dots, A_{2p})$$

on obtient

$$\sum_{j=1}^{i=2p} \Delta(A_1, \dots, A_{j-1}, M, A_{j+1}, \dots, A_{2p}) = (2p - 2) \Delta(A_1, \dots, A_{j-1}, A_j, A_{j+1}, \dots, A_{2p})$$

On peut toujours supposer $\sum_{i=1}^{2p} k_i = 1$. On a

$$\begin{aligned} & \sum_{j=r}^{i=2p} \Delta(A_1, \dots, A_{j-1}, M_r, A_{j+1}, \dots, A_{2p}) \\ &= \sum_{r=1}^{i=2r} \Delta(A_1, \dots, A_{j-1}, A_j, A_{j+1}, \dots, A_{2p}) + \sum_{r=1}^{i=2p} (-1)^{j+1} \overrightarrow{A_{j-1}A_{j+1}} \cdot \sum_{i=1}^{2p} k_{r-1+i} \overrightarrow{A_jA_i} \\ &= (2r) \Delta(A_1, \dots, A_{j-1}, A_j, A_{j+1}, \dots, A_{2p}) + (-1)^{j+1} \overrightarrow{A_{j-1}A_{j+1}} \cdot \sum_{r=1}^{i=2p} \sum_{i=1}^{2p} k_{r-1+i} \overrightarrow{A_jA_i} \end{aligned}$$

Dans la double sommation, le coefficient de $\overrightarrow{A_rA_i}$ est $\sum_{i=1}^{2p} k_i$, donc

$$\begin{aligned} & \sum_{r=1}^{i=2p} \Delta(A_1, \dots, A_{j-1}, M_r, A_{j+1}, \dots, A_{2p}) \\ &= (2r) \Delta(A_1, \dots, A_{j-1}, A_j, A_{j+1}, \dots, A_{2p}) + (-1)^{j+1} \overrightarrow{A_{r-1}A_{r+1}} \cdot \sum_{i=1}^{2p} \overrightarrow{A_rA_i} \end{aligned}$$

Exercice 7.3.8

1. On a

$$\Delta(M_1, \dots, M_j, \dots, M_{2p}) - \Delta(A_1, \dots, A_j, \dots, A_{2p}) = \sum_{i=1}^{i=2p} (-1)^{i+1} \overrightarrow{A_iM_i} \cdot \overrightarrow{M_{i-1}M_{i+1}}$$

Rappelons la convention de cyclicité $M_{2p+r} = M_r$, $M_0 = M_{2p}$.

2. Lorsque $A_{j+1} = A_{j-1}$, l'expression

$$\Delta(A_1, \dots, A_{j-1}, M, A_{j+1}, \dots, A_{2p})$$

est constante (indépendante du choix de M).

Exercice 7.3.9 *Action des translations*

Soient $A_1, \dots, A_i, \dots, A_{2p}$ des points d'un espace affine euclidien et $\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_i, \dots, \vec{u}_{2p}$ des vecteurs. On note $A_i + \vec{u}_i$ le point translaté du point A_i par la translation de vecteur $\vec{u}_i$.

1. On a

$$\begin{aligned} & \Delta(A_1 + \vec{u}_1, \dots, A_i + \vec{u}_i, \dots, A_{2p} + \vec{u}_{2p}) - \Delta(A_1, \dots, A_i, \dots, A_{2p}) \\ &= \sum_{i=1}^{i=2p} (-1)^{i+1} \overrightarrow{A_{i-1}A_{i+1}} \cdot \vec{u}_i + \sum_{i=1}^{i=2p} (-1)^{i+1} \vec{u}_i \cdot \overrightarrow{u_{i+1}} \end{aligned}$$

2. Lorsque tous les $\vec{u}_i$ sont égaux à un même vecteur $\vec{u}$,

$$\Delta(A_1 + \vec{u}, \dots, A_i + \vec{u}, \dots, A_{2p} + \vec{u}) = \Delta(A_1, \dots, A_i, \dots, A_{2p})$$

(invariance par translation)

3. Lorsque tous les $\vec{u}_i$ sont nuls pour tous les indices i pairs

$$\Delta(A_1 + \vec{u}_1, \dots, A_i + \vec{u}_i, \dots, A_{2p} + \vec{u}_{2p}) = \Delta(A_1, \dots, A_i, \dots, A_{2p})$$

(idem lorsque tous les $\vec{u}_i$ sont nuls pour tous les indices i impairs)

4. Soient $\vec{w}_1, \dots, \vec{w}_i, \dots, \vec{w}_{2p}$ des vecteurs. On a

$$\begin{aligned} & \Delta(A_1 + \vec{u}_1 + \vec{w}_1, \dots, A_i + \vec{u}_i + \vec{w}_i, \dots, A_{2p} + \vec{u}_{2p} + \vec{w}_{2p}) - \Delta(A_1, \dots, A_i, \dots, A_{2p}) \\ &= \sum_{i=1}^{i=2p} (-1)^{i+1} \overrightarrow{A_{i-1}A_{i+1}} \cdot \vec{u}_i + \sum_{i=1}^{i=2p} (-1)^{i+1} \overrightarrow{A_{i-1}A_{i+1}} \cdot \vec{w}_i \\ &+ \sum_{i=1}^{i=2p} (-1)^{i+1} \vec{u}_i \cdot \overrightarrow{u_{i+1}} + \sum_{i=1}^{i=2p} (-1)^{i+1} \vec{w}_i \cdot \overrightarrow{w_{i+1}} + \sum_{i=1}^{i=2p} (-1)^{i+1} (\vec{u}_i \cdot \overrightarrow{w_{i+1}} + \vec{w}_i \cdot \overrightarrow{u_{i+1}}) \end{aligned}$$

En explicitant, la première relation s'écrit

$$\begin{aligned} & \Delta(A_1 + \vec{u}_1, \dots, A_i + \vec{u}_i, \dots, A_{2p} + \vec{u}_{2p}) - \Delta(A_1, \dots, A_i, \dots, A_{2p}) \\ &= \overrightarrow{A_{2p}A_2} \cdot \vec{u}_1 - \overrightarrow{A_1A_3} \cdot \vec{u}_2 + \overrightarrow{A_2A_4} \cdot \vec{u}_3 + \dots + \overrightarrow{A_{2p-2}A_{2p}} \cdot \vec{u}_{2p-1} - \overrightarrow{A_{2p-1}A_1} \cdot \vec{u}_{2p} \\ &+ \vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2 - \vec{u}_2 \cdot \vec{u}_3 + \vec{u}_3 \cdot \vec{u}_4 - \dots + \vec{u}_{2p} \cdot \vec{u}_{2p-1} - \vec{u}_1 \cdot \vec{u}_{2p} \end{aligned}$$

On obtient également

$$\Delta(A_1 + \vec{u}_1, \dots, A_i + \vec{u}_i, \dots, A_{2p} + \vec{u}_{2p}) = \Delta(A_1, \dots, A_i, \dots, A_{2p})$$

lorsque $\vec{u}_i = (-1)^i \vec{u}$ pour tout i , $\vec{u}$ désignant un vecteur fixe.

Solution:

On a

$$\begin{aligned} & \Delta(A_1 + \vec{u}_1, \dots, A_i + \vec{u}_i, \dots, A_{2p} + \vec{u}_{2p}) \\ &= \sum_{i=0}^{i=p-1} [(\overrightarrow{OA_{2i+1}} + \vec{u}_{2i+1}) \cdot (\overrightarrow{OA_{2i}} + \vec{u}_{2i}) - (\overrightarrow{OA_{2i}} + \vec{u}_{2i}) \cdot (\overrightarrow{OA_{2i+3}} + \vec{u}_{2i+3})] \\ &= \sum_{i=0}^{i=p-1} (\overrightarrow{OA_{2i+1}} \cdot \overrightarrow{OA_{2i}} - \overrightarrow{OA_{2i}} \cdot \overrightarrow{OA_{2i+3}}) + \sum_{i=0}^{i=p-1} (\vec{u}_{2i+1} \cdot \vec{u}_{2i} - \vec{u}_{2i} \cdot \vec{u}_{2i+3}) \\ &+ \sum_{i=0}^{i=p-1} [\overrightarrow{OA_{2i+1}} \cdot \vec{u}_{2i+2} + \overrightarrow{OA_{2i+2}} \cdot \vec{u}_{2i+1} - \overrightarrow{OA_{2i+3}} \cdot \vec{u}_{2i+2} - \overrightarrow{OA_{2i+2}} \cdot \vec{u}_{2i+3}] \\ &= \sum_{i=0}^{i=p-1} (\overrightarrow{OA_{2i+1}} \cdot \overrightarrow{OA_{2i}} - \overrightarrow{OA_{2i}} \cdot \overrightarrow{OA_{2i+3}}) + \sum_{i=0}^{i=p-1} (\vec{u}_{2i+1} \cdot \vec{u}_{2i} - \vec{u}_{2i} \cdot \vec{u}_{2i+3}) \\ &= \Delta(A_1, \dots, A_i, \dots, A_{2p}) + \sum_{i=1}^{i=2p} (-1)^{i+1} \overrightarrow{A_{i-1}A_{i+1}} \cdot \vec{u}_i + \sum_{i=1}^{i=2p} (-1)^{i+1} \vec{u}_i \cdot \overrightarrow{u_{i+1}} \end{aligned}$$

L'invariance par translation est immédiate en revenant à la définition de départ de $\Delta(A_1, \dots, A_i, \dots, A_{2p})$. L'assertion suivante résulte de $\vec{u}_i \cdot \vec{u}_{i+1} = 0$. La dernière assertion s'obtient par substitutions directes.

7.4 Multi-rapport formel

Exercice 7.4.1 Définition

Soient X un ensemble, $f : X \times X = A$ une application à valeurs dans un corps commutatif A et vérifiant la propriété $f(M, M) = 0$ pour tout $M \in X$. Etant donné un entier pair $n = 2p$, on pose formellement

$$P_f(A_1, A_2, \dots, A_{2p-1}, A_{2p}) = \prod_{i=0}^{p-1} \frac{f(A_{2i+1}, A_{2i+2})}{f(A_{2i+2}, A_{2i+3})} \quad (2)$$

avec la convention $A_{2i+1} = A_1$ when $i = p - 1$.

La fonction f est dite symétrique (resp. antisymétrique) lorsque $f(M_1, M_2) = f(M_2, M_1)$ (resp. $f(M_1, M_2) = -f(M_2, M_1)$) pour tous $M_1, M_2 \in X$.

Le choix $f(M, M_1) = \overline{MM_1}$ et $p = 2$ fournit

$$P_f(A_1, A_2, A_3, A_4) = \frac{\overline{A_1 A_2} \cdot \overline{A_3 A_4}}{\overline{A_2 A_3} \cdot \overline{A_4 A_1}} \quad (3)$$

égal au birapport $h(A_1, A_3, A_2, A_4)$ puisque $h(A, B, C, D) = \frac{\overline{CA} \cdot \overline{DB}}{\overline{CB} \cdot \overline{DA}}$. Nous renvoyons au chapitre "Le multi-rapport" pour d'autres commentaires.

On a , pour $k \in \mathbb{N}^*$

$$P_f(Rot^k(A_1, A_2, \dots, A_{2p-1}, A_{2p})) = P_f(A_1, A_2, \dots, A_{2p-1}, A_{2p})^{(-1)^k} \quad (4)$$

d'où

$$P_f(A_{p+1}, A_{p+2}, \dots, A_{2p}, A_1, A_2, \dots, A_{p-1}) = P_f(A_1, A_2, \dots, A_{2p-1}, A_{2p})^{(-1)^p} \quad (5)$$

Lorsque f est symétrique ou antisymétrique, on obtient

$$P_f(A_1, A_2, \dots, A_{2p-1}, A_{2p}) = P_f(A_{2p}, A_{2p-1}, \dots, A_2, A_1)$$

(il apparaît $\prod_{i=1}^{i=2p} \frac{f(A_i, A_{i+1})}{f(A_{i+1}, A_1)} = (-1)^{2p}$ pour f antisymétrique)

Il résulte directement que, pour $k \geq 0$

$$\prod_{j=0}^{j=2k} P_f(Rot^j(A_1, A_2, \dots, A_{2p-1}, A_{2p})) = P_f(A_1, A_2, \dots, A_{2p-1}, A_{2p})$$

et

$$\prod_{j=0}^{j=2k+1} P_f(Rot^j(A_1, A_2, \dots, A_{2p-1}, A_{2p})) = 1$$

et, pour k quelconque

$$\prod_{j=0}^{j=k} P_f^{(-1)^j}(\text{Rot}^j(A_1, A_2, \dots, A_{2p-1}, A_{2p})) = P_f^{(k+1)}(A_1, A_2, \dots, A_{2p-1}, A_{2p})$$

La formule d'Euler est l'identité

$$\prod_{j=0}^{j=(2p-1)-1} P_f(A_1, \text{Rot}^j(A_2, \dots, A_{2p-1}, A_{2p})) = \prod_{i=2}^{i=2p} \frac{f(A_1, A_i)}{f(A_i, A_1)}$$

Le dernier terme prend la valeur 1 pour une fonction f symétrique and -1 pour une fonction antisymétrique f .

Pour tout $k \geq 1$, on a l'identité

$$\prod_{j=0}^{j=2(2p-1)-1} P_f^{(-1)^j}(A_1, A_2, \dots, A_k, \text{Rot}^j(B_1, B_2, \dots, B_{2p-1})) = 1$$

modulo $2p$.

Pour f quelconque, on a une distribution exceptionnelle, la formule d'Euler se généralise selon

$$\begin{aligned} & \prod_{j=0}^{j=(2k-1)(2p-1)-1} P_f(\text{Rot}^j(A_1, A_2, \dots, A_{2k-1}), \text{Rot}^j(B_1, B_2, \dots, B_{2p-1})) \\ &= \prod_{1 \leq i \leq 2k-1} \prod_{1 \leq j \leq 2p-1} \frac{f(A_i, B_j)}{f(B_j, A_i)} \end{aligned}$$

pour $k \neq p$. Lorsque $k = p$ et q quelconque, on obtient

$$\begin{aligned} & \prod_{j=0}^{j=(2p-2)+q(2p-1)} P_f(\text{Rot}^j(A_1, A_2, \dots, A_{2p-1}), \text{Rot}^j(B_1, B_2, \dots, B_{2p-1})) \\ &= P_f^{(q+1)}(A_1, B_2, A_3, B_4, \dots, B_{2p-2}, A_{2p-1}, B_1, A_2, B_3, \dots, A_{2p-2}, B_{2p-1}) \end{aligned}$$

(on insère les B_j entre les A_i en conservant une numérotation croissante des indices de 1 à $2p-1$, puis on insère les A_j entre les B_i en conservant à nouveau une numérotation croissante des indices de 1 à $2p-1$).

Pour f symétrique, la formule d'Euler se généralise selon

$$\prod_{j=0}^{j=(2k-1)(2p-1)-1} P_f(\text{Rot}^j(A_1, A_2, \dots, A_{2k-1}), \text{Rot}^j(B_1, B_2, \dots, B_{2p-1})) = 1$$

pour $k \neq p$.

Pour f antisymétrique, la formule d'Euler se généralise selon

$$\prod_{j=0}^{j=(2k-1)(2p-1)-1} P_f(\text{Rot}^j(A_1, A_2, \dots, A_{2k-1}), \text{Rot}^j(B_1, B_2, \dots, B_{2p-1})) = -1$$

pour $k \neq p$. Notons que

$$\begin{aligned} & P_f(A_1, A_2, \dots, A_{2i}, A_{2i+1}, \dots, A_{2p-1}, A_{2p}) \\ &= P_f(A_1, A_2, \dots, A_{2i-1}, A_{2i}) P_f(A_{2i+1}, A_{2i+2}, \dots, A_{2p-1}, A_{2p}) \frac{f[A_{2i}, A_1]}{f[A_{2i}, A_{2i+1}]} \frac{f[A_{2p}, A_{2i+1}]}{f[A_{2p}, A_1]} \end{aligned}$$

Comme $P_f(A_1, A_{2i}, A_{2i+1}, A_{2p}) = \frac{f[A_1, A_{2i}]}{f[A_{2i}, A_{2i+1}]} \frac{f[A_{2i+1}, A_{2p}]}{f[A_{2p}, A_1]}$, on obtient, pour f symétrique ou antisymétrique:

$$\begin{aligned} & P_f(A_1, A_2, \dots, A_{2i}, A_{2i+1}, \dots, A_{2p-1}, A_{2p}) \\ &= P_f(A_1, A_2, \dots, A_{2i-1}, A_{2i}) P_f(A_{2i+1}, A_{2i+2}, \dots, A_{2p-1}, A_{2p}) P_f(A_1, A_{2i}, A_{2i+1}, A_{2p}) \end{aligned}$$

En outre, pour une fonction f quelconque

$$\frac{P_f(A_1, A_2, \dots, A_i, A_{i+1}, \dots, A_{2p-1}, A_{2p})}{P_f(A_1, A_2, \dots, A_{i+1}, A_i, \dots, A_{2p-1}, A_{2p})} = \frac{P_f(A_{i-1}, A_{i+1}, A_i, A_{i+2})}{P_f^{(-1)^{i+1}}(A_{i-1}, A_i, A_{i+1}, A_{i+2})} \quad (6)$$

(avec la convention $A_i = A_{2p}$ pour $i = 0$), donc

$$\frac{P_f(A_1, A_2, A_3, A_4, \dots, A_{2p-1}, A_{2p})}{P_f(A_2, A_1, A_3, A_4, \dots, A_{2p-1}, A_{2p})} = \frac{P_f(A_{2p}, A_2, A_1, A_3)}{P_f(A_{2p}, A_1, A_2, A_3)} \quad (7)$$

CHAPITRE

8

Le multi-rapport

8 Le multi-rapport

Le multi-rapport, généralisation naturelle du birapport, permet une reformulation claire de plusieurs théorèmes de géométrie et perfectionne de nombreux résultats classiques en les plaçant dans un environnement nouveau.

8.1 Propriétés du multi-rapport

Exercice 8.1.1

Soient $n = 2p$ un entier pair et $A_1, \dots, A_i, \dots, A_n$ des points quelconques. Lorsqu'elle est définie, la quantité

$$r(A_1, \dots, A_i, \dots, A_{2p}) = \prod_{i=0}^{i=p-1} \frac{\overline{A_{2i+1}A_{2i+2}}}{\overline{A_{2i+2}A_{2i+3}}} = \frac{\overline{A_1A_2}}{\overline{A_2A_3}} \frac{\overline{A_3A_4}}{\overline{A_4A_5}} \dots \frac{\overline{A_{2p-1}A_{2p}}}{\overline{A_{2p}A_1}}$$

est appelée le multi-rapport des points $(A_i)_{1 \leq i \leq n}$ (en convenant ici que le terme A_{2i+3} est égal à A_1 lorsque $i = p - 1$ dans l'expression abrégée du produit).

Il est aisé de mémoriser cette formule. On écrit la liste

$$\begin{array}{ll} A_1, A_2, A_3, \dots, A_i, \dots, A_{2p} & \text{puis la nouvelle liste} \\ A_1, A_2, A_3, \dots, A_i, \dots, A_{2p}, A_1 & \text{puis les regroupements} \\ \overline{A_1A_2}, \overline{A_2A_3}, \overline{A_3A_4}, \dots, \overline{A_{2i+1}A_{2i+2}}, \dots, \overline{A_{2p-1}A_{2p}}, \overline{A_{2p}A_1} & \text{puis les fractions} \\ \frac{\overline{A_1A_2}}{\overline{A_2A_3}}, \frac{\overline{A_3A_4}}{\overline{A_4A_5}}, \dots, \frac{\overline{A_{2p-1}A_{2p}}}{\overline{A_{2p}A_1}} & \end{array}$$

que l'on multiplie entre elles.

Lorsque $n = 4$, on a

$$r(A_1, A_2, A_3, A_4) = \frac{\overline{A_1A_2} \cdot \overline{A_3A_4}}{\overline{A_2A_3} \cdot \overline{A_4A_1}}$$

égal au classique birapport $h(A_1, A_3, A_2, A_4)$ défini par la formule $h(A, B, C, D) = \frac{\overline{CA} \cdot \overline{DB}}{\overline{CB} \cdot \overline{DA}}$.

Le théorème de Ménélaius dans un espace affine de dimension n est traduit par l'égalité

$$\frac{\overline{M_1A_2}}{\overline{M_1A_1}} \frac{\overline{M_2A_3}}{\overline{M_2A_2}} \dots \frac{\overline{M_iA_{i+1}}}{\overline{M_iA_i}} \frac{\overline{M_{i+1}A_{i+2}}}{\overline{M_{i+1}A_{i+1}}} \dots \frac{\overline{M_{p-1}A_p}}{\overline{M_{p-1}A_{p-1}}} \frac{\overline{M_pA_1}}{\overline{M_pA_p}} = 1$$

Ici, $A_1, \dots, A_i, \dots, A_p$ désignent les intersections des droites $(A_i A_{i+1})$ avec un hyperplan fixe. La formulation équivalente

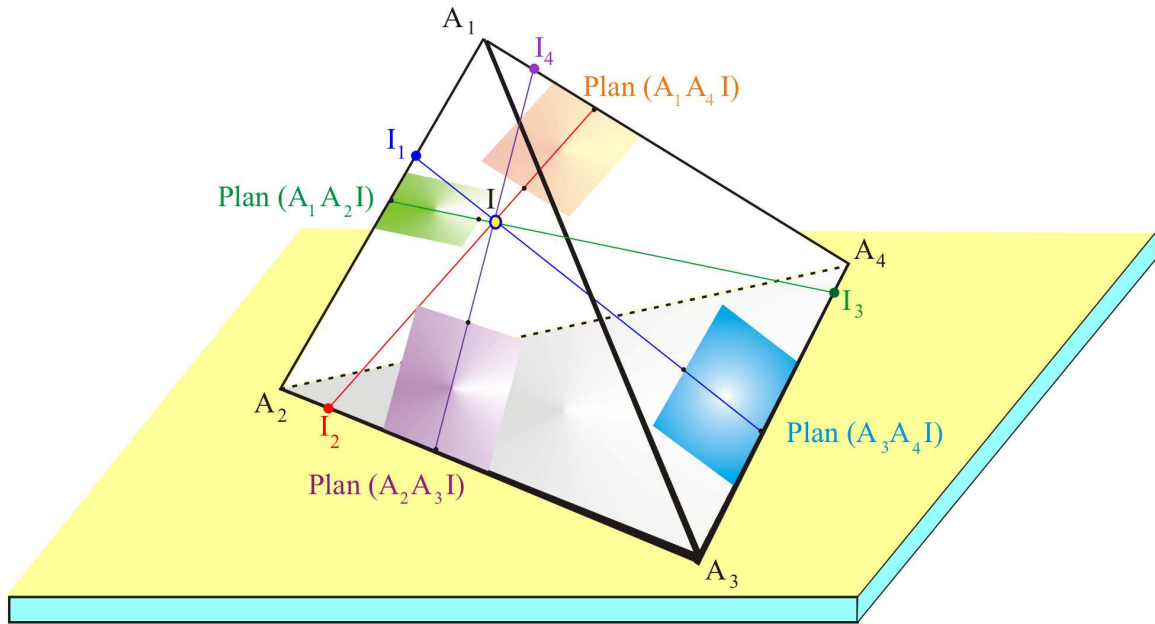
$$\frac{\overline{A_1 M_1}}{\overline{M_1 A_2}} \frac{\overline{A_2 M_2}}{\overline{M_2 A_3}} \dots \frac{\overline{A_i M_i}}{\overline{M_i A_{i+1}}} \dots \frac{\overline{A_{p-1} M_{p-1}}}{\overline{M_{p-1} A_p}} \frac{\overline{A_p M_p}}{\overline{M_p A_1}} = (-1)^p$$

est plus aisée à mémoriser (elle correspond à l'ordre logique des points rencontrés par un observateur démarrant au point A_1 , transitant par $A_2, \dots, A_i, \dots, A_p$ pour revenir à son point de départ, en rencontrant sur chaque droite $(A_i A_{i+1})$ le point intermédiaire M_i).

Le théorème de Ceva (démontré par l'auteur en dimension n) s'écrit

$$\frac{\overline{A_1 I_1}}{\overline{I_1 A_2}} \frac{\overline{A_2 I_2}}{\overline{I_2 A_3}} \dots \frac{\overline{A_i I_i}}{\overline{I_i A_{i+1}}} \dots \frac{\overline{A_{p-1} I_{p-1}}}{\overline{I_{p-1} A_p}} \frac{\overline{A_p I_p}}{\overline{I_p A_1}} = 1$$

La figure correspondant au théorème de Ceva en dimension 3 est



Ici

$$r(A_1, I_1, A_2, I_2, A_3, I_3, A_4, I_4) = \frac{\overline{A_1 I_1}}{\overline{I_1 A_2}} \frac{\overline{A_2 I_2}}{\overline{I_2 A_3}} \frac{\overline{A_3 I_3}}{\overline{I_3 A_4}} \frac{\overline{A_4 I_4}}{\overline{I_4 A_1}} = 1$$

Parmi les nombreux autres théorèmes correspondant à l'évaluation d'un multi-rapport, citons en particulier le théorème du papillon double, le théorème de Carnot, le théorème de Pratt-Wu...

En utilisant les propriétés du chapitre "Formes fondamentales" avec $f(M, N) = \overline{MN}$, nous obtenons directement

Exercice 8.1.2

Pour un entier $p \geq 2$, le multi-rapport satisfait les propriétés suivantes

1. Pour $k \in \mathbb{N}^*$, $k \geq 2$

$$r(\text{Rot}^k(A_1, A_2, \dots, A_{2p-1}, A_{2p})) = r(A_1, A_2, \dots, A_{2p-1}, A_{2p})^{(-1)^k}$$

2. L'identité Euler se traduit par la formule

$$\prod_{j=0}^{j=(2p-1)-1} r(A_1, \text{Rot}^j(A_2, \dots, A_{2p-1}, A_{2p})) = -1$$

3. On a, pour $k \geq 2$, $p \geq 2$

$$\prod_{j=0}^{j=(2k-1)(2p-1)-1} r(\text{Rot}^j(A_1, A_2, \dots, A_{2k-1}), \text{Rot}^j(B_1, B_2, \dots, B_{2p-1})) = 1$$

pour $k \neq p$. Lorsque $k = p$, on obtient

$$\begin{aligned} & \prod_{j=0}^{j=(2p-1)(2p-1)-1} r(\text{Rot}^j(A_1, A_2, \dots, A_{2p-1}), \text{Rot}^j(B_1, B_2, \dots, B_{2p-1})) \\ &= r(A_1, B_2, A_3, B_4, \dots, A_{2p-1}, B_1, A_2, B_3, A_4, \dots, B_{2p-1})^{2p-1} \end{aligned}$$

4. Le multi-rapport se scinde selon

$$\begin{aligned} & r(A_1, A_2, \dots, A_{2i}, A_{2i+1}, \dots, A_{2p-1}, A_{2p}) \\ &= r(A_1, A_2, \dots, A_{2i-1}, A_{2i}) r(A_{2i+1}, A_{2i+2}, \dots, A_{2p-1}, A_{2p}) r(A_1, A_{2i}, A_{2i+1}, A_{2p}) \end{aligned}$$

5. La permutation de deux indices consécutifs se traduit par

$$\frac{r(A_1, A_2, \dots, A_i, A_{i+1}, \dots, A_{2p-1}, A_{2p})}{r(A_1, A_2, \dots, A_{i+1}, A_i, \dots, A_{2p-1}, A_{2p})} = \frac{r(A_{i-1}, A_{i+1}, A_i, A_{i+2})}{r^{(-1)^{i+1}}(A_{i-1}, A_i, A_{i+1}, A_{i+2})}$$

donc

$$\frac{r(A_1, A_2, A_3, A_4, \dots, A_{2p-1}, A_{2p})}{r(A_2, A_1, A_3, A_4, \dots, A_{2p-1}, A_{2p})} = \frac{r(A_{2p}, A_2, A_1, A_3)}{r(A_{2p}, A_1, A_2, A_3)}$$

Pour une liste de points $\{A_1, A_2, \dots, A_i, \dots, A_{n-1}, A_n\}$, également noté $(A_1, A_2, \dots, A_i, \dots, A_{n-1}, A_n)$, la rotation circulaire à gauche est définie par l'opération

$$\text{Rot}(A_1, A_2, \dots, A_i, \dots, A_{n-1}, A_n) = \{A_2, A_3, \dots, A_i, \dots, A_{n-1}, A_n, A_1\}$$

8.2 Pappus revisité

Exercice 8.2.1

Soient deux droites distinctes Δ et Δ_1 , P_1, P_2, P_3 (resp. Q_1, Q_2, Q_3) des points distincts de Δ (resp. de Δ_1). On désigne par J_1 le point $(P_2Q_3) \cap (P_3Q_2)$, par J_2 le point $(P_1Q_3) \cap (P_3Q_1)$, par J_3 le point $(P_1Q_2) \cap (P_2Q_1)$.

1. Montrer que les points J_1, J_2, J_3 sont sur une même droite (théorème de Pappus).
2. Montrer que le multi-rapport

$$r(P_1, J_3, Q_2, J_1, P_3, J_2, Q_1, J_3, P_2, J_1, Q_3, J_2)$$

est égal à 1.

3. On pose

$$r_1 = r(P_1, P_2, P_3, J_2, Q_1, Q_2, Q_3, J_2)$$

$$r_2 = r(P_3, P_1, P_2, J_1, Q_3, Q_1, Q_2, J_1)$$

$$r_3 = r(P_2, P_3, P_1, J_3, Q_2, Q_3, Q_1, J_3)$$

Montrer que $r_1 r_2 r_3 = 1$.

4. En déduire que

$$\frac{\overline{P_3J_2}}{\overline{J_2Q_1}} \frac{\overline{Q_3J_2}}{\overline{J_2P_1}} \frac{\overline{P_2J_1}}{\overline{J_1Q_3}} \frac{\overline{Q_2J_1}}{\overline{J_1P_3}} \frac{\overline{P_1J_3}}{\overline{J_3Q_2}} \frac{\overline{Q_1J_3}}{\overline{J_3P_2}} = 1$$

Solution:

Soit B le point d'intersection des droites Δ et Δ_1 , supposés non parallèles. Le raisonnement est identique lorsque les droites sont parallèles.

Dessin = $\{A, B, C, P_1, P_2, P_3, Q_1, Q_2, Q_3\}$

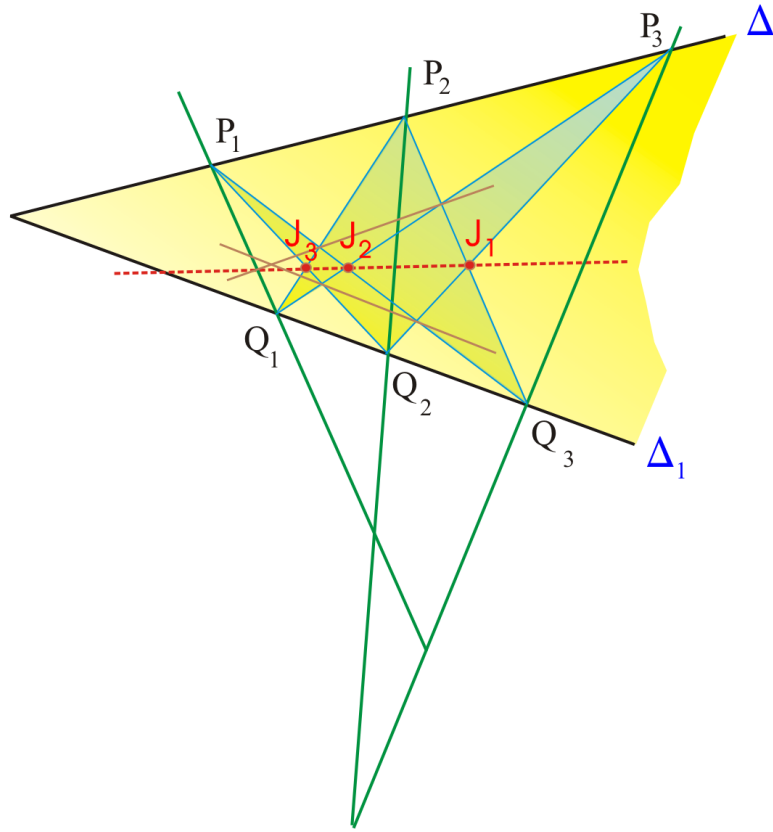
Le repère barycentrique choisi est A, B, C .

Les points composés sont $P_1, Q_1, P_2, Q_2, P_3, Q_3$.

Avec des notations naturelles, les coordonnées barycentriques des points composés sont, pour $1 \leq i \leq 3$:

$$P_i = \{x_i, 1 - x_i, 0\}$$

$$Q_i = \{0, y_i, 1 - y_i\}$$



Dessin = Dessin $\cup \{J_3\} = \{A, B, C, J_3, P_1, P_2, P_3, Q_1, Q_2, Q_3\}$

Détermination du point J_3 :

Soit J_3 le point $(P_1Q_2) \cap (Q_1P_2)$. Le point J_3 est composé.

Comme $J_3 \in (P_1Q_2)$, on a, en choisissant l'inconnue ν_1

$$\overrightarrow{OJ_3} = \nu_1 \overrightarrow{OP_1} + (1 - \nu_1) \overrightarrow{OQ_2}$$

On déduit:

$$\overrightarrow{OJ_3} = a(1) \overrightarrow{OA} + a(2) \overrightarrow{OB} + a(3) \overrightarrow{OC}$$

avec

$$a(1) = \nu_1 x_1$$

$$a(2) = \nu_1 - \nu_1 x_1 + y_2 - \nu_1 y_2$$

$$a(3) = (-1 + \nu_1) (-1 + y_2)$$

Comme $J_3 \in (Q_1P_2)$, on a, en choisissant l'inconnue μ_1

$$\overrightarrow{OJ_3} = (1 - \mu_1) \overrightarrow{OP_2} + \mu_1 \overrightarrow{OQ_1}$$

On déduit:

$$\overrightarrow{OJ_3} = b(1) \overrightarrow{OA} + b(2) \overrightarrow{OB} + b(3) \overrightarrow{OC}$$

avec

$$b(1) = (1 - \mu_1) x_2$$

$$b(2) = 1 - \mu_1 - x_2 + \mu_1 x_2 + \mu_1 y_1$$

$$b(3) = \mu_1 (1 - y_1)$$

La résolution du système linéaire d'inconnues ν_1, μ_1 donne

$$\nu_1 = \frac{x_2 (y_2 - y_1)}{x_1 - x_2 - x_1 y_1 + x_2 y_2}$$

$$\mu_1 = \frac{(x_1 - x_2) (-1 + y_2)}{-x_1 + x_2 + x_1 y_1 - x_2 y_2}$$

On déduit que:

$$J_3 = \left\{ \frac{x_1 x_2 (y_1 - y_2)}{-x_1 + x_2 + x_1 y_1 - x_2 y_2}, \frac{-x_2 y_1 + x_1 x_2 y_1 + x_1 y_2 - x_1 x_2 y_2 - x_1 y_1 y_2 + x_2 y_1 y_2}{x_1 - x_2 - x_1 y_1 + x_2 y_2}, \frac{(x_2 - x_1) (-1 + y_1) (-1 + y_2)}{-x_1 + x_2 + x_1 y_1 - x_2 y_2} \right\}$$

Dessin = Dessin $\cup \{J_2\} = \{A, B, C, J_2, J_3, P_1, P_2, P_3, Q_1, Q_2, Q_3\}$

Détermination du point J_2 :

Soit J_2 le point $(P_1 Q_3) \cap (P_3 Q_1)$. On obtient de même

$$J_2 = \left\{ \frac{x_1 x_3 (y_1 - y_3)}{-x_1 + x_3 + x_1 y_1 - x_3 y_3}, \frac{-x_3 y_1 + x_1 x_3 y_1 + x_1 y_3 - x_1 x_3 y_3 - x_1 y_1 y_3 + x_3 y_1 y_3}{x_1 - x_3 - x_1 y_1 + x_3 y_3}, \frac{(x_3 - x_1) (-1 + y_1) (-1 + y_3)}{-x_1 + x_3 + x_1 y_1 - x_3 y_3} \right\}$$

Dessin = Dessin $\cup \{J_1\} = \{A, B, C, J_1, J_2, J_3, P_1, P_2, P_3, Q_1, Q_2, Q_3\}$

Détermination du point J_1 :

Soit J_1 le point $(P_2 Q_3) \cap (P_3 Q_2)$. On obtient de même

$$J_1 = \left\{ \frac{x_2 x_3 (y_2 - y_3)}{-x_2 + x_3 + x_2 y_2 - x_3 y_3}, \frac{-x_3 y_2 + x_2 x_3 y_2 + x_2 y_3 - x_2 x_3 y_3 - x_2 y_2 y_3 + x_3 y_2 y_3}{x_2 - x_3 - x_2 y_2 + x_3 y_3}, \frac{(x_3 - x_2) (-1 + y_2) (-1 + y_3)}{-x_2 + x_3 + x_2 y_2 - x_3 y_3} \right\}$$

Calculons le vecteur $\overrightarrow{J_1 J_2}$. On a:

$$\overrightarrow{J_1 J_2} = i(1) \overrightarrow{OA} + i(2) \overrightarrow{OB} + i(3) \overrightarrow{OC}$$

avec

$$i(1) = \frac{x_3 (-1 + y_3) (-x_1 x_2 y_1 + x_1 x_3 y_1 + x_1 x_2 y_2 - x_2 x_3 y_2 - x_1 x_3 y_3 + x_2 x_3 y_3)}{(-x_1 + x_3 + x_1 y_1 - x_3 y_3) (x_2 - x_3 - x_2 y_2 + x_3 y_3)}$$

$$i(2) = \frac{x_3 (1 - y_3) i(2)^*}{(-x_1 + x_3 + x_1 y_1 - x_3 y_3) (x_2 - x_3 - x_2 y_2 + x_3 y_3)}$$

$$i(3) = \frac{x_3 (1 - y_3) i(3)^*}{(-x_1 + x_3 + x_1 y_1 - x_3 y_3) (x_2 - x_3 - x_2 y_2 + x_3 y_3)}$$

avec

$$\begin{aligned} i(2)^* &= x_2 y_1 - x_1 x_2 y_1 - x_3 y_1 + x_1 x_3 y_1 - x_1 y_2 + x_1 x_2 y_2 + x_3 y_2 - x_2 x_3 y_2 + x_1 y_1 y_2 \\ &\quad - x_2 y_1 y_2 + x_1 y_3 - x_2 y_3 - x_1 x_3 y_3 + x_2 x_3 y_3 - x_1 y_1 y_3 + x_3 y_1 y_3 + x_2 y_2 y_3 - x_3 y_2 y_3 \\ i(3)^* &= -x_2 y_1 + x_3 y_1 + x_1 y_2 - x_3 y_2 - x_1 y_1 y_2 + x_2 y_1 y_2 - x_1 y_3 + x_2 y_3 + x_1 y_1 y_3 - x_3 y_1 y_3 \\ &\quad - x_2 y_2 y_3 + x_3 y_2 y_3 \end{aligned}$$

Calculons le vecteur $\overrightarrow{J_2 J_3}$. On a :

$$\overrightarrow{J_2 J_3} = j(1) \overrightarrow{OA} + j(2) \overrightarrow{OB} + j(3) \overrightarrow{OC}$$

avec

$$\begin{aligned} j(1) &= \frac{x_1 (-1 + y_1) (x_1 x_2 y_1 - x_1 x_3 y_1 - x_1 x_2 y_2 + x_2 x_3 y_2 + x_1 x_3 y_3 - x_2 x_3 y_3)}{(-x_1 + x_2 + x_1 y_1 - x_2 y_2) (-x_1 + x_3 + x_1 y_1 - x_3 y_3)} \\ j(2) &= \frac{x_1 (1 - y_1) j(2)^*}{(-x_1 + x_2 + x_1 y_1 - x_2 y_2) (-x_1 + x_3 + x_1 y_1 - x_3 y_3)} \\ j(3) &= \frac{x_1 (1 - y_1) j(3)^*}{(-x_1 + x_2 + x_1 y_1 - x_2 y_2) (-x_1 + x_3 + x_1 y_1 - x_3 y_3)} \end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned} j(2)^* &= -x_2 y_1 + x_1 x_2 y_1 + x_3 y_1 - x_1 x_3 y_1 + x_1 y_2 - x_1 x_2 y_2 - x_3 y_2 + x_2 x_3 y_2 - x_1 y_1 y_2 + x_2 y_1 y_2 \\ &\quad - x_1 y_3 + x_2 y_3 + x_1 x_3 y_3 - x_2 x_3 y_3 + x_1 y_1 y_3 - x_3 y_1 y_3 - x_2 y_2 y_3 + x_3 y_2 y_3 \\ j(3)^* &= x_2 y_1 - x_3 y_1 - x_1 y_2 + x_3 y_2 + x_1 y_1 y_2 - x_2 y_1 y_2 + x_1 y_3 - x_2 y_3 - x_1 y_1 y_3 + x_3 y_1 y_3 \\ &\quad + x_2 y_2 y_3 - x_3 y_2 y_3 \end{aligned}$$

On a ainsi

$$\overrightarrow{J_1 J_2} = \frac{x_3 (-x_1 + x_2 + x_1 y_1 - x_2 y_2) (-1 + y_3)}{x_1 (1 - y_1) (x_2 - x_3 - x_2 y_2 + x_3 y_3)} \overrightarrow{J_2 J_3}$$

Calcul du multi-rapport $r(P_1, J_3, Q_2, J_1, P_3, J_2, Q_1, J_3, P_2, J_1, Q_3, J_2)$ égal à :

$$r = \frac{\overrightarrow{P_1 J_3}}{J_3 Q_2} \frac{\overrightarrow{Q_2 J_1}}{J_1 P_3} \frac{\overrightarrow{P_3 J_2}}{J_2 Q_1} \frac{\overrightarrow{Q_1 J_3}}{J_3 P_2} \frac{\overrightarrow{P_2 J_1}}{J_1 Q_3} \frac{\overrightarrow{Q_3 J_2}}{J_2 P_1}$$

On a progressivement

$$\begin{aligned} \overrightarrow{P_1 J_3} &= \frac{(x_1 - x_2) (-1 + y_1)}{x_2 (y_1 - y_2)} \overrightarrow{J_3 Q_2} \\ \overrightarrow{Q_2 J_1} &= \frac{x_2 (y_2 - y_3)}{(x_2 - x_3) (-1 + y_3)} \overrightarrow{J_1 P_3} \\ \overrightarrow{P_3 J_2} &= \frac{(x_1 - x_3) (-1 + y_3)}{x_1 (y_1 - y_3)} \overrightarrow{J_2 Q_1} \\ \overrightarrow{Q_1 J_3} &= \frac{x_1 (y_1 - y_2)}{(x_1 - x_2) (-1 + y_2)} \overrightarrow{J_3 P_2} \\ \overrightarrow{P_2 J_1} &= \frac{(x_2 - x_3) (-1 + y_2)}{x_3 (y_2 - y_3)} \overrightarrow{J_1 Q_3} \end{aligned}$$

$$\overrightarrow{Q_3 J_2} = \frac{x_3 (y_1 - y_3)}{(x_1 - x_3) (-1 + y_1)} \overrightarrow{J_2 P_1}$$

Le produit des rapports de proportionalité est

$$r = 1$$

Calcul du multi-rapport $r(P_1, P_2, P_3, J_2, Q_1, Q_2, Q_3, J_2)$ égal à:

$$r_1 = \frac{\overline{P_1 P_2}}{\overline{P_2 P_3}} \frac{\overline{P_3 J_2}}{\overline{J_2 Q_1}} \frac{\overline{Q_1 Q_2}}{\overline{Q_2 Q_3}} \frac{\overline{Q_3 J_2}}{\overline{J_2 P_1}}$$

On a progressivement

$$\begin{aligned} \overrightarrow{P_1 P_2} &= \frac{x_1 - x_2}{x_2 - x_3} \overrightarrow{P_2 P_3} \\ \overrightarrow{P_3 J_2} &= \frac{(x_1 - x_3) (-1 + y_3)}{x_1 (y_1 - y_3)} \overrightarrow{J_2 Q_1} \\ \overrightarrow{Q_1 Q_2} &= \frac{y_1 - y_2}{y_2 - y_3} \overrightarrow{Q_2 Q_3} \\ \overrightarrow{Q_3 J_2} &= \frac{x_3 (y_1 - y_3)}{(x_1 - x_3) (-1 + y_1)} \overrightarrow{J_2 P_1} \end{aligned}$$

Le produit des rapports de proportionalité est

$$r_1 = \frac{(x_1 - x_2) x_3 (y_1 - y_2) (-1 + y_3)}{x_1 (x_2 - x_3) (-1 + y_1) (y_2 - y_3)}$$

Calcul du multi-rapport $r(P_3, P_1, P_2, J_1, Q_3, Q_1, Q_2, J_1)$ égal à:

$$r_2 = \frac{\overline{P_3 P_1}}{\overline{P_1 P_2}} \frac{\overline{P_2 J_1}}{\overline{J_1 Q_3}} \frac{\overline{Q_3 Q_1}}{\overline{Q_1 Q_2}} \frac{\overline{Q_2 J_1}}{\overline{J_1 P_3}}$$

On a progressivement

$$\begin{aligned} \overrightarrow{P_3 P_1} &= \frac{x_3 - x_1}{x_1 - x_2} \overrightarrow{P_1 P_2} \\ \overrightarrow{P_2 J_1} &= \frac{(x_2 - x_3) (-1 + y_2)}{x_3 (y_2 - y_3)} \overrightarrow{J_1 Q_3} \\ \overrightarrow{Q_3 Q_1} &= \frac{y_3 - y_1}{y_1 - y_2} \overrightarrow{Q_1 Q_2} \\ \overrightarrow{Q_2 J_1} &= \frac{x_2 (y_2 - y_3)}{(x_2 - x_3) (-1 + y_3)} \overrightarrow{J_1 P_3} \end{aligned}$$

Le produit des rapports de proportionalité est

$$r_2 = \frac{x_2 (x_1 - x_3) (-1 + y_2) (y_1 - y_3)}{(x_1 - x_2) x_3 (y_1 - y_2) (-1 + y_3)}$$

Calcul du multi-rapport $r(P_2, P_3, P_1, J_3, Q_2, Q_3, Q_1, J_3)$ égal à:

$$r_3 = \frac{\overline{P_2 P_3}}{\overline{P_3 P_1}} \frac{\overline{P_1 J_3}}{\overline{J_3 Q_2}} \frac{\overline{Q_2 Q_3}}{\overline{Q_3 Q_1}} \frac{\overline{Q_1 J_3}}{\overline{J_3 P_2}}$$

On a progressivement

$$\begin{aligned}\overrightarrow{P_2P_3} &= \frac{x_2 - x_3}{-x_1 + x_3} \overrightarrow{P_3P_1} \\ \overrightarrow{P_1J_3} &= \frac{(x_1 - x_2)(-1 + y_1)}{x_2(y_1 - y_2)} \overrightarrow{J_3Q_2} \\ \overrightarrow{Q_2Q_3} &= \frac{y_2 - y_3}{-y_1 + y_3} \overrightarrow{Q_3Q_1} \\ \overrightarrow{Q_1J_3} &= \frac{x_1(y_1 - y_2)}{(x_1 - x_2)(-1 + y_2)} \overrightarrow{J_3P_2}\end{aligned}$$

Le produit des rapports de proportionalité est

$$r_3 = \frac{x_1(x_2 - x_3)(-1 + y_1)(y_2 - y_3)}{x_2(-x_1 + x_3)(-1 + y_2)(-y_1 + y_3)}$$

Le produit $r_1 r_2 r_3$ est alors égal à 1.

En explicitant et après simplifications, on obtient

$$\frac{\overrightarrow{P_3J_2}}{\overrightarrow{J_2Q_1}} \frac{\overrightarrow{Q_3J_2}}{\overrightarrow{J_2P_1}} \frac{\overrightarrow{P_2J_1}}{\overrightarrow{J_1Q_3}} \frac{\overrightarrow{Q_2J_1}}{\overrightarrow{J_1P_3}} \frac{\overrightarrow{P_1J_3}}{\overrightarrow{J_3Q_2}} \frac{\overrightarrow{Q_1J_3}}{\overrightarrow{J_3P_2}} = 1$$

8.3 Alternative au théorème de Ceva

Exercice 8.3.1

Soit $n \geq 3$ un entier, $P_1P_2 \cdots P_n$ un polygone plan à n côtés et M un point du plan. On désigne, pour $1 \leq i \leq n$, par J_i l'intersection de la droite (P_iM) avec le côté $(P_{i+1}P_{i+2})$ avec la convention $P_{n+1} = P_1$. Alors:

$$\left(\frac{\overrightarrow{P_1M}}{\overrightarrow{MJ_1}} \frac{\overrightarrow{P_2M}}{\overrightarrow{MJ_2}} \cdots \frac{\overrightarrow{P_iM}}{\overrightarrow{MJ_i}} \cdots \frac{\overrightarrow{P_nM}}{\overrightarrow{MJ_n}} \right) \cdot \left(\frac{\overrightarrow{J_1P_2}}{\overrightarrow{P_2P_3}} \frac{\overrightarrow{J_2P_3}}{\overrightarrow{P_3P_4}} \cdots \frac{\overrightarrow{J_iP_{i+1}}}{\overrightarrow{P_{i+1}P_{i+2}}} \cdots \frac{\overrightarrow{J_{n-1}P_n}}{\overrightarrow{P_nP_1}} \frac{\overrightarrow{J_nP_1}}{\overrightarrow{P_1P_2}} \right) = (-1)^n$$

Solution:

Dessin = $\{A, B, C, M, P_1, P_2, \dots, P_n\}$

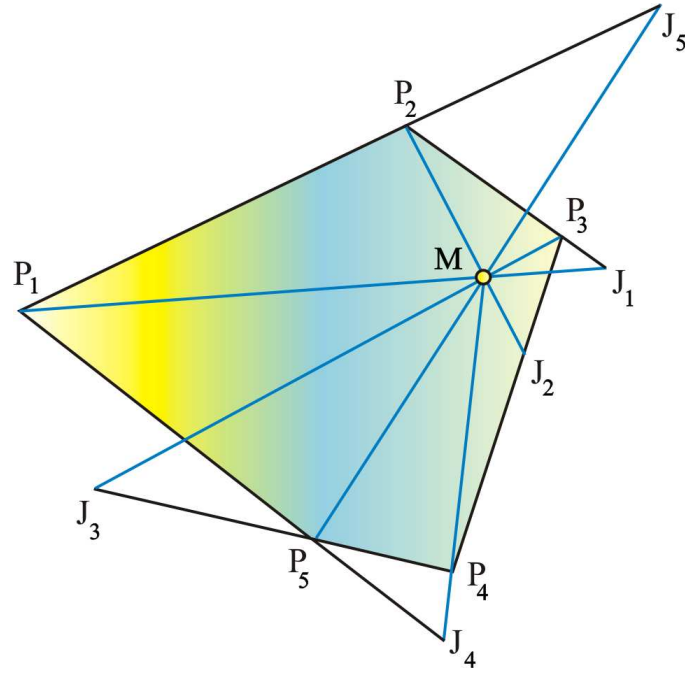
Le repère barycentrique choisi est A, B, C .

Les points composés sont $M, P_1, P_2, \dots, P_n$.

Les coordonnées barycentriques des points composés sont, pour $1 \leq i \leq n$:

$$M = \{x, y, 1 - x - y\}$$

$$P_i = \{x_i, y_i, 1 - x_i - y_i\}$$



Dessin = Dessin $\cup \{J_i\} = \{A, B, C, J_1, \dots, J_n, M, P_1, P_2, \dots, P_n\}$

Détermination du point J_i :

Soit J_i le point $(P_iM) \cap (P_{i+1}P_{i+2})$. Le point J_i est composé.

Comme $J_i \in (P_iM)$, on a, en choisissant l'inconnue ν_1

$$\overrightarrow{OJ_i} = (1 - \nu_1) \overrightarrow{OM} + \nu_1 \overrightarrow{OP_i}$$

On déduit:

$$\overrightarrow{OJ_i} = e(1) \overrightarrow{OA} + e(2) \overrightarrow{OB} + e[i] \overrightarrow{OC}$$

avec

$$e(1) = x - \nu_1 x + \nu_1 x_i$$

$$e(2) = y - \nu_1 y + \nu_1 y_i$$

$$e(3) = 1 - x + \nu_1 x - \nu_1 x_i - y + \nu_1 y - \nu_1 y_i$$

Comme $J_i \in (P_{i+1}P_{i+2})$, on a, en choisissant l'inconnue μ_1

$$\overrightarrow{OJ_i} = \mu_1 \overrightarrow{OP_{i+1}} + (1 - \mu_1) \overrightarrow{OP_{i+2}}$$

On déduit:

$$\overrightarrow{OJ_i} = f(1) \overrightarrow{OA} + f(2) \overrightarrow{OB} + f(3) \overrightarrow{OC}$$

avec

$$f(1) = \mu_1 x_{i+1} + x_{i+2} - \mu_1 x_{i+2}$$

$$f(2) = \mu_1 y_{i+1} + y_{i+2} - \mu_1 y_{i+2}$$

$$f(3) = 1 - \mu_1 x_{i+1} - x_{i+2} + \mu_1 x_{i+2} - \mu_1 y_{i+1} - y_{i+2} + \mu_1 y_{i+2}$$

La résolution du système linéaire d'inconnues ν_1, μ_1 donne

$$\nu_1 = \frac{-x_{i+1}y + x_{i+2}y + x y_{i+1} - x_{i+2}y_{i+1} - x y_{i+2} + x_{i+1}y_{i+2}}{-x_{i+1}y + x_{i+2}y + x_{i+1}y_i - x_{i+2}y_i + x y_{i+1} - x_i y_{i+1} - x y_{i+2} + x_i y_{i+2}}$$

$$\mu_1 = \frac{-x_i y + x_{i+2}y + x y_i - x_{i+2}y_i - x y_{i+2} + x_i y_{i+2}}{-x_{i+1}y + x_{i+2}y + x_{i+1}y_i - x_{i+2}y_i + x y_{i+1} - x_i y_{i+1} - x y_{i+2} + x_i y_{i+2}}$$

On déduit que:

$$J_i = \left\{ \frac{-x_i x_{i+1} y + x_i x_{i+2} y + x x_{i+1} y_i - x x_{i+2} y_i + x x_{i+2} y_{i+1} - x_i x_{i+2} y_{i+1} - x x_{i+1} y_{i+2} + x_i x_{i+1} y_{i+2}}{-x_{i+1} y + x_{i+2} y + x_{i+1} y_i - x_{i+2} y_i + x y_{i+1} - x_i y_{i+1} - x y_{i+2} + x_i y_{i+2}}, \right. \\ \left. \frac{-x_i y y_{i+1} + x_{i+2} y y_{i+1} + x y_i y_{i+1} - x_{i+2} y_i y_{i+1} + x_i y y_{i+2} - x_{i+1} y y_{i+2} - x y_i y_{i+2} + x_{i+1} y_i y_{i+2}}{-x_{i+1} y + x_{i+2} y + x_{i+1} y_i - x_{i+2} y_i + x y_{i+1} - x_i y_{i+1} - x y_{i+2} + x_i y_{i+2}}, \right. \\ \left. \frac{-j^*}{-x_{i+1} y + x_{i+2} y + x_{i+1} y_i - x_{i+2} y_i + x y_{i+1} - x_i y_{i+1} - x y_{i+2} + x_i y_{i+2}} \right\}$$

avec

$$j^* = x_{i+1}y - x_i x_{i+1}y - x_{i+2}y + x_i x_{i+2}y - x_{i+1}y_i + x x_{i+1}y_i + x_{i+2}y_i - x x_{i+2}y_i \\ - x y_{i+1} + x_i y_{i+1} + x x_{i+2}y_{i+1} - x_i x_{i+2}y_{i+1} - x_i y y_{i+1} + x_{i+2}y y_{i+1} + x y_i y_{i+1} - x_{i+2}y_i y_{i+1} \\ + x y_{i+2} - x_i y_{i+2} - x x_{i+1}y_{i+2} + x_i x_{i+1}y_{i+2} + x_i y y_{i+2} - x_{i+1}y y_{i+2} - x y_i y_{i+2} + x_{i+1}y_i y_{i+2}$$

Calculons le vecteur $\overrightarrow{P_i M}$. On a:

$$\overrightarrow{P_i M} = e(1) \overrightarrow{OA} + e(2) \overrightarrow{OB} + e(3) \overrightarrow{OC}$$

avec

$$e(1) = x - x_i \\ e(2) = y - y_i \\ e(3) = -x + x_i - y + y_i$$

Calculons le vecteur $\overrightarrow{M J_i}$. On a:

$$\overrightarrow{M J_i} = f(1) \overrightarrow{OA} + f(2) \overrightarrow{OB} + f(3) \overrightarrow{OC}$$

avec

$$f(1) = \frac{(-x + x_i) (-x_{i+1}y + x_{i+2}y + x y_{i+1} - x_{i+2}y_{i+1} - x y_{i+2} + x_{i+1}y_{i+2})}{-x_{i+1}y + x_{i+2}y + x_{i+1}y_i - x_{i+2}y_i + x y_{i+1} - x_i y_{i+1} - x y_{i+2} + x_i y_{i+2}} \\ f(2) = \frac{(y_i - y) (x_{i+1}y - x_{i+2}y - x y_{i+1} + x_{i+2}y_{i+1} + x y_{i+2} - x_{i+1}y_{i+2})}{x_{i+1}y - x_{i+2}y - x_{i+1}y_i + x_{i+2}y_i - x y_{i+1} + x_i y_{i+1} + x y_{i+2} - x_i y_{i+2}} \\ f(3) = \frac{(x - x_i + y - y_i) (-x_{i+1}y + x_{i+2}y + x y_{i+1} - x_{i+2}y_{i+1} - x y_{i+2} + x_{i+1}y_{i+2})}{-x_{i+1}y + x_{i+2}y + x_{i+1}y_i - x_{i+2}y_i + x y_{i+1} - x_i y_{i+1} - x y_{i+2} + x_i y_{i+2}}$$

On a ainsi

$$\overrightarrow{P_i M} = \frac{-x_{i+1}y + x_{i+2}y + x_{i+1}y_i - x_{i+2}y_i + x y_{i+1} - x_i y_{i+1} - x y_{i+2} + x_i y_{i+2}}{x_{i+1}y - x_{i+2}y - x y_{i+1} + x_{i+2}y_{i+1} + x y_{i+2} - x_{i+1}y_{i+2}} \overrightarrow{M J_i}$$

Calculons le vecteur $\overrightarrow{J_i P_{i+1}}$. On a:

$$\overrightarrow{J_i P_{i+1}} = e(1) \overrightarrow{OA} + e(2) \overrightarrow{OB} + e(3) \overrightarrow{OC}$$

avec

$$\begin{aligned} e(1) &= \frac{(x_{i+1} - x_{i+2}) (-x_i y + x_{i+1} y + x y_i - x_{i+1} y_i - x y_{i+1} + x_i y_{i+1})}{x_{i+1} y - x_{i+2} y - x_{i+1} y_i + x_{i+2} y_i - x y_{i+1} + x_i y_{i+1} + x y_{i+2} - x_i y_{i+2}} \\ e(2) &= \frac{(x_i y - x_{i+1} y - x y_i + x_{i+1} y_i + x y_{i+1} - x_i y_{i+1}) (y_{i+2} - y_{i+1})}{x_{i+1} y - x_{i+2} y - x_{i+1} y_i + x_{i+2} y_i - x y_{i+1} + x_i y_{i+1} + x y_{i+2} - x_i y_{i+2}} \\ e(3) &= \frac{(x_i y - x_{i+1} y - x y_i + x_{i+1} y_i + x y_{i+1} - x_i y_{i+1}) (x_{i+1} - x_{i+2} + y_{i+1} - y_{i+2})}{x_{i+1} y - x_{i+2} y - x_{i+1} y_i + x_{i+2} y_i - x y_{i+1} + x_i y_{i+1} + x y_{i+2} - x_i y_{i+2}} \end{aligned}$$

Calculons le vecteur $\overrightarrow{P_{i+1} P_{i+2}}$. On a:

$$\overrightarrow{P_{i+1} P_{i+2}} = f(1) \overrightarrow{OA} + f(2) \overrightarrow{OB} + f(3) \overrightarrow{OC}$$

avec

$$\begin{aligned} f(1) &= -x_{i+1} + x_{i+2} \\ f(2) &= -y_{i+1} + y_{i+2} \\ f(3) &= x_{i+1} - x_{i+2} + y_{i+1} - y_{i+2} \end{aligned}$$

On a ainsi, pour $i \leq n-2$

$$\overrightarrow{J_i P_{i+1}} = \frac{x_i y - x_{i+1} y - x y_i + x_{i+1} y_i + x y_{i+1} - x_i y_{i+1}}{x_{i+1} y - x_{i+2} y - x_{i+1} y_i + x_{i+2} y_i - x y_{i+1} + x_i y_{i+1} + x y_{i+2} - x_i y_{i+2}} \overrightarrow{P_{i+1} P_{i+2}}$$

Calculons le vecteur $\overrightarrow{J_{n-1} P_n}$. On a:

$$\overrightarrow{J_{n-1} P_n} = i(1) \overrightarrow{OA} + i(2) \overrightarrow{OB} + i(3) \overrightarrow{OC}$$

avec

$$\begin{aligned} i(1) &= \frac{(x_1 - x_n) (-x_{n-1} y + x_n y + x y_{n-1} - x_n y_{n-1} - x y_n + x_{n-1} y_n)}{x_1 y - x_n y - x y_1 + x_{n-1} y_1 - x_1 y_{n-1} + x_n y_{n-1} + x y_n - x_{n-1} y_n} \\ i(2) &= \frac{(y_1 - y_n) (-x_{n-1} y + x_n y + x y_{n-1} - x_n y_{n-1} - x y_n + x_{n-1} y_n)}{x_1 y - x_n y - x y_1 + x_{n-1} y_1 - x_1 y_{n-1} + x_n y_{n-1} + x y_n - x_{n-1} y_n} \\ i(3) &= \frac{(-x_1 + x_n - y_1 + y_n) (-x_{n-1} y + x_n y + x y_{n-1} - x_n y_{n-1} - x y_n + x_{n-1} y_n)}{x_1 y - x_n y - x y_1 + x_{n-1} y_1 - x_1 y_{n-1} + x_n y_{n-1} + x y_n - x_{n-1} y_n} \end{aligned}$$

Calculons le vecteur $\overrightarrow{P_n P_1}$. On a:

$$\overrightarrow{P_n P_1} = j(1) \overrightarrow{OA} + j(2) \overrightarrow{OB} + j(3) \overrightarrow{OC}$$

avec

$$\begin{aligned} j(1) &= x_1 - x_n \\ j(2) &= y_1 - y_n \\ j(3) &= -x_1 + x_n - y_1 + y_n \end{aligned}$$

On a ainsi

$$\overrightarrow{J_{n-1}P_n} = \frac{-x_{n-1}y + x_ny + xy_{n-1} - x_ny_{n-1} - xy_n + x_{n-1}y_n}{x_1y - x_ny - xy_1 + x_{n-1}y_1 - x_1y_{n-1} + x_ny_{n-1} + xy_n - x_{n-1}y_n} \overrightarrow{P_nP_1}$$

Calculons le vecteur $\overrightarrow{J_nP_1}$. On a:

$$\overrightarrow{J_nP_1} = k(1) \overrightarrow{OA} + k(2) \overrightarrow{OB} + k(3) \overrightarrow{OC}$$

avec

$$\begin{aligned} k(1) &= \frac{(x_1 - x_2)(x_1y - x_ny - xy_1 + x_ny_1 + xy_n - x_1y_n)}{x_1y - x_2y - xy_1 + x_ny_1 + xy_2 - x_ny_2 - x_1y_n + x_2y_n} \\ k(2) &= \frac{(y_1 - y_2)(x_1y - x_ny - xy_1 + x_ny_1 + xy_n - x_1y_n)}{x_1y - x_2y - xy_1 + x_ny_1 + xy_2 - x_ny_2 - x_1y_n + x_2y_n} \\ k(3) &= \frac{(-x_1 + x_2 - y_1 + y_2)(x_1y - x_ny - xy_1 + x_ny_1 + xy_n - x_1y_n)}{x_1y - x_2y - xy_1 + x_ny_1 + xy_2 - x_ny_2 - x_1y_n + x_2y_n} \end{aligned}$$

Calculons le vecteur $\overrightarrow{P_1P_2}$. On a:

$$\overrightarrow{P_1P_2} = l(1) \overrightarrow{OA} + l(2) \overrightarrow{OB} + l(3) \overrightarrow{OC}$$

avec

$$\begin{aligned} l(1) &= -x_1 + x_2 \\ l(2) &= -y_1 + y_2 \\ l(3) &= x_1 - x_2 + y_1 - y_2 \end{aligned}$$

On a ainsi

$$\overrightarrow{J_nP_1} = \frac{x_1y - x_ny - xy_1 + x_ny_1 + xy_n - x_1y_n}{-x_1y + x_2y + xy_1 - x_ny_1 - xy_2 + x_ny_2 + x_1y_n - x_2y_n} \overrightarrow{P_1P_2}$$

Ainsi, le produit partiel

$$\frac{\overline{P_1M}}{\overline{MJ_1}} \frac{\overline{J_1P_2}}{\overline{P_2P_3}} \frac{\overline{P_2M}}{\overline{MJ_2}} \frac{\overline{J_2P_3}}{\overline{P_3P_4}} \dots \frac{\overline{P_iM}}{\overline{MJ_i}} \frac{\overline{J_iP_{i+1}}}{\overline{P_{i+1}, P_{i+2}}} \dots \frac{\overline{P_{n-2}M}}{\overline{MJ_{n-2}}} \frac{\overline{J_{n-2}P_{n-1}}}{\overline{P_{n-1}P_n}}$$

a pour valeur

$$(-1)^n \frac{x_1y - x_2y - xy_1 + x_2y_1 + xy_2 - x_1y_2}{x_{n-1}y - x_ny - xy_{n-1} + x_ny_{n-1} + xy_n - x_{n-1}y_n}$$

et les facteurs restants

$$\frac{\overline{P_{n-1}M}}{\overline{MJ_{n-1}}} \frac{\overline{J_{n-1}P_n}}{\overline{P_nP_1}} \frac{\overline{P_nM}}{\overline{MJ_n}} \frac{\overline{J_nP_1}}{\overline{P_1P_2}}$$

ont pour valeur

$$\frac{x_{n-1}y - x_ny - xy_{n-1} + x_ny_{n-1} + xy_n - x_{n-1}y_n}{x_1y - x_2y - xy_1 + x_2y_1 + xy_2 - x_1y_2}$$

8.4 Multi-rapport d'un faisceau de droites

Cette section montre que le multi-rapport d'un faisceau formé d'un nombre pair n de droites est une quantité parfaitement définie intrinsèque au faisceau et tout faisceau contient un multi-rapport harmonique naturel (question 3 ci-dessous).

Exercice 8.4.1

Soient (Δ) et (Δ_1) deux droites (supposées sécantes en un point J), n un entier pair, $A_1, A_2, \dots, A_n$ des points distincts de (Δ) et $B_1, B_2, \dots, B_n$ des points de (Δ_1) . On suppose que les droites $(A_1B_1), (A_2B_2), \dots, (A_nB_n)$ se rencontrent toutes en un même point A (donc constituent un faisceau).

1. Montrer l'égalité des multi-rapports

$$r(A_1, A_2, \dots, A_{2i+1}, A_{2i+2}, \dots, A_n) = r(B_1, B_2, \dots, B_{2i+1}, B_{2i+2}, \dots, B_n)$$

$$r(J, A_1, \dots, A_{2i}, A_{2i+1}, \dots, A_{n-1}) = r(J, B_1, \dots, B_{2i}, B_{2i+1}, \dots, B_{n-1})$$

2. Montrer que, pour $1 \leq i \leq n-1$ les points $C_i = (A_iB_{i+1}) \cap (A_{i+1}B_i)$ sont sur une même droite (Δ_2) passant par J , ainsi que les points $C_{i,j} = (A_iB_j) \cap (A_jB_i)$ pour $1 \leq i < j \leq n$ (la droite (Δ_2) est la droite de Pappus).

3. On pose $I_j = (\Delta_2) \cap (A_jB_j)$ pour $j = 1, \dots, n$. Montrer que

$$r(J, I_1, C_{1,2}, I_2, C_{2,3}, \dots, I_{n-1}, C_{n-1,n}, I_n) = -1$$

4. Soient trois indices i, j, k distincts deux à deux et les points $F_1^{i,j,k} = (A_iB_k) \cap (A_jB_i)$, $F_2^{i,j,k} = (A_jB_k) \cap (A_kB_i)$, $G_1^{i,j,k} = (B_iA_k) \cap (B_jA_i)$, $G_2^{i,j,k} = (B_jA_k) \cap (B_kA_i)$. Montrer que les droites $(F_1^{i,j,k} \cap F_2^{i,j,k})$ et $(G_1^{i,j,k} \cap G_2^{i,j,k})$ se coupent sur la droite de Pappus.

L'essentiel des résultats de cet énoncé reste valable pour n impair en remplaçant l'une des droites (A_iB_i) par la droite (AJ) .

Solution:

Soient A_1 et B_1 deux points distincts du plan. Le point A est choisi arbitrairement sur la droite (A_1B_1) avec A distinct de A_1 et B_1 . Le point $J = (\Delta_1) \cap (\Delta_2)$ est supposé distinct de A_1 et B_1 .

Dessin = $\{A, A_1, \dots, A_i, \dots, A_n, B_1, J\}$

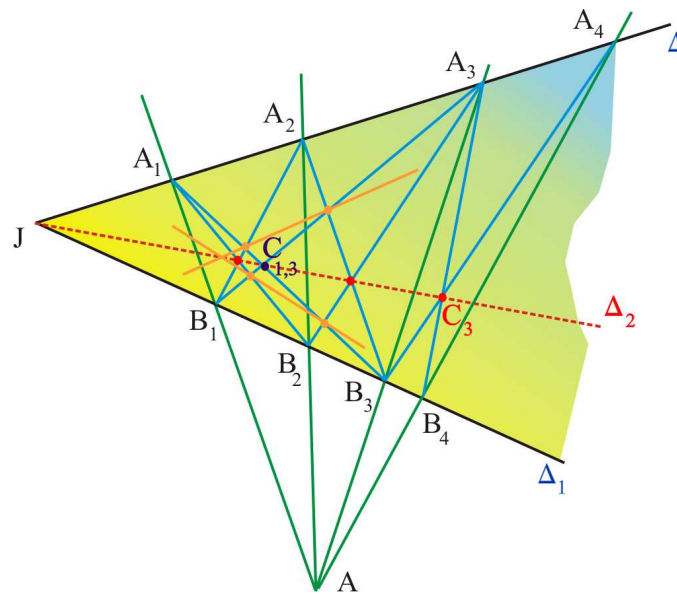
Le repère barycentrique choisi est A_1, B_1, J .

Les points composés sont $A, \dots, A_i, \dots, A_n$.

Avec des notations naturelles, les coordonnées barycentriques des points composés sont, pour $2 \leq i \leq n$:

$$A = \{k, 1-k, 0\}$$

$$A_i = \{1-x_i, 0, x_i\}$$


$$\mathbf{Dessin} = \mathbf{Dessin} \cup \{B_i\} = \{A, A_1, \dots, A_i, \dots, A_n, B_1, \dots, B_i, \dots, B_n, J\}$$
Détermination du point B_i :

Soit B_i le point $(JB_1) \cap (AA_i)$. Le point B_i est composé.

Comme $B_i \in (JB_1)$, on a, en choisissant l'inconnue ν_1

$$\overrightarrow{OB_i} = (1 - \nu_1) \overrightarrow{OB_1} + \nu_1 \overrightarrow{OJ}$$

Comme $B_i \in (AA_i)$, on a, en choisissant l'inconnue μ_1

$$\overrightarrow{OB_i} = \mu_1 \overrightarrow{OA} + (1 - \mu_1) \overrightarrow{OA_i}$$

On déduit:

$$\overrightarrow{OB_i} = b(1) \overrightarrow{OA_1} + b(2) \overrightarrow{OB_1} + b(3)OJ$$

avec

$$b(1) = 1 - \mu_1 + k \mu_1 - x_i + \mu_1 x_i$$

$$b(2) = (1 - k) \mu_1$$

$$b(3) = (1 - \mu_1) x_i$$

La résolution du système linéaire d'inconnues ν_1, μ_1 donne

$$\nu_1 = \frac{k x_i}{-1 + k + x_i} \quad \mu_1 = \frac{-1 + x_i}{-1 + k + x_i}$$

On déduit que:

$$B_i = \{0, \frac{(1-k)(-1+x_i)}{-1+k+x_i}, \frac{kx_i}{-1+k+x_i}\}$$

1). Calcul du multi-rapport $r(A_1, \dots, A_{2i+1}, A_{2i+2}, \dots, A_n)$ égal à:

$$r = \frac{\overline{A_1 A_2}}{\overline{A_2 A_3}} \dots \frac{\overline{A_{2i+1} A_{2i+2}}}{\overline{A_{2i+2} A_{2i+3}}} \dots \frac{\overline{A_{n-1} A_n}}{\overline{A_n A_1}}$$

On a progressivement

$$\begin{aligned}\overrightarrow{A_1 A_2} &= \frac{-x_2}{x_2 - x_3} \overrightarrow{A_2 A_3} \\ \overrightarrow{A_{2i+1} A_{2i+2}} &= \frac{x_{2i+1} - x_{2i+2}}{x_{2i+2} - x_{2i+3}} \overrightarrow{A_{2i+2} A_{2i+3}} \\ \overrightarrow{A_{n-1} A_n} &= \frac{x_{n-1} - x_n}{x_n} \overrightarrow{A_n A_1}\end{aligned}$$

Le produit des rapports de proportionalité est

$$r = \frac{-x_2}{x_2 - x_3} \prod_{i \geq 1} \left(\frac{x_{2i+1} - x_{2i+2}}{x_{2i+2} - x_{2i+3}} \right) \frac{x_{n-1} - x_n}{x_n}$$

Calcul du multi-rapport $r(B_1, \dots, B_i, \dots, B_n)$ égal à:

$$r = \frac{\overline{B_1 B_2}}{\overline{B_2 B_3}} \dots \frac{\overline{B_{2i+1} B_{2i+2}}}{\overline{B_{2i+2} B_{2i+3}}} \dots \frac{\overline{B_{n-1} B_n}}{\overline{B_n B_1}}$$

On a progressivement

$$\begin{aligned}\overrightarrow{B_1 B_2} &= (-1) \frac{x_2 (-1 + k + x_3)}{(-1 + k) (x_2 - x_3)} \overrightarrow{B_2 B_3} \\ \overrightarrow{B_{2i+1} B_{2i+2}} &= \frac{(x_{2i+1} - x_{2i+2}) (-1 + k + x_{2i+3})}{(-1 + k + x_{2i+1}) (x_{2i+2} - x_{2i+3})} \overrightarrow{B_{2i+2} B_{2i+3}} \\ \overrightarrow{B_{n-1} B_n} &= \frac{(-1 + k) (x_{n-1} - x_n)}{(-1 + k + x_{n-1}) x_n} \overrightarrow{B_n B_1}\end{aligned}$$

Le produit des rapports de proportionalité est

$$r = (-1) \frac{x_2 (-1 + k + x_3)}{(-1 + k) (x_2 - x_3)} \prod_{i \geq 1} \left(\frac{(x_{2i+1} - x_{2i+2}) (-1 + k + x_{2i+3})}{(-1 + k + x_{2i+1}) (x_{2i+2} - x_{2i+3})} \right) \frac{(-1 + k) (x_{n-1} - x_n)}{(-1 + k + x_{n-1}) x_n}$$

égal au précédent. Il en résulte que

$$r(A_1, A_2, \dots, A_{2i+1}, A_{2i+2}, \dots, A_n) = r(B_1, B_2, \dots, B_{2i+1}, B_{2i+2}, \dots, B_n)$$

Calcul du multi-rapport $r(J, A_1, \dots, A_{2i}, A_{2i+1}, \dots, A_{n-1})$ égal à:

$$r = \frac{\overline{J A_1}}{\overline{A_1 A_2}} \frac{\overline{A_2 A_3}}{\overline{A_3 A_4}} \dots \frac{\overline{A_{2i} A_{2i+1}}}{\overline{A_{2i+1} A_{2i+2}}} \dots \frac{\overline{A_{n-2} A_{n-1}}}{\overline{A_{n-1} J}}$$

On a progressivement

$$\begin{aligned}\overrightarrow{J A_1} &= \frac{-1}{x_2} \overrightarrow{A_1 A_2} \\ \overrightarrow{A_{2i} A_{2i+1}} &= \frac{x_{2i} - x_{2i+1}}{x_{2i+1} - x_{2i+2}} \overrightarrow{A_{2i+1} A_{2i+2}} \\ \overrightarrow{A_{n-2} A_{n-1}} &= \frac{x_{n-2} - x_{n-1}}{-1 + x_{n-1}} \overrightarrow{A_{n-1} J}\end{aligned}$$

Le produit des rapports de proportionalité est

$$r = \frac{-1}{x_2} \prod_{i \geq 1} \left(\frac{x_{2i} - x_{2i+1}}{x_{2i+1} - x_{2i+2}} \right) \frac{x_{n-2} - x_{n-1}}{-1 + x_{n-1}}$$

Calcul du multi-rapport $r(J, B_1, \dots, B_{2i}, B_{2i+1}, \dots, B_{n-1})$ égal à:

$$r = \frac{\overrightarrow{JB_1}}{\overrightarrow{B_1B_2}} \frac{\overrightarrow{B_2B_3}}{\overrightarrow{B_3B_4}} \dots \frac{\overrightarrow{B_{2i}B_{2i+1}}}{\overrightarrow{B_{2i+1}B_{2i+2}}} \dots \frac{\overrightarrow{B_{n-2}B_{n-1}}}{\overrightarrow{B_{n-1}J}}$$

On a progressivement

$$\begin{aligned} \overrightarrow{JB_1} &= \frac{1-k-x_2}{k x_2} \overrightarrow{B_1B_2} \\ \overrightarrow{B_{2i}B_{2i+1}} &= \frac{(x_{2i} - x_{2i+1}) (-1 + k + x_{2i+2})}{(-1 + k + x_{2i}) (x_{2i+1} - x_{2i+2})} \overrightarrow{B_{2i+1}B_{2i+2}} \\ \overrightarrow{B_{n-2}B_{n-1}} &= \frac{k (x_{n-2} - x_{n-1})}{(-1 + k + x_{n-2}) (-1 + x_{n-1})} \overrightarrow{B_{n-1}J} \end{aligned}$$

Le produit des rapports de proportionalité est

$$\begin{aligned} r &= \frac{1-k-x_2}{k x_2} \prod_{i \geq 1} \left(\frac{(x_{2i} - x_{2i+1}) (-1 + k + x_{2i+2})}{(-1 + k + x_{2i}) (x_{2i+1} - x_{2i+2})} \right) \frac{k (x_{n-2} - x_{n-1})}{(-1 + k + x_{n-2}) (-1 + x_{n-1})} \\ &= \frac{-1}{x_2} \prod_{i \geq 1} \left(\frac{x_{2i} - x_{2i+1}}{x_{2i+1} - x_{2i+2}} \right) \frac{(x_{n-2} - x_{n-1})}{(-1 + x_{n-1})} \end{aligned}$$

Il en résulte que

$$r(J, A_1, \dots, A_{2i}, A_{2i+1}, \dots, A_{n-1}) = r(J, B_1, \dots, B_{2i}, B_{2i+1}, \dots, B_{n-1})$$

2). **Dessin** = Dessin $\cup \{C_{s,t}, C_i\} = \{A, A_1, \dots, A_i, \dots, B_i, \dots, C_1, \dots, C_i, \dots, C_{n-1}, J, C_{s,t}\}$

Détermination du point $C_{s,t}$:

Soit $C_{s,t}$ le point $(A_s B_t) \cap (A_t B_s)$. Le point $C_{s,t}$ est composé.

Comme $C_{s,t} \in (A_s B_t)$, on a, en choisissant l'inconnue ν_1

$$\overrightarrow{OC_{s,t}} = \nu_1 \overrightarrow{OA_s} + (1 - \nu_1) \overrightarrow{OB_t}$$

On déduit:

$$\overrightarrow{OC_{s,t}} = e(1) \overrightarrow{OA_1} + e(2) \overrightarrow{OB_1} + e(3) \overrightarrow{OJ}$$

avec

$$\begin{aligned} e(1) &= \nu_1 (1 - x_s) \\ e(2) &= \frac{(-1 + k) (-1 + \nu_1) (-1 + x_t)}{-1 + k + x_t} \\ e(3) &= \frac{\nu_1 x_s - k \nu_1 x_s - k x_t + k \nu_1 x_t - \nu_1 x_s x_t}{1 - k - x_t} \end{aligned}$$

Comme $C_{s,t} \in (A_t B_s)$, on a, en choisissant l'inconnue μ_1

$$\overrightarrow{OC_{s,t}} = \mu_1 \overrightarrow{OA_t} + (1 - \mu_1) \overrightarrow{OB_s}$$

On déduit:

$$\overrightarrow{OC_{s,t}} = f(1) \overrightarrow{OA_1} + f(2) \overrightarrow{OB_1} + f(3) \overrightarrow{OJ}$$

avec

$$\begin{aligned} f(1) &= \mu_1 (1 - x_t) \\ f(2) &= \frac{(-1 + k) (-1 + \mu_1) (-1 + x_s)}{-1 + k + x_s} \\ f(3) &= \frac{-k x_s + k \mu_1 x_s + \mu_1 x_t - k \mu_1 x_t - \mu_1 x_s x_t}{1 - k - x_s} \end{aligned}$$

La résolution du système linéaire d'inconnues ν_1, μ_1 donne

$$\nu_1 = \frac{k (-1 + x_t)}{1 - 2k - x_s + k x_s - x_t + k x_t + x_s x_t} \quad \mu_1 = \frac{k (-1 + x_s)}{1 - 2k - x_s + k x_s - x_t + k x_t + x_s x_t}$$

On déduit que:

$$C_{s,t} = \left\{ \frac{k (1 - x_s) (-1 + x_t)}{1 - 2k - x_s + k x_s - x_t + k x_t + x_s x_t}, \frac{(-1 + k) (1 - x_s) (-1 + x_t)}{1 - 2k - x_s + k x_s - x_t + k x_t + x_s x_t}, \frac{k (-x_s - x_t + 2 x_s x_t)}{1 - 2k - x_s + k x_s - x_t + k x_t + x_s x_t} \right\}$$

Et

$$C_i = C_{i,i+1} = \left\{ \frac{k (1 - x_i) (-1 + x_{i+1})}{1 - 2k - x_i + k x_i - x_{i+1} + k x_{i+1} + x_i x_{i+1}}, \frac{(-1 + k) (1 - x_i) (-1 + x_{i+1})}{1 - 2k - x_i + k x_i - x_{i+1} + k x_{i+1} + x_i x_{i+1}}, \frac{k (-x_i - x_{i+1} + 2 x_i x_{i+1})}{1 - 2k - x_i + k x_i - x_{i+1} + k x_{i+1} + x_i x_{i+1}} \right\}$$

On vérifie rapidement que le vecteur $\overrightarrow{OC_{s,t}}$ est proportionnel au vecteur constant

$$-k \overrightarrow{OA_1} + (1 - k) \overrightarrow{OB_1} + (-1 + 2k) \overrightarrow{OJ} = -k \overrightarrow{JA_1} + (1 - k) \overrightarrow{JB_1}$$

donc les points $C_i, C_{s,t}$ sont sur une même droite (Δ_2) (qui est la droite de Pappus).

On notera que, pour $1 \leq i \leq n - 3$,

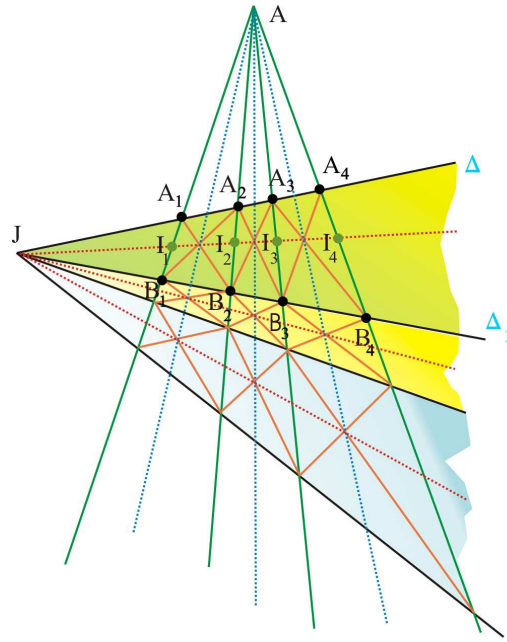
$$\overrightarrow{C_i C_{i+1}} = \frac{(-1 + x_{i+1})^2 (x_i - x_{i+2}) (1 - 2k - x_{i+2} + k x_{i+2} - x_{i+3} + k x_{i+3} + x_{i+2} x_{i+3})}{(1 - 2k - x_i + k x_i - x_{i+1} + k x_{i+1} + x_i x_{i+1}) (-1 + x_{i+2})^2 (x_{i+1} - x_{i+3})} \overrightarrow{C_{i+1} C_{i+2}}$$

Dessin = Dessin $\cup \{I_i\} = \{A, A_1, \dots, A_i, \dots, B_i, \dots, C_i, \dots, C_{n-1}, I_1, \dots, I_i, \dots, I_n, J, C_{s,t}\}$

3). Détermination du point I_i :

Soit I_i le point $(C_1 C_2) \cap (A_i B_i)$. On obtient par un calcul similaire

$$I_i = \left\{ \frac{k (1 - x_i)}{-1 + 2k + x_i}, \frac{(-1 + k) (1 - x_i)}{-1 + 2k + x_i}, \frac{2k x_i}{-1 + 2k + x_i} \right\}$$



Dessin = Dessin $\cup \{W_1\} = \{A, A_1, \dots, A_i, \dots, B_i, \dots, C_i, \dots, I_i, \dots, I_n, J, C_{s,t}, W_1\}$

Détermination du point W_1 :

La droite (Δ) (resp. (Δ_1) , (Δ_2)) est la droite (A_1A_2) (resp. (B_1B_2) , (C_1C_2)).

Soit W_1 le point $(C_1C_2) \cap (A_1A_2)$. Le point W_1 est composé.

Comme $W_1 \in (C_1C_2)$, on a, en choisissant l'inconnue ν_1

$$\overrightarrow{OW_1} = \nu_1 \overrightarrow{OC_1} + (1 - \nu_1) \overrightarrow{OC_2}$$

On déduit:

$$\overrightarrow{OW_1} = g(1) \overrightarrow{OA_1} + g(2) \overrightarrow{OB_1} + g(3) \overrightarrow{OJ}$$

avec

$$g(1) = \frac{k(-1+x_2)(1-2k-x_2+kx_2-x_3+2kx_3-k\nu_1x_3+x_2x_3-kx_2x_3+k\nu_1x_2x_3)}{(1-2k-x_2+kx_2)(1-2k-x_2+kx_2-x_3+kx_3+x_2x_3)}$$

$$g(2) = \frac{(-1+k)(-1+x_2)(1-2k-x_2+kx_2-x_3+2kx_3-k\nu_1x_3+x_2x_3-kx_2x_3+k\nu_1x_2x_3)}{(1-2k-x_2+kx_2)(1-2k-x_2+kx_2-x_3+kx_3+x_2x_3)}$$

$$g(3) = \frac{-kg(3)^*}{(1-2k-x_2+kx_2)(1-2k-x_2+kx_2-x_3+kx_3+x_2x_3)}$$

avec

$$g(3)^* = x_2 - 2kx_2 - x_2^2 + kx_2^2 + x_3 - 2kx_3 - \nu_1x_3 + 2k\nu_1x_3 - 3x_2x_3 + 5kx_2x_3 + 2\nu_1x_2x_3 - 4k\nu_1x_2x_3 + 2x_2^2x_3 - 2kx_2^2x_3 - \nu_1x_2^2x_3 + 2k\nu_1x_2^2x_3$$

Comme $W_1 \in (A_1A_2)$, on a, en choisissant l'inconnue μ_1

$$\overrightarrow{OW_1} = \mu_1 \overrightarrow{OA_1} + (1 - \mu_1) \overrightarrow{OA_2}$$

On déduit:

$$\overrightarrow{OW_1} = h(1) \overrightarrow{OA_1} + h(2) \overrightarrow{OB_1} + h(3)OJ$$

avec

$$h(1) = 1 - x_2 + \mu_1 x_2$$

$$h(2) = 0$$

$$h(3) = (1 - \mu_1) x_2$$

La résolution du système linéaire d'inconnues ν_1, μ_1 donne

$$\mu_1 = \frac{-1 + x_2}{x_2} \quad \nu_1 = \frac{(1 - 2k - x_2 + kx_2)(-1 + x_3)}{k(-1 + x_2)x_3}$$

On déduit que:

$$W_1 = \{0, 0, 1\} = J$$

Dessin = Dessin $\cup \{W_2\} = \{A, A_1, \dots, A_i, \dots, B_i, \dots, \dots, C_i, \dots, I_i, \dots, I_n, J, C_{s,t}, W_1, W_2\}$

Détermination du point W_2 :

Soit W_2 le point $(C_1C_2) \cap (B_1B_2)$. Le point W_2 est composé.

Comme $W_2 \in (C_1C_2)$, on a, en choisissant l'inconnue ν_1

$$\overrightarrow{OW_2} = \nu_1 \overrightarrow{OC_1} + (1 - \nu_1) \overrightarrow{OC_2}$$

On déduit:

$$\overrightarrow{OW_2} = i(1) \overrightarrow{OA_1} + i(2) \overrightarrow{OB_1} + i(3)OJ$$

avec

$$i(1) = \frac{k(-1 + x_2)(1 - 2k - x_2 + kx_2 - x_3 + 2kx_3 - k\nu_1x_3 + x_2x_3 - kx_2x_3 + k\nu_1x_2x_3)}{(1 - 2k - x_2 + kx_2)(1 - 2k - x_2 + kx_2 - x_3 + kx_3 + x_2x_3)}$$

$$i(2) = \frac{(-1 + k)(-1 + x_2)(1 - 2k - x_2 + kx_2 - x_3 + 2kx_3 - k\nu_1x_3 + x_2x_3 - kx_2x_3 + k\nu_1x_2x_3)}{(1 - 2k - x_2 + kx_2)(1 - 2k - x_2 + kx_2 - x_3 + kx_3 + x_2x_3)}$$

$$i(3) = \frac{-ki(3)^*}{(1 - 2k - x_2 + kx_2)(1 - 2k - x_2 + kx_2 - x_3 + kx_3 + x_2x_3)}$$

avec

$$i(3)^* = x_2 - 2kx_2 - x_2^2 + kx_2^2 + x_3 - 2kx_3 - \nu_1x_3 + 2k\nu_1x_3 - 3x_2x_3 + 5kx_2x_3 + 2\nu_1x_2x_3 - 4k\nu_1x_2x_3 + 2x_2^2x_3 - 2kx_2^2x_3 - \nu_1x_2^2x_3 + 2k\nu_1x_2^2x_3$$

Comme $W_2 \in (B_1B_2)$, on a, en choisissant l'inconnue μ_1

$$\overrightarrow{OW_2} = \mu_1 \overrightarrow{OB_1} + (1 - \mu_1) \overrightarrow{OB_2}$$

On déduit:

$$\overrightarrow{OW_2} = j(1) \overrightarrow{OA_1} + j(2) \overrightarrow{OB_1} + j(3)OJ$$

avec

$$j(1) = 0$$

$$j(2) = \frac{-1 + k + x_2 - k x_2 + k \mu_1 x_2}{-1 + k + x_2}$$

$$j(3) = \frac{k (1 - \mu_1) x_2}{-1 + k + x_2}$$

La résolution du système linéaire d'inconnues ν_1, μ_1 donne

$$\mu_1 = \frac{(-1 + k) (-1 + x_2)}{k x_2} \quad \nu_1 = \frac{(1 - 2k - x_2 + k x_2) (-1 + x_3)}{k (-1 + x_2) x_3}$$

On déduit que:

$$W_2 = \{0, 0, 1\} = J$$

Calcul du multi-rapport $r(J, I1, C_1, I2, \dots, C_i, I_{i+1}, \dots, C_{n-2}, I_{n-1}, C_{n-1}, I_n)$ égal à:

$$r = \frac{\overrightarrow{JI1}}{\overrightarrow{I1C_1}} \frac{\overrightarrow{C_1I2}}{\overrightarrow{I2C_2}} \dots \frac{\overrightarrow{C_iI_{i+1}}}{\overrightarrow{I_{i+1}C_{i+1}}} \dots \frac{\overrightarrow{C_{n-1}I_n}}{\overrightarrow{I_nJ}}$$

On a progressivement

$$\overrightarrow{JI1} = \frac{1 - 2k - x_2 + k x_2}{k x_2} \overrightarrow{I1C_1}$$

$$\overrightarrow{C_1I2} = (-1) \frac{x_2 (1 - 2k - x_2 + k x_2 - x_3 + k x_3 + x_2 x_3)}{(1 - 2k - x_2 + k x_2) (x_2 - x_3)}, \overrightarrow{I2C_2}$$

$$\overrightarrow{C_{2i+1}I_{2i+2}} = \frac{(x_{2i+1} - x_{2i+2}) (1 - 2k - x_{2i+2} + k x_{2i+2} - x_{2i+3} + k x_{2i+3} + x_{2i+2} x_{2i+3})}{(1 - 2k - x_{2i+1} + k x_{2i+1} - x_{2i+2} + k x_{2i+2} + x_{2i+1} x_{2i+2}) (x_{2i+2} - x_{2i+3})} \overrightarrow{I_{2i+2}C_{2i+2}}$$

$$\overrightarrow{C_{n-1}I_n} = \frac{k (x_{n-1} - x_n)}{1 - 2k - x_{n-1} + k x_{n-1} - x_n + k x_n + x_{n-1} x_n} \overrightarrow{I_nJ}$$

Le produit des rapports de proportionalité est

$$r = -1$$

4). Détermination de $(F_1^{i,j,k} \cap F_2^{i,j,k})$ et $(G_1^{i,j,k} \cap G_2^{i,j,k})$:

On peut supposer, quitte à changer les indices, que $i = 1, j = 2, k = 3$.

Dessin = Dessin $\cup \{F_1, F_2\} = \{A, A_1, \dots, A_i, \dots, B_i, \dots, \dots, C_i, \dots, I_i, \dots, I_n, F_1, F_2, J, C_{s,t}, W_1, W_2\}$

Détermination du point F_1 :

Soit F_1 le point $(A_1B_3) \cap (A_2B_1)$. Le point F_1 est composé.

Comme $F_1 \in (A_1B_3)$, on a, en choisissant l'inconnue ν_1

$$\overrightarrow{OF_1} = \nu_1 \overrightarrow{OA_1} + (1 - \nu_1) \overrightarrow{OB_3}$$

On déduit:

$$\overrightarrow{OF_1} = m(1) \overrightarrow{OA_1} + m(2) \overrightarrow{OB_1} + m(3) \overrightarrow{OJ}$$

avec

$$m(1) = \nu_1$$

$$m(2) = \frac{(-1 + k) (-1 + \nu_1) (-1 + x_3)}{-1 + k + x_3}$$

$$m(3) = \frac{k (1 - \nu_1) x_3}{-1 + k + x_3}$$

Comme $F_1 \in (A_2B_1)$, on a, en choisissant l'inconnue μ_1

$$\overrightarrow{OF_1} = \mu_1 \overrightarrow{OA_2} + (1 - \mu_1) \overrightarrow{OB_1}$$

On déduit:

$$\overrightarrow{OF_1} = n(1) \overrightarrow{OA_1} + n(2) \overrightarrow{OB_1} + n(3) \overrightarrow{OJ}$$

avec

$$n(1) = \mu_1 (1 - x_2)$$

$$n(2) = 1 - \mu_1$$

$$n(3) = \mu_1 x_2$$

La résolution du système linéaire d'inconnues ν_1, μ_1 donne

$$\nu_1 = \frac{k(-1 + x_2)x_3}{x_2 - kx_2 - kx_3 - x_2x_3 + kx_2x_3} \quad \mu_1 = \frac{-kx_3}{x_2 - kx_2 - kx_3 - x_2x_3 + kx_2x_3}$$

Détermination du point F_2 :

Soit F_2 le point $(A_2B_3) \cap (A_3B_1)$. Le point F_2 est composé. Les mêmes calculs fournissent:

$$F_2 = \left\{ \frac{k(-1 + x_2)(-1 + x_3)x_3}{x_2 - kx_2 - x_3 + 2kx_3 - x_2x_3 + x_3^2 - kx_3^2}, \frac{(1 - k)(x_2 - x_3)(1 - x_3)}{x_2 - kx_2 - x_3 + 2kx_3 - x_2x_3 + x_3^2 - kx_3^2}, \frac{k(1 - x_2)x_3^2}{x_2 - kx_2 - x_3 + 2kx_3 - x_2x_3 + x_3^2 - kx_3^2} \right\}$$

Dessin = Dessin $\cup \{G_1, G_2\} = \{A, A_1, \dots, A_i, \dots, B_i, \dots, \dots, C_i, \dots, I_i, \dots, I_n, F_1, F_2, G_1, G_2, J, C_{s,t}, W_1, W_2\}$

Détermination du point G_1 :

Soit G_1 le point $(B_1A_3) \cap (B_2A_1)$. Le point G_1 est composé.

Comme $G_1 \in (B_1A_3)$, on a, en choisissant l'inconnue ν_1

$$\overrightarrow{OG_1} = (1 - \nu_1) \overrightarrow{OA_3} + \nu_1 \overrightarrow{OB_1}$$

On déduit:

$$\overrightarrow{OG_1} = q(1) \overrightarrow{OA_1} + q(2) \overrightarrow{OB_1} + q(3) \overrightarrow{OJ}$$

avec

$$q(1) = (-1 + \nu_1)(-1 + x_3)$$

$$q(2) = \nu_1$$

$$q(3) = (1 - \nu_1)x_3$$

Comme $G_1 \in (B_2A_1)$, on a, en choisissant l'inconnue μ_1

$$\overrightarrow{OG_1} = (1 - \mu_1) \overrightarrow{OA_1} + \mu_1 \overrightarrow{OB_2}$$

On déduit:

$$\overrightarrow{OG_1} = r(1) \overrightarrow{OA_1} + r(2) \overrightarrow{OB_1} + r(3) \overrightarrow{OJ}$$

avec

$$\begin{aligned} r(1) &= 1 - \mu_1 \\ r(2) &= \frac{(1-k) \mu_1 (-1+x_2)}{-1+k+x_2} \\ r(3) &= \frac{k \mu_1 x_2}{-1+k+x_2} \end{aligned}$$

La résolution du système linéaire d'inconnues ν_1, μ_1 donne

$$\begin{aligned} \nu_1 &= \frac{(-1+k) (-1+x_2) x_3}{-k x_2 + x_3 - k x_3 - x_2 x_3 + k x_2 x_3} \\ \mu_1 &= \frac{(1-k-x_2) x_3}{-k x_2 + x_3 - k x_3 - x_2 x_3 + k x_2 x_3} \end{aligned}$$

On déduit que:

$$G_1 = \left\{ \frac{-k x_2 (-1+x_3)}{k x_2 + x_3 - 2k x_3 - x_2 x_3 - x_3^2 + k x_3^2 + x_2 x_3^2}, \frac{(1-k) (-1+x_2) x_3}{k x_2 + x_3 - 2k x_3 - x_2 x_3 - x_3^2 + k x_3^2 + x_2 x_3^2}, \frac{k x_2 x_3}{k x_2 + x_3 - 2k x_3 - x_2 x_3 - x_3^2 + k x_3^2 + x_2 x_3^2} \right\}$$

Détermination du point G_2 :

Soit G_2 le point $(B_2A_3) \cap (B_3A_1)$. Le point G_2 est composé. Les mêmes calculs fournissent:

$$G_2 = \left\{ \frac{-k (x_2 - x_3) (-1+x_3)}{k x_2 + x_3 - 2k x_3 - x_2 x_3 - x_3^2 + k x_3^2 + x_2 x_3^2}, \frac{(1-k) (-1+x_2) (-1+x_3) x_3}{k x_2 + x_3 - 2k x_3 - x_2 x_3 - x_3^2 + k x_3^2 + x_2 x_3^2}, \frac{k (-1+x_2) x_3^2}{k x_2 + x_3 - 2k x_3 - x_2 x_3 - x_3^2 + k x_3^2 + x_2 x_3^2} \right\}$$

Dessin = Dessin $\cup \{K_1, K_2\} = \{A, A_1, \dots, A_i, \dots, B_i, \dots, \dots, C_i, \dots, I_i, \dots, I_n, F_1, F_2, G_1, G_2, K_1, K_2, J, C_{s,t}, W_1, W_2\}$

Détermination du point K_1 :

Soit K_1 le point $(C_1C_2) \cap (F_1F_2)$. Le point K_1 est composé.

On obtient:

$$K_1 = \left\{ \frac{k (-1+x_2) (-1+x_3) (-2x_2+x_3+x_2x_3)}{k_*}, \frac{(-1+k) (-1+x_2) (-1+x_3) (-2x_2+x_3+x_2x_3)}{k_*}, \frac{-k (x_2^2+x_2x_3-3x_2^2x_3-x_3^2+x_2x_3^2+x_2^2x_3^2)}{k_*} \right\}$$

avec

$$\begin{aligned} k_* &= 2x_2 - 4kx_2 - 2x_2^2 + 3kx_2^2 - x_3 + 2kx_3 - 2x_2x_3 + 3kx_2x_3 + 3x_2^2x_3 - 3kx_2^2x_3 \\ &\quad + x_3^2 - kx_3^2 - kx_2x_3^2 - x_2^2x_3^2 + kx_2^2x_3^2 \end{aligned}$$

Détermination du point K_2 :

Soit K_2 le point $(C_1C_2) \cap (G_1G_2)$. Le point K_2 est composé.

Le même calcul fournit $K_1 = K_2$, donc $K_1 \in (\Delta_2)$.

8.5 Invariance du multi-rapport

Exercice 8.5.1

Le multi-rapport est invariant par transformation homographique.

Solution:

Soit n un entier pair et A_i des points du plan, d'affixe z_i pour $1 \leq i \leq n$ (on posera $z_{n+1} = z_1$). Identifions chaque point A_i avec le nombre complexe z_i . La transformation homographique h est de la forme

$$h(z) = \frac{a z + b}{c z + d}$$

avec a, b, c, d constantes telles que $ad - bc \neq 0$. Le multi-rapport $r(A_1, A_2, \dots, A_{n-1}, A_n)$ a pour valeur

$$r = \prod_{i=1}^{i=\frac{n}{2}} \frac{z_{2i} - z_{2i-1}}{z_{2i+1} - z_{2i}}$$

et on a

$$r(h(A_1), h(A_2), \dots, h(A_{n-1}), h(A_n)) = \prod_{i=1}^{i=\frac{n}{2}} \frac{h(z_{2i}) - h(z_{2i-1})}{h(z_{2i+1}) - h(z_{2i})}$$

Or

$$\frac{h(z_{2i}) - h(z_{2i-1})}{h(z_{2i+1}) - h(z_{2i})} = \frac{(z_{2i-1} - z_{2i})(c z_{2i+1} + d)}{(z_{2i} - z_{2i+1})(c z_{2i-1} + d)}$$

et

$$\prod_{i=1}^{i=\frac{n}{2}} \frac{(c z_{2i+1} + d)}{(c z_{2i-1} + d)} = 1$$

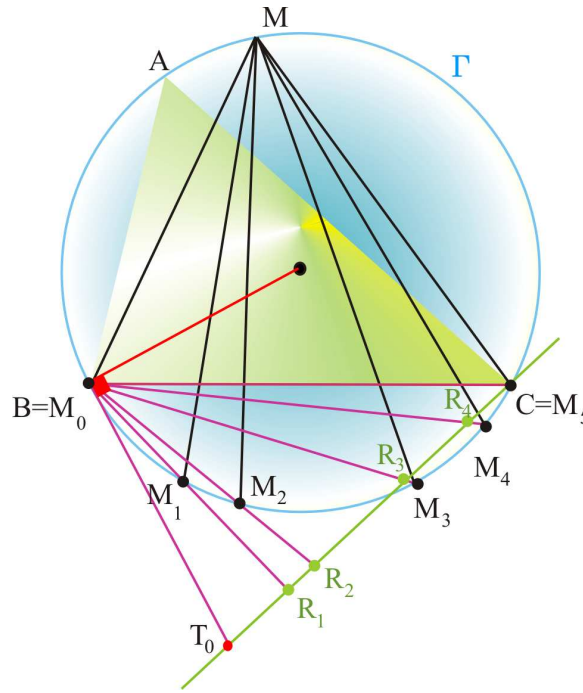
donc

$$r(h(A_1), h(A_2), \dots, h(A_{n-1}), h(A_n)) = r(A_1, A_2, \dots, A_{n-1}, A_n)$$

Exercice 8.5.2

Soient Γ un cercle et $M_0, M_1, M_2, \dots, M_n$ un nombre pair de points fixes du cercle (supposés distincts deux à deux) et M un point variable du cercle distinct des points précédents. On considère le faisceau de droites $(MM_0), (MM_1), (MM_2), \dots, (MM_n)$.

1. Montrer que le multi-rapport r du faisceau de droites $(MM_0), (MM_1), (MM_2), \dots, (MM_n)$ est indépendant du point M lorsque M varie sur le cercle.
2. Sur la tangente au cercle Γ en M_0 , soit T_0 un point distinct du point M_0 . On pose $R_i = (M_0 M_i) \cap (T_0 M_n)$ pour $1 \leq i \leq n-1$. Montrer que le multi-rapport r^* du faisceau de droites $(M_0 T_0), (M_0 R_1), (M_0 R_2), \dots, (M_0 R_n)$ est égal au multi-rapport r .

**Solution:**

1). Posons $B = M_0$ et $C = M_n$ et choisissons un point A du cercle distincts des points M_i et du point M : le cercle Γ est donc circonscrit au triangle ABC . Il nous suffit de montrer que le multi-rapport r du faisceau de droites $(MM_0), (MM_1), (MM_2), \dots, (MM_n)$ est égal au multi-rapport du faisceau formé par les droites $(AM_0), (AM_1), (AM_2), \dots, (AM_n)$ (ou alors il suffit d'observer que le multi-rapport r du faisceau de droites $(MM_0), (MM_1), (MM_2), \dots, (MM_n)$ est indépendant du paramétrage du point M). La valeur de chacun des multirapports est calculée en utilisant les points d'intersection de chacun des faisceaux avec la droite (BC) .

Calculons la valeur du multi-rapport en déterminant les intersections $P_i = (AM_i) \cap (BC)$ pour $1 \leq i \leq n-1$. Ainsi, le multi-rapport r du faisceau de droites $(MA), (MM_1), (MM_2), \dots, (MM_{n-1}), (MB)$, a pour valeur

$$r = \frac{\overline{BM_1}}{\overline{M_1M_2}} \frac{\overline{M_2M_3}}{\overline{M_3M_4}} \dots \frac{\overline{M_{n-3}M_{n-2}}}{\overline{M_{n-2}M_{n-1}}} \frac{\overline{M_{n-1}C}}{\overline{CB}}$$

Dessin = $\{A, B, C, M, M_1, M_2, \dots, M_{n-2}, M_{n-1}\}$

Le repère barycentrique choisi est A, B, C .

Les points composés sont $M, M_1, M_2, \dots, M_{n-2}, M_{n-1}$.

Les coordonnées barycentriques des points composés sont, pour $1 \leq i \leq n-1$:

$$M = \left\{ \frac{x(b^2x + a^2y)}{b^2x^2 + a^2xy + b^2xy - c^2xy + a^2y^2}, \frac{y(b^2x + a^2y)}{b^2x^2 + a^2xy + b^2xy - c^2xy + a^2y^2}, \frac{-c^2xy}{b^2x^2 + a^2xy + b^2xy - c^2xy + a^2y^2} \right\}$$

$$M_i = \left\{ \frac{x_i (b^2 x_i + a^2 y_i)}{b^2 x_i^2 + a^2 x_i y_i + b^2 x_i y_i - c^2 x_i y_i + a^2 y_i^2}, \right. \\ \frac{y_i (b^2 x_i + a^2 y_i)}{b^2 x_i^2 + a^2 x_i y_i + b^2 x_i y_i - c^2 x_i y_i + a^2 y_i^2}, \\ \left. \frac{-c^2 x_i y_i}{b^2 x_i^2 + a^2 x_i y_i + b^2 x_i y_i - c^2 x_i y_i + a^2 y_i^2} \right\}$$

Dessin = Dessin $\cup \{P_i\} = \{A, B, C, M, M_1, M_2, \dots, M_{n-2}, M_{n-1}, P_1, P_2, \dots, P_{n-2}, P_{n-1}\}$

Détermination du point P_i :

Soit P_i le point $(BC) \cap (AM_i)$. Le point P_i est composé.

On obtient:

$$P_i = \left\{ 0, \frac{b^2 x_i + a^2 y_i}{b^2 x_i - c^2 x_i + a^2 y_i}, \frac{-c^2 x_i}{b^2 x_i - c^2 x_i + a^2 y_i} \right\}$$

Dessin = Dessin $\cup \{Q_i\} = \{A, B, C, M, M_1, M_2, \dots, M_{n-2}, M_{n-1}, P_1, P_2, \dots, P_{n-2}, P_{n-1}, Q_1, Q_2, \dots, Q_{n-2}, Q_{n-1}\}$

Détermination du point Q_i :

Soit Q_i le point $(BC) \cap (MM_i)$. Le point Q_i est composé.

On obtient

$$Q_i = \left\{ 0, \frac{(b^2 x + a^2 y) (b^2 x_i + a^2 y_i)}{b^4 x x_i - b^2 c^2 x x_i + a^2 b^2 x_i y + a^2 b^2 x y_i + a^4 y y_i}, \right. \\ \left. \frac{-b^2 c^2 x x_i}{b^4 x x_i - b^2 c^2 x x_i + a^2 b^2 x_i y + a^2 b^2 x y_i + a^4 y y_i} \right\}$$

Calcul du multi-rapport $r(B, P_1, P_2, P_3, \dots, P_{n-1}, C)$ égal à:

$$r_1 = \frac{\overline{BP_1}}{\overline{P_1P_2}} \frac{\overline{P_2P_3}}{\overline{P_3P_4}} \dots \frac{\overline{P_{n-1}C}}{\overline{CB}}$$

On a progressivement

$$\overrightarrow{BP_1} = \frac{x_1 (b^2 x_2 - c^2 x_2 + a^2 y_2)}{a^2 (x_2 y_1 - x_1 y_2)} \overrightarrow{P_1P_2}$$

$$\overrightarrow{P_{2i}P_{2i+1}} = \frac{(-x_{2i+1} y_{2i} + x_{2i} y_{2i+1}) (b^2 x_{2i+2} - c^2 x_{2i+2} + a^2 y_{2i+2})}{(b^2 x_{2i} - c^2 x_{2i} + a^2 y_{2i}) (-x_{2i+2} y_{2i+1} + x_{2i+1} y_{2i+2})} \overrightarrow{P_{2i+1}P_{2i+2}}$$

$$\overrightarrow{P_{n-1}C} = -\frac{b^2 x_{n-1} + a^2 y_{n-1}}{b^2 x_{n-1} - c^2 x_{n-1} + a^2 y_{n-1}} \overrightarrow{CB}$$

Le produit des rapports de proportionalité est

$$r_1 = \frac{x_1 (-x_3 y_2 + x_2 y_3) \dots (-x_{2i+1} y_{2i} + x_{2i} y_{2i+1}) \dots (b^2 x_{n-1} + a^2 y_{n-1})}{a^2 (-x_2 y_1 + x_1 y_2) \dots (-x_{2i} y_3 + x_3 y_{2i}) \dots (-x_{n-1} y_{n-2} + x_{n-2} y_{n-1})}$$

Calcul du multi-rapport $r(B, Q_1, Q_2, \dots, Q_{n-1}, C)$ égal à:

$$r_2 = \frac{\overline{BQ_1}}{\overline{Q_1Q_2}} \frac{\overline{Q_2Q_3}}{\overline{Q_3Q_4}} \dots \frac{\overline{Q_{n-1}C}}{\overline{CB}}$$

On a progressivement

$$\overrightarrow{BQ_1} = \frac{x_1 (b^4 x x_2 - b^2 c^2 x x_2 + a^2 b^2 x_2 y + a^2 b^2 x y_2 + a^4 y y_2)}{a^2 (b^2 x + a^2 y) (x_2 y_1 - x_1 y_2)} \overrightarrow{Q_1Q_2}$$

$$\begin{aligned}
& \overrightarrow{Q_{2i}Q_{2i+1}} \\
&= \frac{(-x_{2i+1}y_{2i} + x_{2i}y_{2i+1})(b^4x_{2i+2} - b^2c^2x_{2i+2} + a^2b^2x_{2i+2}y + a^2b^2xy_{2i+2} + a^4yy_{2i+2})}{(b^4x_{2i} - b^2c^2x_{2i} + a^2b^2x_{2i}y + a^2b^2xy_{2i} + a^4yy_{2i})(-x_{2i+2}y_{2i+1} + x_{2i+1}y_{2i+2})} \overrightarrow{Q_{2i+1}Q_{2i+2}} \\
& \overrightarrow{Q_{n-1}C} = -\frac{(b^2x + a^2y)(b^2x_{n-1} + a^2y_{n-1})}{b^4xx_{n-1} - b^2c^2xx_{n-1} + a^2b^2x_{n-1}y + a^2b^2xy_{n-1} + a^4yy_{n-1}} \overrightarrow{CB}
\end{aligned}$$

Le produit des rapports de proportionnalité est

$$r_2 = \frac{x_1(-x_3y_2 + x_2y_3) \cdots (-x_{2i+1}y_{2i} + x_{2i}y_{2i+1}) \cdots (b^2x_{n-1} + a^2y_{n-1})}{a^2(-x_2y_1 + x_1y_2) \cdots (-x_{2i}y_3 + x_3y_{2i}) \cdots (-x_{n-1}y_{n-2} + x_{n-2}y_{n-1})}$$

On a bien $r_1 = r_2$.

2). **Dessin** = Dessin $\cup \{R_i\} = \{A, B, C, M, M_1, M_2, \dots, M_{n-2}, M_{n-1}, P_1, P_2, \dots, P_{n-2}, P_{n-1}, Q_1, Q_2, \dots, Q_{n-2}, Q_{n-1}, R_1, R_2, \dots, R_{n-2}, R_{n-1}\}$

Détermination du point R_i :

Soit R_i le point $(T_0C) \cap (BM_i)$. Le point R_i est composé.

On obtient:

$$R_i = \left\{ \frac{a^2(b^2x_i + a^2y_i)}{b^2x_i + b^2c^2x_i + a^2y_i}, \frac{(1 - a^2 + c^2)(b^2x_i + a^2y_i)}{b^2x_i + b^2c^2x_i + a^2y_i}, \frac{-a^2c^2y_i}{b^2x_i + b^2c^2x_i + a^2y_i} \right\}$$

Calcul du multi-rapport $r(T_0, R_1, R_2, R_3, R_4, R_5, R_{n-1}, C)$ égal à:

$$r^* = \frac{\overrightarrow{T_0R_1}}{\overrightarrow{R_1R_2}} \frac{\overrightarrow{R_2R_3}}{\overrightarrow{R_3R_4}} \cdots \frac{\overrightarrow{R_{n-1}C}}{\overrightarrow{CT_0}}$$

On a progressivement

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{T_0R_1} &= \frac{x_1(b^2x_2 + b^2c^2x_2 + a^2y_2)}{a^2(x_2y_1 - x_1y_2)} \overrightarrow{R_1R_2} \\
\overrightarrow{R_{2i}R_{2i+1}} &= \frac{(-x_{2i+1}y_{2i} + x_{2i}y_{2i+1})(b^2x_{2i+2} + b^2c^2x_{2i+2} + a^2y_{2i+2})}{(b^2x_{2i} + b^2c^2x_{2i} + a^2y_{2i})(-x_{2i+2}y_{2i+1} + x_{2i+1}y_{2i+2})} \overrightarrow{R_{2i+1}R_{2i+2}} \\
\overrightarrow{R_{n-1}C} &= -\frac{b^2x_{n-1} + a^2y_{n-1}}{b^2x_{n-1} + b^2c^2x_{n-1} + a^2y_{n-1}} \overrightarrow{CT_0}
\end{aligned}$$

Le produit des rapports de proportionnalité est

$$r^* = \frac{x_1(-x_3y_2 + x_2y_3) \cdots (-x_{2i+1}y_{2i} + x_{2i}y_{2i+1}) \cdots (b^2x_{n-1} + a^2y_{n-1})}{a^2(-x_2y_1 + x_1y_2) \cdots (-x_{2i}y_3 + x_3y_{2i}) \cdots (-x_{n-1}y_{n-2} + x_{n-2}y_{n-1})}$$

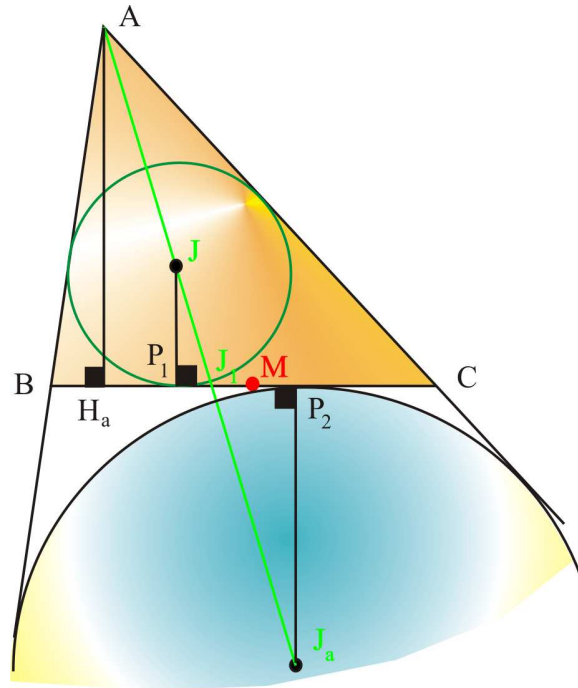
On a donc $r^* = r$.

8.6 Faisceau harmonique

Exercice 8.6.1

Soit un triangle ABC , AH_a la hauteur issue de A (donc $H_a \in (BC)$), J_1 le pied de la bissectrice intérieure de l'angle A , P_1 et P_2 les projections sur (BC) du centre du cercle inscrit J et du centre du cercle exinscrit J_a tangent extérieurement au côté (BC) .

Montrer que les points A, J, J_1, J_a forment une division harmonique, ainsi que les points H_a, P_1, J_1, P_2 . Etablir que $MP_1^2 = \overline{MH_a} \cdot \overline{MJ_1}$, M désignant le milieu de $[BC]$.



Solution rapide:

Dessin = $\{A, B, C, H_a, J, J_1, J_a\}$

Le repère barycentrique choisi est A, B, C .

Les points composés sont H_a, J, J_a, J_1 .

Les coordonnées barycentriques des points composés sont:

$$H_a = \left\{0, \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2a^2}, \frac{a^2 - b^2 + c^2}{2a^2}\right\}$$

$$J = \left\{\frac{a}{a+b+c}, \frac{b}{a+b+c}, \frac{c}{a+b+c}\right\}$$

$$J_a = \left\{\frac{a}{a-b-c}, \frac{b}{-a+b+c}, \frac{c}{-a+b+c}\right\}$$

$$J_1 = \left\{0, \frac{b}{b+c}, \frac{c}{b+c}\right\}$$

Dessin = $\text{Dessin} \cup \{P_1, P_2\} = \{A, B, C, H_a, J, J_1, J_a, P_1, P_2\}$

Le repère barycentrique choisi est A, B, C .

Les points composés sont P_1, P_2 .

La projection du point J sur la droite (BC) est le point P_1 de coordonnées barycentriques

$$P_1 = \left\{0, \frac{a+b-c}{2a}, \frac{a-b+c}{2a}\right\}$$

La projection du point J_a sur la droite (BC) est le point P_2 de coordonnées barycentriques

$$P_2 = \left\{0, \frac{a-b+c}{2a}, \frac{a+b-c}{2a}\right\}$$

On a ainsi

$$\overrightarrow{AJ} = \frac{b+c}{a} \overrightarrow{JJ_1}$$

On a ainsi

$$\overrightarrow{J_1J_a} = \frac{-a}{b+c} \overrightarrow{J_aA}$$

Il suit

$$\frac{\overrightarrow{AJ}}{\overrightarrow{JJ_1}} \frac{\overrightarrow{J_1J_a}}{\overrightarrow{J_aA}} = -1$$

On a ainsi

$$\overrightarrow{H_aP_1} = \frac{b+c}{a} \overrightarrow{P_1J_1}$$

On a ainsi

$$\overrightarrow{J_1P_2} = \frac{-a}{b+c} \overrightarrow{P_2H_a}$$

Il suit

$$\frac{\overrightarrow{H_aP_1}}{\overrightarrow{P_1J_1}} \frac{\overrightarrow{J_1P_2}}{\overrightarrow{P_2H_a}} = -1$$

Dessin = Dessin $\cup \{M\} = \{A, B, C, H_a, J, J_1, J_a, M, P_1, P_2\}$

Le repère barycentrique choisi est A, B, C .

Les points composés sont M .

Les coordonnées barycentriques du point composé sont:

$$M = \left\{0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right\}$$

On a ainsi

$$\overrightarrow{MP_1} = \frac{a}{b+c} \overrightarrow{MH_a}$$

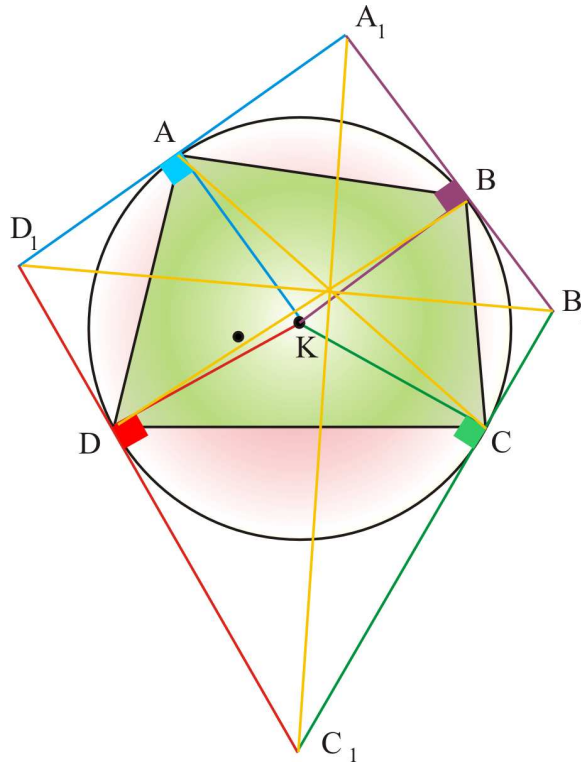
On a ainsi

$$\overrightarrow{MP_1} = \frac{b+c}{a} \overrightarrow{MJ_1}$$

Il suit $MP_1^2 = \overrightarrow{MH_a} \overrightarrow{MJ_1}$.

Exercice 8.6.2

Soit $ABCD$ un quadrilatère inscrit dans un cercle. Les tangentes au cercle, issues des sommets de ce quadrilatère, forment un autre quadrilatère $A_1B_1C_1D_1$. Démontrer que les diagonales des deux quadrilatères sont concourantes et forment un faisceau harmonique.

**Solution rapide:**

Soit K le centre du cercle circonscrit au triangle ABC .

Dessin = $\{A, B, C, D, K\}$

Le repère barycentrique choisi est A, B, C .

Les points composés sont K, D .

Les coordonnées barycentriques des points composés (autres que K) sont:

$$D = \left\{ \frac{x(b^2x + a^2y)}{b^2x^2 + a^2xy + b^2xy - c^2xy + a^2y^2}, \frac{y(b^2x + a^2y)}{b^2x^2 + a^2xy + b^2xy - c^2xy + a^2y^2}, \frac{-c^2xy}{b^2x^2 + a^2xy + b^2xy - c^2xy + a^2y^2} \right\}$$

Dessin = $\text{Dessin} \cup \{I_1\} = \{A, B, C, D, I_1, K\}$

Détermination du point I_1 :

Soit I_1 le point $(AC) \cap (BD)$. Le point I_1 est composé.

On obtient:

$$I_1 = \left\{ \frac{b^2x + a^2y}{b^2x + a^2y - c^2y}, 0, \frac{c^2y}{-b^2x - a^2y + c^2y} \right\}$$

Dessin = $\text{Dessin} \cup \{M_1, M_2, M_3, M_4\} = \{A, B, C, D, I_1, K, M_1, M_2, M_3, M_4\}$

Le repère barycentrique choisi est A, B, C .

Les points composés sont M_1, M_2, M_3, M_4 .

Un point M_1 situé sur la perpendiculaire à (AK) passant par A est

$$M_1 = \{1 + b^2 - c^2, -b^2, c^2\}$$

Un point M_2 situé sur la perpendiculaire à (BK) passant par B est

$$M_2 = \{a^2, 1 - a^2 + c^2, -c^2\}$$

Un point M_3 situé sur la perpendiculaire à (CK) passant par C est

$$M_3 = \{-a^2, b^2, 1 + a^2 - b^2\}$$

Un point M_4 situé sur la perpendiculaire à (DK) passant par D est

$$M_4 = \left\{ \frac{b^2 x^2 + b^4 x^2 - b^2 c^2 x^2 + a^2 x y + 2 a^2 b^2 x y + a^4 y^2}{b^2 x^2 + a^2 x y + b^2 x y - c^2 x y + a^2 y^2}, \right. \\ \left. \frac{-b^4 x^2 + b^2 x y - 2 a^2 b^2 x y + a^2 y^2 - a^4 y^2 + a^2 c^2 y^2}{b^2 x^2 + a^2 x y + b^2 x y - c^2 x y + a^2 y^2}, \right. \\ \left. \frac{c^2 (b^2 x^2 - x y - a^2 y^2)}{b^2 x^2 + a^2 x y + b^2 x y - c^2 x y + a^2 y^2} \right\}$$

Dessin = $\text{Dessin} \cup \{A_1\} = \{A, A_1, B, C, D, I_1, K, M_1, M_2, M_3, M_4\}$

Détermination du point A_1 :

Soit A_1 le point $(AM_1) \cap (BM_2)$. Le point A_1 est composé.

On obtient:

$$A_1 = \left\{ \frac{a^2}{a^2 + b^2 - c^2}, \frac{b^2}{a^2 + b^2 - c^2}, \frac{c^2}{-a^2 - b^2 + c^2} \right\}$$

Dessin = $\text{Dessin} \cup \{B_1\} = \{A, A_1, B, B_1, C, D, I_1, K, M_1, M_2, M_3, M_4\}$

Détermination du point B_1 :

Soit B_1 le point $(BM_2) \cap (CM_3)$. Le point B_1 est composé.

On obtient:

$$B_1 = \left\{ \frac{a^2}{a^2 - b^2 - c^2}, \frac{b^2}{-a^2 + b^2 + c^2}, \frac{c^2}{-a^2 + b^2 + c^2} \right\}$$

Dessin = $\text{Dessin} \cup \{C_1\} = \{A, A_1, B, B_1, C, C_1, D, I_1, K, M_1, M_2, M_3, M_4\}$

Détermination du point C_1 :

Soit C_1 le point $(CM_3) \cap (DM_4)$. Le point C_1 est composé.

On obtient:

$$C_1 = \left\{ \frac{a^2 (b^2 x + a^2 y)}{a^2 b^2 x - b^4 x + b^2 c^2 x + a^4 y - a^2 b^2 y - a^2 c^2 y}, \right. \\ \left. \frac{-b^2 (b^2 x + a^2 y)}{a^2 b^2 x - b^4 x + b^2 c^2 x + a^4 y - a^2 b^2 y - a^2 c^2 y}, \frac{c^2 (b^2 x - a^2 y)}{a^2 b^2 x - b^4 x + b^2 c^2 x + a^4 y - a^2 b^2 y - a^2 c^2 y} \right\}$$

Dessin = $\text{Dessin} \cup \{D_1\} = \{A, A_1, B, B_1, C, C_1, D, D_1, I_1, K, M_1, M_2, M_3, M_4\}$

Détermination du point D_1 :

Soit D_1 le point $(DM_4) \cap (AM_1)$. Le point D_1 est composé.

On obtient:

$$D_1 = \left\{ \frac{2 b^2 x + a^2 y}{2 b^2 x + a^2 y + b^2 y - c^2 y}, \frac{b^2 y}{2 b^2 x + a^2 y + b^2 y - c^2 y}, \frac{c^2 y}{-2 b^2 x - a^2 y - b^2 y + c^2 y} \right\}$$

Dessin = $\text{Dessin} \cup \{W\} = \{A, A_1, B, B_1, C, C_1, D, D_1, I_1, K, M_1, M_2, M_3, M_4, W\}$

Détermination du point W :

Soit W le point $(AC) \cap (BD)$. Le point W est composé.

On obtient:

$$W = \left\{ \frac{b^2 x + a^2 y}{b^2 x + a^2 y - c^2 y}, 0, \frac{c^2 y}{-b^2 x - a^2 y + c^2 y} \right\}$$

Dessin = Dessin $\cup \{W_1\} = \{A, A_1, B, B_1, C, C_1, D, D_1, I_1, K, M_1, M_2, M_3, M_4, W, W_1\}$

Détermination du point W_1 :

Soit W_1 le point $(A_1 C_1) \cap (B_1 D_1)$. Le point W_1 est composé.

On obtient:

$$W_1 = \left\{ \frac{b^2 x + a^2 y}{b^2 x + a^2 y - c^2 y}, 0, \frac{c^2 y}{-b^2 x - a^2 y + c^2 y} \right\}$$

Dessin = Dessin $\cup \{B_2\} = \{A, A_1, B, B_1, B_2, C, C_1, D, D_1, I_1, K, M_1, M_2, M_3, M_4, W, W_1\}$

Détermination du point B_2 :

Soit B_2 le point $(BD) \cap (B_1 C_1)$. Le point B_2 est composé.

$$B_2 = \left\{ \frac{a^2 (b^2 x + a^2 y)}{a^2 b^2 x - b^4 x + a^4 y - a^2 b^2 y - a^2 c^2 y}, \frac{-b^2 (b^2 x + a^2 y)}{a^2 b^2 x - b^4 x + a^4 y - a^2 b^2 y - a^2 c^2 y}, \frac{-a^2 c^2 y}{a^2 b^2 x - b^4 x + a^4 y - a^2 b^2 y - a^2 c^2 y} \right\}$$

On a ainsi

$$\overrightarrow{B_2 C_1} = \frac{-b^2 c^2 x}{-a^2 b^2 x + b^4 x - a^4 y + a^2 b^2 y + a^2 c^2 y} \overrightarrow{C_1 C}$$

On a ainsi

$$\overrightarrow{C B_1} = \frac{-a^2 b^2 x + b^4 x - a^4 y + a^2 b^2 y + a^2 c^2 y}{b^2 c^2 x} \overrightarrow{B_1 B_2}$$

Il résulte que

$$\frac{\overrightarrow{B_2 C_1}}{\overrightarrow{C_1 C}} \frac{\overrightarrow{C B_1}}{\overrightarrow{B_1 B_2}} = -1$$

donc le faisceau est harmonique.

CHAPITRE

9

Projection orthogonale

9 Projection orthogonale

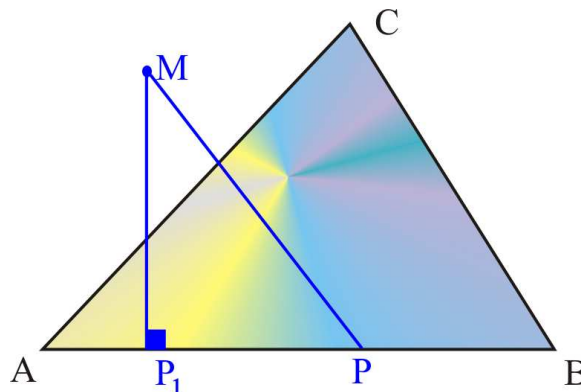
9.1 Projection d'un point sur une droite

Exercice 9.1.1

Soient ABC un triangle, M un point de coordonnées barycentriques $\{x, y, 1 - x - y\}$. Calculer la distance MP^2 lorsque P est un point quelconque de la droite (AB) .

Déterminer les coordonnées barycentriques du projeté orthogonal P_1 de M sur la droite (AB) , calculer alors la distance MP_1^2 .

Reformuler les réponses lorsque les coordonnées barycentriques de M sont $\{X, Y, Z\}$.

**Solution:**

Dessin = $\{A, B, C, M, P\}$

Le repère barycentrique choisi est A, B, C .

Les points composés sont M, P .

On déduit les coordonnées barycentriques des points composés:

$$M = \{x, y, 1 - x - y\}$$

$$P = \{k, 1 - k, 0\}$$

La distance MP^2 est égale à

$$MP^2 = AB^2 (k - x) (-1 + k + y) - AC^2 (k - x) (-1 + x + y) + BC^2 (-1 + k + y) (-1 + x + y)$$

soit

$$MP^2 = a^2 - a^2 x - b^2 x + c^2 x + b^2 x^2 - 2a^2 y + a^2 x y + b^2 x y - c^2 x y + a^2 y^2 \\ + k (-a^2 + b^2 - c^2 + a^2 x - b^2 x - c^2 x + a^2 y - b^2 y + c^2 y) + c^2 k^2$$

La recherche du projeté du point M sur la droite (AB) correspond à un extremum de la quantité MP^2 . La dérivée de MP^2 par rapport à k est

$$\frac{dMP^2}{dk} = (-a^2 + b^2 - c^2 + a^2 x - b^2 x - c^2 x + a^2 y - b^2 y + c^2 y) + 2c^2 k$$

qui s'annule pour

$$k = \frac{a^2 - b^2 + c^2 - a^2 x + b^2 x + c^2 x - a^2 y + b^2 y - c^2 y}{2c^2}$$

Lorsque $M = \{x, y, 1 - x - y\}$, on obtient donc les coordonnées barycentriques de P_1

$$P_1 = \left\{ \frac{a^2 - b^2 + c^2 - a^2 x + b^2 x + c^2 x - a^2 y + b^2 y - c^2 y}{2c^2}, \right. \\ \left. \frac{(-a^2 + b^2 + c^2 + a^2 x - b^2 x - c^2 x + a^2 y - b^2 y + c^2 y)}{2c^2}, 0 \right\}$$

La distance MP_1^2 devient alors

$$MP^2 = \frac{(-a + b + c)(a + b - c)(a - b + c)(a + b + c)(-1 + x + y)^2}{4c^2}$$

Pour $M = \{X, Y, Z\}$, on remplace x par $\frac{X}{X+Y+Z}$, y par $\frac{Y}{X+Y+Z}$ et on obtient les coordonnées barycentriques de P

$$P_1 = \left\{ \frac{2c^2 X + a^2 Z - b^2 Z + c^2 Z}{2c^2 (X + Y + Z)}, \frac{2c^2 Y - a^2 Z + b^2 Z + c^2 Z}{2c^2 (X + Y + Z)}, 0 \right\}$$

La distance MP_1^2 devient alors

$$MP^2 = \frac{(-a + b + c)(a + b - c)(a - b + c)(a + b + c)Z^2}{4c^2 (X + Y + Z)^2}$$

9.2 Formules diverses invoquant des projections

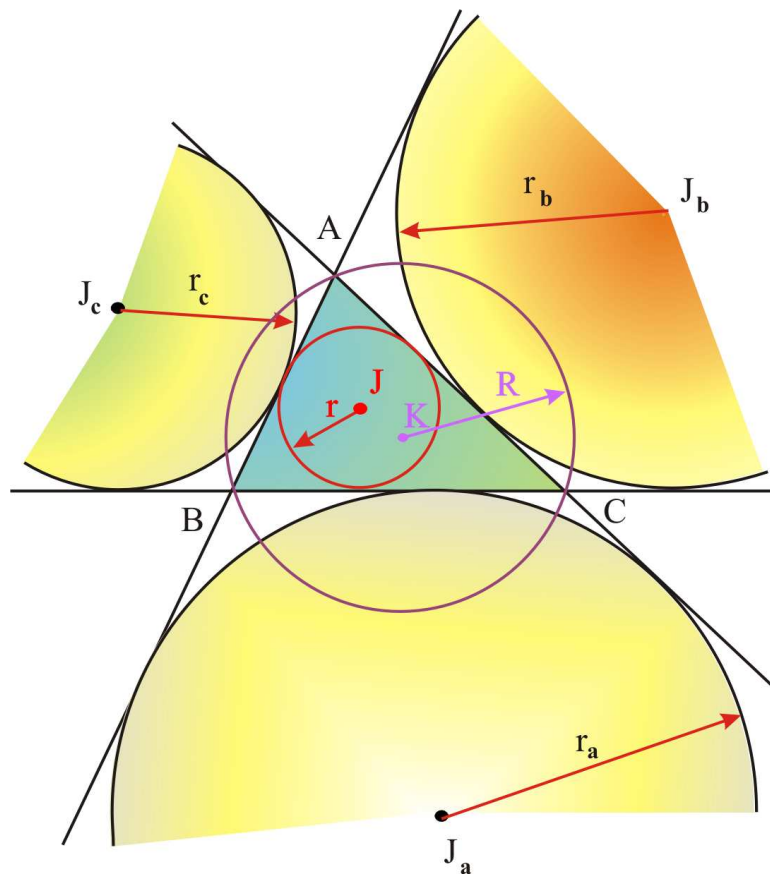
Exercice 9.2.1

Dans un triangle ABC , soient J_a, J_b, J_c le centre du cercle ex-inscrit tangent au côté (BC) (resp. (AC) , (AB)), J le centre du cercle ex-inscrit, r_a, r_b, r_c, r les rayons respectifs de ces cercles et $p = \frac{1}{2}(a + b + c)$. Soit R le rayon du cercle circonscrit au triangle, K son centre. Montrer que

$$r_a r_b + r_b r_c + r_a r_c = p^2$$

$$\frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_b} + \frac{1}{r_c} = \frac{1}{r}$$

$$r_a + r_b + r_c = r + 4R$$

**Solution:**

Les coordonnées barycentriques des points introduits dans l'énoncé sont classiques, leur descriptif n'est pas inséré dans la solution.

La projection du point J sur la droite (BC) est le point P de coordonnées barycentriques

$$P = \left\{0, \frac{a+b-c}{2a}, \frac{a-b+c}{2a}\right\}$$

On a donc

$$r^2 = JP^2 = \frac{(a+b-c)(a-b+c)(-a+b+c)}{4(a+b+c)}$$

La projection du point J_a sur la droite (BC) est le point P_a de coordonnées barycentriques

$$P_a = \left\{0, \frac{a-b+c}{2a}, \frac{a+b-c}{2a}\right\}$$

On a donc

$$r_a^2 = J_a P_a^2 = \frac{(a+b-c)(a-b+c)(a+b+c)}{4(-a+b+c)}$$

La projection du point J_b sur la droite (BC) est le point P_b de coordonnées barycentriques

$$P_b = \left\{0, \frac{a-b-c}{2a}, \frac{a+b+c}{2a}\right\}$$

On a donc

$$r_b^2 = J_b P_b^2 = \frac{(a+b-c)(-a+b+c)(a+b+c)}{4(a-b+c)}$$

La projection du point J_c sur la droite (BC) est le point P_c de coordonnées barycentriques

$$P_c = \left\{0, \frac{a+b+c}{2a}, \frac{a-b-c}{2a}\right\}$$

On a donc

$$r_c^2 = J_c P_c^2 = \frac{(-a+b+c)(a-b+c)(a+b+c)}{4(a+b-c)}$$

La distance $KA^2 = R^2$ est égale à

$$R^2 = \frac{a^2 b^2 c^2}{(-a+b+c)(a+b-c)(a-b+c)(a+b+c)}$$

On a successivement

$$r_a^2 r_b^2 = \frac{(a+b-c)(-a-b+c)(-a+b+c)(a+b+c)^2}{16(a-b-c)}$$

$$r_a r_b = \frac{1}{4}(a+b-c)(a+b+c)$$

Et

$$r_a^2 r_c^2 = \frac{(a-b+c)^2(a+b+c)^2}{16}$$

$$r_a r_c = \frac{1}{4}(a-b+c)(a+b+c)$$

Et

$$r_b^2 r_c^2 = \frac{(a-b-c)(-a-b+c)(-a+b+c)(a+b+c)^2}{16(a+b-c)}$$

$$r_b r_c = \frac{1}{4}(-a+b+c)(a+b+c)$$

Ainsi

$$r_a^2 r_b^2 r_c^2 = \frac{(a-b-c)^2(a+b-c)^2(a-b+c)^2(a+b+c)^2}{256}$$

donc

$$r_a r_b r_c = \frac{1}{16}(a+b-c)(a-b+c)(-a+b+c)(a+b+c)$$

Le calcul fournit alors

$$r_a r_b + r_b r_c + r_a r_c = \frac{1}{4}(a+b+c)^2 = p^2$$

$$r_a r_b + r_b r_c + r_a r_c - \frac{r_a r_b r_c}{r^2} = 0$$

identique à la seconde formule.

On obtient également, en développant

$$(r_a + r_b + r_c)^2 = \frac{(a+b+c)(a^2 - 2ab + b^2 - 2ac - 2bc + c^2)^2}{4(-a+b+c)(a+b-c)(a-b+c)}$$

et le calcul à l'ordinateur donne

$$(r_a + r_b + r_c)^2 - (r^2 + 16 R^2) = \frac{4abc}{a+b+c}$$

Puisque

$$r^2 R^2 = \frac{a^2 b^2 c^2}{4(a+b+c)^2}$$

soit

$$r R = \frac{4abc}{a+b+c}$$

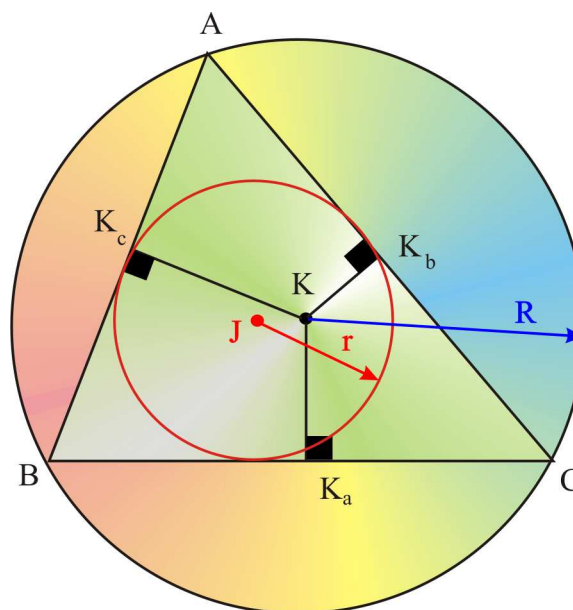
il résulte la troisième formule.

Exercice 9.2.2

Soit ABC un triangle et K le centre du cercle circonscrit, R le rayon de ce cercle. On désigne par K_a (resp. K_b , K_c) la projection orthogonale de K sur le côté BC (resp. AC , AB), par J le centre du cercle inscrit, r le rayon de ce cercle.

Montrer que $2 R r (a + b + c) = abc$ et que

$$KK_a + KK_b + KK_c = R + r$$



Solution:

Soit J_1 la projection orthogonale de J sur le côté BC , donc $r^2 = JJ_1^2$. La projection J_1 du point J de coordonnées $\{a, b, c\}$ sur la droite (BC) est le point de coordonnées barycentriques

$$\left\{0, \frac{a+b-c}{2a}, \frac{a-b+c}{2a}\right\}$$

Les points K_a, K_b, K_c sont les milieux respectifs des segments BC, AC, AB et $R^2 = AK^2$.

Dessin = $\{A, B, C, J, J_1, K, K_a, K_b, K_c\}$

Le repère barycentrique choisi est A, B, C .

Les points composés sont K_a, K_b, K_c, J_1, J, K .

Les coordonnées barycentriques des points composés sont:

$$K = \left\{ \frac{a^2 (a^2 - b^2 - c^2)}{(a - b - c) (a + b - c) (a - b + c) (a + b + c)}, \right. \\ \frac{b^2 (-a^2 + b^2 - c^2)}{(-a + b - c) (a + b - c) (-a + b + c) (a + b + c)}, \\ \left. \frac{c^2 (a^2 + b^2 - c^2)}{(-a + b + c) (a + b - c) (a - b + c) (a + b + c)} \right\} \\ K_a = \left\{ 0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\} \\ K_b = \left\{ \frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2} \right\} \\ K_c = \left\{ \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0 \right\} \\ J = \left\{ \frac{a}{a + b + c}, \frac{b}{a + b + c}, \frac{c}{a + b + c} \right\} \\ J_1 = \left\{ 0, \frac{a + b - c}{2a}, \frac{a - b + c}{2a} \right\}$$

La distance JJ_1^2 est égale à

$$JJ_1^2 = \frac{AB^2 (a^2 + b^2 - c^2)}{2 (a + b + c)^2} + \frac{AC^2 (a^2 - b^2 + c^2)}{2 (a + b + c)^2} - \frac{BC^2 (a^2 + b^2 - c^2) (a^2 - b^2 + c^2)}{4 a^2 (a + b + c)^2}$$

soit

$$JJ_1^2 = \frac{(a + b - c) (a - b + c) (-a + b + c)}{4 (a + b + c)}$$

La distance KK_a^2 est égale à

$$KK_a^2 = \frac{a^2 AB^2 (a^2 - b^2 - c^2)^2 (a^2 + b^2 - c^2)}{2 (a - b - c)^2 (a + b - c)^2 (a - b + c)^2 (a + b + c)^2} \\ + \frac{a^2 AC^2 (a^2 - b^2 - c^2)^2 (a^2 - b^2 + c^2)}{2 (a - b - c)^2 (a + b - c)^2 (a - b + c)^2 (a + b + c)^2} \\ - \frac{BC^2 (a^2 - b^2 - c^2)^2 (a^2 + b^2 - c^2) (a^2 - b^2 + c^2)}{4 (a - b - c)^2 (a + b - c)^2 (a - b + c)^2 (a + b + c)^2}$$

soit

$$KK_a^2 = \frac{a^2 (a^2 - b^2 - c^2)^2}{4 (-a + b + c) (a + b - c) (a - b + c) (a + b + c)}$$

La distance KK_b^2 est égale à

$$KK_b^2 = \frac{AB^2 b^2 (-a^2 + b^2 - c^2)^2 (a^2 + b^2 - c^2)}{2(-a + b - c)^2 (a + b - c)^2 (-a + b + c)^2 (a + b + c)^2} \\ + \frac{AC^2 (a^2 - b^2 - c^2)^2 (a^2 + b^2 - c^2) (a^2 - b^2 + c^2)^2}{4(a - b - c)^2 (a + b - c)^2 (a - b + c)^2 (a + b + c)^2} \\ + \frac{b^2 BC^2 (-a^2 + b^2 - c^2)^2 (-a^2 + b^2 + c^2)}{2(-a + b - c)^2 (a + b - c)^2 (-a + b + c)^2 (a + b + c)^2}$$

soit

$$KK_b^2 = \frac{b^2 (-a^2 + b^2 - c^2)^2}{4(a - b + c)(a + b - c)(-a + b + c)(a + b + c)}$$

La distance KK_c^2 est égale à

$$KK_c^2 = \frac{BC^2 c^2 (a^2 - b^2 - c^2)^2 (a^2 + b^2 - c^2)^2}{2(-a + b + c)^2 (a + b - c)^2 (a - b + c)^2 (a + b + c)^2} \\ + \frac{AC^2 c^2 (a^2 + b^2 - c^2)^2 (a^2 - b^2 + c^2)}{2(a - b - c)^2 (a + b - c)^2 (a - b + c)^2 (a + b + c)^2} \\ + \frac{AB^2 (a^2 - b^2 - c^2)^2 (a^2 + b^2 - c^2)^2 (a^2 - b^2 + c^2)}{4(a - b - c)^2 (a + b - c)^2 (a - b + c)^2 (a + b + c)^2}$$

soit

$$KK_c^2 = \frac{c^2 (a^2 + b^2 - c^2)^2}{4(-a + b + c)(a + b - c)(a - b + c)(a + b + c)}$$

Le produit $4R^2 r^2 (a + b + c)^2 = 4AK^2 J J_1^2 (a + b + c)^2$ a pour valeur

$$4 \frac{a^2 b^2 c^2}{(a - b - c)(a + b - c)(a - b + c)(a + b + c)} \frac{(-a - b + c)(a - b + c)(-a + b + c)}{4(a + b + c)} (a + b + c)^2 = a^2 b^2 c^2$$

En posant

$$K = \frac{1}{2\sqrt{(a - b + c)(a + b - c)(-a + b + c)(a + b + c)}}$$

on a:

$$KK_a = Ka (-a^2 + b^2 + c^2) \\ KK_b = Kb (a^2 - b^2 + c^2) \\ KK_c = Kc (a^2 + b^2 - c^2)$$

donc

$$KK_a + KK_b + KK_c = K(-a^3 + a^2 b + a b^2 - b^3 + a^2 c + b^2 c + a c^2 + b c^2 - c^3)$$

Puisque $R = K 2abc$, on obtient

$$r = K(a + b - c)(a - b + c)(-a + b + c) = K(-a^3 + a^2 b + a b^2 - b^3 + a^2 c - 2abc + b^2 c + a c^2 + b c^2 - c^3)$$

donc

$$R + r = K(-a^3 + a^2 b + a b^2 - b^3 + a^2 c + b^2 c + a c^2 + b c^2 - c^3)$$

9.3 Théorème de Steiner

Exercice 9.3.1 *relation entre les rayons des cercles*

Soit ABC un triangle et

R = le rayon du cercle circonscrit au triangle ABC

r = le rayon du cercle inscrit au triangle ABC

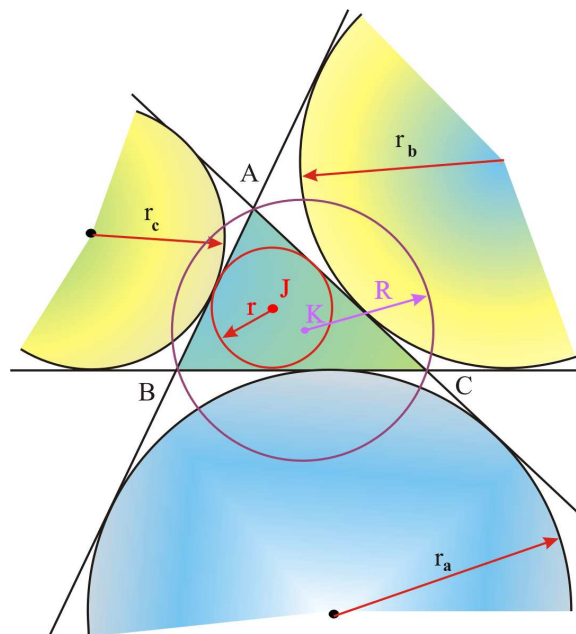
r_a = le rayon du cercle ex-inscrit tangent extérieurement à BC

r_b = le rayon du cercle ex-inscrit tangent extérieurement à AC

r_c = le rayon du cercle ex-inscrit tangent extérieurement à AB

Montrer que

$$r_a + r_b + r_c - r = 4R$$

**Solution:**

Soit K le centre du cercle circonscrit, J le centre du cercle inscrit au triangle ABC , J_a le centre du cercle ex-inscrit tangent extérieurement à BC , J_b le centre du cercle ex-inscrit tangent extérieurement à AC , J_c le centre du cercle ex-inscrit tangent extérieurement à AB .

Dessin = $\{A, B, C, J, J_a, J_b, J_c, K\}$

Le repère barycentrique choisi est A, B, C .

Les points composés sont J, J_a, J_b, J_c, K .

Les coordonnées barycentriques des points composés sont:

$$J = \left\{ \frac{a}{a+b+c}, \frac{b}{a+b+c}, \frac{c}{a+b+c} \right\}$$

$$\begin{aligned}
J_a &= \left\{ \frac{a}{a-b-c}, \frac{b}{-a+b+c}, -\frac{c}{a-b-c} \right\} \\
J_b &= \left\{ \frac{a}{a-b+c}, \frac{b}{-a+b-c}, \frac{c}{a-b+c} \right\} \\
J_c &= \left\{ \frac{a}{a+b-c}, \frac{b}{a+b-c}, -\frac{c}{a+b-c} \right\} \\
K &= \left\{ \frac{a^2 (a^2 - b^2 - c^2)}{(a-b-c)(a+b-c)(a-b+c)(a+b+c)}, \right. \\
&\quad \frac{b^2 (-a^2 + b^2 - c^2)}{(-a+b-c)(a+b-c)(-a+b+c)(a+b+c)}, \\
&\quad \left. \frac{c^2 (a^2 + b^2 - c^2)}{(-a+b+c)(a+b-c)(a-b+c)(a+b+c)} \right\}
\end{aligned}$$

Dessin = Dessin $\cup \{P, P_a, P_b, P_c\} = \{A, B, C, J, J_a, J_b, J_c, K, P, P_a, P_b, P_c\}$

Les points composés sont P, P_a, P_b, P_c .

La projection du point J de coordonnées $\{a, b, c\}$ sur la droite (BC) est le point P de coordonnées barycentriques

$$P = \left\{ 0, \frac{a+b-c}{2a}, \frac{a-b+c}{2a} \right\}$$

La projection du point J_a de coordonnées $\{-a, b, c\}$ sur la droite (BC) est le point P_a de coordonnées barycentriques

$$P_a = \left\{ 0, \frac{a-b+c}{2a}, \frac{a+b-c}{2a} \right\}$$

La projection du point J_b de coordonnées $\{a, -b, c\}$ sur la droite (AC) est le point P_b de coordonnées barycentriques

$$P_b = \left\{ \frac{-a+b+c}{2b}, 0, \frac{a+b-c}{2b} \right\}$$

La projection du point J_c de coordonnées $\{a, b, -c\}$ sur la droite (AB) est le point P_c de coordonnées barycentriques

$$P_c = \left\{ \frac{-a+b+c}{2c}, \frac{a-b+c}{2c}, 0 \right\}$$

La distance r^2 est égale à

$$r^2 = JP^2 = \frac{(a+b-c)(a-b+c)(-a+b+c)}{4(a+b+c)}$$

La distance r_a^2 est égale à

$$r_a^2 = J_a P_a^2 = \frac{(a+b-c)(a-b+c)(a+b+c)}{4(-a+b+c)}$$

La distance r_b^2 est égale à

$$r_b^2 = J_b P_b^2 = \frac{(-a+b+c)(a+b-c)(a+b+c)}{4(a-b+c)}$$

La distance r_c^2 est égale à

$$r_c^2 = J_c P_c^2 = \frac{(-a+b+c)(a-b+c)(a+b+c)}{4(a+b-c)}$$

La distance R^2 est égale à

$$R^2 = K A^2 = \frac{a^2 b^2 c^2}{(-a+b+c)(a+b-c)(a-b+c)(a+b+c)}$$

On a donc, en posant

$$\lambda = \sqrt{(-a+b+c)(a+b-c)(a-b+c)(a+b+c)}$$

les relations

$$\begin{aligned} r &= \frac{\lambda}{2(a+b+c)} \\ r_a &= \frac{\lambda}{2(-a+b+c)} \\ r_b &= \frac{\lambda}{2(a-b+c)} \\ r_c &= \frac{\lambda}{2(a+b-c)} \\ R &= \frac{abc}{\lambda} \end{aligned}$$

donc

$$r_a + r_b + r_c - r = \frac{4abc\lambda}{(-a+b+c)(a+b-c)(a-b+c)(a+b+c)} = 4R$$

9.4 Droites concourantes passant par des points classiques

Exercice 9.4.1

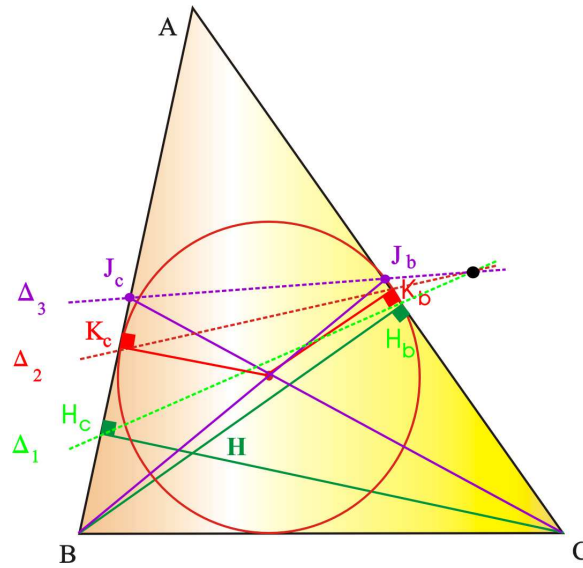
Soit un triangle ABC

Δ_1 la droite joignant les pieds H_b et H_c des hauteurs issues de B et C

Δ_2 la droite joignant les points de contact K_c et K_b du cercle inscrit avec (AB) et (AC)

Δ_3 la droite joignant les pieds J_b et J_c des bissectrices intérieures issues de B et C

Montrer que les droites Δ_1 , Δ_2 , Δ_3 sont concourantes ou parallèles.

**Solution:**

Soit J le centre du cercle inscrit.

Dessin = $\{A, B, C, H_b, H_c, J, J_b, J_c\}$

Le repère barycentrique choisi est A, B, C .

Les points composés sont H_b, H_c, J_b, J_c, J .

Les coordonnées barycentriques des points composés sont:

$$H_b = \left\{ \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2b^2}, 0, \frac{-a^2 + b^2 + c^2}{2b^2} \right\}$$

$$H_c = \left\{ \frac{a^2 - b^2 + c^2}{2c^2}, \frac{-a^2 + b^2 + c^2}{2c^2}, 0 \right\}$$

$$J_b = \left\{ \frac{a}{a+c}, 0, \frac{c}{a+c} \right\}$$

$$J_c = \left\{ \frac{a}{a+b}, \frac{b}{a+b}, 0 \right\}$$

$$J = \left\{ \frac{a}{a+b+c}, \frac{b}{a+b+c}, \frac{c}{a+b+c} \right\}$$

Dessin = $\text{Dessin} \cup \{K_b, K_c\} = \{A, B, C, H_b, H_c, J, J_b, J_c, K_b, K_c\}$

Le repère barycentrique choisi est A, B, C .

Les points composés sont K_b, K_c .

La projection du point J sur la droite (AB) est le point K_c de coordonnées barycentriques

$$K_c = \left\{ \frac{a-b+c}{2c}, \frac{-a+b+c}{2c}, 0 \right\}$$

La projection du point J sur la droite (AC) est le point K_b de coordonnées barycentriques

$$K_b = \left\{ \frac{a+b-c}{2b}, 0, \frac{-a+b+c}{2b} \right\}$$

Dessin = Dessin $\cup \{I_1\} = \{A, B, C, H_b, H_c, I_1, J, J_b, J_c, K_b, K_c\}$

Détermination du point I_1 :

Soit I_1 le point $(H_b H_c) \cap (K_b K_c) = \Delta_1 \cap \Delta_2$. Le point I_1 est composé.

Comme $I_1 \in (H_b H_c)$, on a, en choisissant les inconnues ν_1

$$\overrightarrow{OI_1} = \nu_1 \overrightarrow{OH_b} + (1 - \nu_1) \overrightarrow{OH_c}$$

On déduit:

$$\overrightarrow{OI_1} = a(1) \overrightarrow{OA} + a(2) \overrightarrow{OB} + a(3) \overrightarrow{OC}$$

avec

$$\begin{aligned} a(1) &= \frac{a^2 b^2 - b^4 + b^2 c^2 - a^2 b^2 \nu_1 + b^4 \nu_1 + a^2 c^2 \nu_1 - c^4 \nu_1}{2 b^2 c^2} \\ a(2) &= \frac{(-a^2 + b^2 + c^2) (1 - \nu_1)}{2 c^2} \\ a(3) &= \frac{(-a^2 + b^2 + c^2) \nu_1}{2 b^2} \end{aligned}$$

Comme $I_1 \in (K_b K_c)$, on a, en choisissant les inconnues μ_1

$$\overrightarrow{OI_1} = \mu_1 \overrightarrow{OK_b} + (1 - \mu_1) \overrightarrow{OK_c}$$

On déduit:

$$\overrightarrow{OI_1} = b(1) \overrightarrow{OA} + b(2) \overrightarrow{OB} + b(3) \overrightarrow{OC}$$

avec

$$\begin{aligned} b(1) &= \frac{a b - b^2 + b c - a b \mu_1 + b^2 \mu_1 + a c \mu_1 - c^2 \mu_1}{2 b c} \\ b(2) &= \frac{(-a + b + c) (1 - \mu_1)}{2 c} \\ b(3) &= \frac{(-a + b + c) \mu_1}{2 b} \end{aligned}$$

La résolution du système linéaire d'inconnues ν_1, μ_1 donne

$$\nu_1 = \frac{(a - b) b (a + b - c)}{(b - c) (a^2 - b^2 - c^2)} \quad \mu_1 = \frac{(a - b) (a + b - c)}{(a - b - c) (b - c)}$$

On déduit que:

$$I_1 = \left\{ \frac{a (-a + b + c)}{2 b c}, \frac{(a - c) (a - b + c)}{2 c (b - c)}, \frac{(-a + b) (a + b - c)}{2 b (b - c)} \right\}$$

Dessin = Dessin $\cup \{I_2\} = \{A, B, C, H_b, H_c, I_1, I_2, J, J_b, J_c, K_b, K_c\}$

Détermination du point I_2 :

Soit I_2 le point $(J_b J_c) \cap (K_b K_c) = \Delta_3 \cap \Delta_2$. Le point I_2 est composé.

Comme $I_2 \in (J_b J_c)$, on a, en choisissant les inconnues ν_1

$$\overrightarrow{OI_2} = \nu_1 \overrightarrow{OJ_b} + (1 - \nu_1) \overrightarrow{OJ_c}$$

On déduit:

$$\overrightarrow{OI_2} = c(1) \overrightarrow{OA} + c(2) \overrightarrow{OB} + c(3) \overrightarrow{OC}$$

avec

$$\begin{aligned} c(1) &= \frac{a(a+c+b\nu_1-c\nu_1)}{(a+b)(a+c)} \\ c(2) &= \frac{b(1-\nu_1)}{a+b} \\ c(3) &= \frac{c\nu_1}{a+c} \end{aligned}$$

Comme $I_2 \in (K_b K_c)$, on a, en choisissant les inconnues μ_1

$$\overrightarrow{OI_2} = \mu_1 \overrightarrow{OK_b} + (1-\mu_1) \overrightarrow{OK_c}$$

On déduit:

$$\overrightarrow{OI_2} = d(1) \overrightarrow{OA} + d(2) \overrightarrow{OB} + d(3) \overrightarrow{OC}$$

avec

$$\begin{aligned} d(1) &= \frac{ab-b^2+bc-ab\mu_1+b^2\mu_1+ac\mu_1-c^2\mu_1}{2bc} \\ d(2) &= \frac{(-a+b+c)(1-\mu_1)}{2c} \\ d(3) &= \frac{(-a+b+c)\mu_1}{2b} \end{aligned}$$

La résolution du système linéaire d'inconnues ν_1, μ_1 donne

$$\nu_1 = \frac{(-a+b)(a+b-c)(a+c)}{2b(b-c)c} \quad \mu_1 = \frac{(a-b)(a+b-c)}{(a-b-c)(b-c)}$$

On déduit que:

$$I_2 = \left\{ \frac{a(-a+b+c)}{2bc}, \frac{(a-c)(a-b+c)}{2c(b-c)}, \frac{(-a+b)(a+b-c)}{2b(b-c)} \right\}$$

On a effectivement $I_1 = I_2$, le parallélisme ayant lieu lorsque $b = c$.

9.5 Triangle podaire d'un point relativement à un triangle

Soit ABC un triangle et M un point du plan. Les projections orthogonales du point M sur chaque côté du triangle déterminent trois points: le triangle formé par ces trois points est appelé le triangle podaire de M (relativement au triangle ABC).

Exercice 9.5.1

Soit ABC un triangle et B_0 et B_1 les points de coordonnées barycentriques

$$B_0 = \left\{ \frac{a^2 b^2}{a^2 b^2 + a^2 c^2 + b^2 c^2}, \frac{b^2 c^2}{a^2 b^2 + a^2 c^2 + b^2 c^2}, \frac{a^2 c^2}{a^2 b^2 + a^2 c^2 + b^2 c^2} \right\}$$

$$B_1 = \left\{ \frac{a^2 c^2}{a^2 b^2 + a^2 c^2 + b^2 c^2}, \frac{a^2 b^2}{a^2 b^2 + a^2 c^2 + b^2 c^2}, \frac{b^2 c^2}{a^2 b^2 + a^2 c^2 + b^2 c^2} \right\}$$

(appelés points de Brocard). Montrer que les triangles podaires des points B_0 et B_1 relativement au triangle ABC sont semblables au triangle ABC .

Solution:

Soient H_a, H_b, H_c (resp. K_a, K_b, K_c) les projetés orthogonaux respectifs de B_0 (resp. B_1) sur les côtés $(BC), (AC), (AB)$ du triangle. Le triangle $H_a H_b H_c$ (resp. $K_a K_b K_c$) est le triangle podaire de B_0 (resp. B_1) relativement au triangle ABC .

Dessin = $\{A, B, C, B_0, B_1, H_a, H_b, H_c, K_a, K_b, K_c\}$

Le repère barycentrique choisi est A, B, C .

Les points composés sont B_0, B_1 .

Les coordonnées barycentriques des points composés sont:

La projection du point B_0 sur la droite (BC) est le point H_a de coordonnées barycentriques

$$\left\{ 0, \frac{b^2 (a^2 + b^2 + c^2)}{2 (a^2 b^2 + a^2 c^2 + b^2 c^2)}, \frac{a^2 b^2 - b^4 + 2 a^2 c^2 + b^2 c^2}{2 (a^2 b^2 + a^2 c^2 + b^2 c^2)} \right\}$$

La projection du point B_0 sur la droite (AC) est le point H_b de coordonnées barycentriques

$$\left\{ \frac{2 a^2 b^2 + a^2 c^2 + b^2 c^2 - c^4}{2 (a^2 b^2 + a^2 c^2 + b^2 c^2)}, 0, \frac{c^2 (a^2 + b^2 + c^2)}{2 (a^2 b^2 + a^2 c^2 + b^2 c^2)} \right\}$$

La projection du point B_0 sur la droite (AB) est le point H_c de coordonnées barycentriques

$$\left\{ \frac{a^2 (a^2 + b^2 + c^2)}{2 (a^2 b^2 + a^2 c^2 + b^2 c^2)}, \frac{-a^4 + a^2 b^2 + a^2 c^2 + 2 b^2 c^2}{2 (a^2 b^2 + a^2 c^2 + b^2 c^2)}, 0 \right\}$$

La projection du point B_1 sur la droite (BC) est le point K_a de coordonnées barycentriques

$$\left\{ 0, \frac{2 a^2 b^2 + a^2 c^2 + b^2 c^2 - c^4}{2 (a^2 b^2 + a^2 c^2 + b^2 c^2)}, \frac{c^2 (a^2 + b^2 + c^2)}{2 (a^2 b^2 + a^2 c^2 + b^2 c^2)} \right\}$$

La projection du point B_1 sur la droite (AC) est le point K_b de coordonnées barycentriques

$$\left\{ \frac{a^2 (a^2 + b^2 + c^2)}{2 (a^2 b^2 + a^2 c^2 + b^2 c^2)}, 0, \frac{-a^4 + a^2 b^2 + a^2 c^2 + 2 b^2 c^2}{2 (a^2 b^2 + a^2 c^2 + b^2 c^2)} \right\}$$

La projection du point B_1 sur la droite (AB) est le point K_c de coordonnées barycentriques

$$\left\{ \frac{a^2 b^2 - b^4 + 2 a^2 c^2 + b^2 c^2}{2 (a^2 b^2 + a^2 c^2 + b^2 c^2)}, \frac{b^2 (a^2 + b^2 + c^2)}{2 (a^2 b^2 + a^2 c^2 + b^2 c^2)}, 0 \right\}$$

Soit $K > 0$ la constante définie par

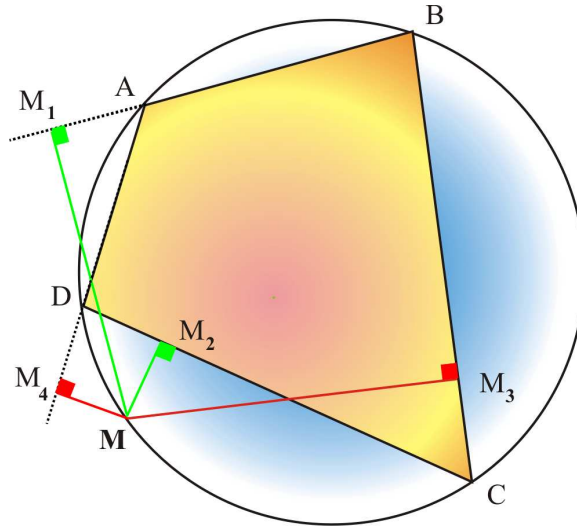
$$K^2 = \frac{(-a + b + c)(a + b - c)(a - b + c)(a + b + c)}{4(a^2 b^2 + a^2 c^2 + b^2 c^2)}$$

On a directement $H_a H_b^2 = K^2 b^2$, $K_a K_b^2 = K^2 a^2$, $H_b H_c^2 = K^2 c^2$, $K_b K_c^2 = K^2 b^2$, $H_a H_c^2 = K^2 a^2$, $K_a K_c^2 = K^2 c^2$. Les côtés de chaque triangle ont des longueurs proportionnelles aux réels a, b, c , donc les trois triangles mentionnés sont semblables.

9.6 Formule de Pappus

Exercice 9.6.1

Soit $ABCD$ un quadrilatère inscrit dans un cercle et M un point de ce cercle. Montrer que le produit des distances du point M à deux côtés non-consécutifs du quadrilatère est égal au produit des distances du point M aux deux autres côtés non-consécutifs de ce quadrilatère.



Solution:

Dessin = $\{A, B, C, D, M\}$

Le repère barycentrique choisi est A, B, C .

Les points composés sont D, M .

Avec des notations naturelles, on a

$$D = \left\{ x, y, -\frac{c^2 x y}{b^2 x + a^2 y} \right\}$$

$$M = \left\{ x_1, y_1, -\frac{c^2 x_1 y_1}{b^2 x_1 + a^2 y_1} \right\}$$

On déduit les coordonnées barycentriques des points composés:

$$D = \left\{ \frac{x(b^2 x + a^2 y)}{b^2 x^2 + a^2 x y + b^2 x y - c^2 x y + a^2 y^2}, \frac{y(b^2 x + a^2 y)}{b^2 x^2 + a^2 x y + b^2 x y - c^2 x y + a^2 y^2}, \frac{-c^2 x y}{b^2 x^2 + a^2 x y + b^2 x y - c^2 x y + a^2 y^2} \right\}$$

$$M = \left\{ \frac{x_1 (b^2 x_1 + a^2 y_1)}{b^2 x_1^2 + a^2 x_1 y_1 + b^2 x_1 y_1 - c^2 x_1 y_1 + a^2 y_1^2}, \frac{y_1 (b^2 x_1 + a^2 y_1)}{b^2 x_1^2 + a^2 x_1 y_1 + b^2 x_1 y_1 - c^2 x_1 y_1 + a^2 y_1^2}, \frac{-c^2 x_1 y_1}{b^2 x_1^2 + a^2 x_1 y_1 + b^2 x_1 y_1 - c^2 x_1 y_1 + a^2 y_1^2} \right\}$$

La projection du point de coordonnées M sur la droite (AB) est le point de coordonnées barycentriques

$$M_1 = \left\{ \frac{x_1 (2b^2 x_1 + a^2 y_1 + b^2 y_1 - c^2 y_1)}{2 (b^2 x_1^2 + a^2 x_1 y_1 + b^2 x_1 y_1 - c^2 x_1 y_1 + a^2 y_1^2)}, \frac{y_1 (a^2 x_1 + b^2 x_1 - c^2 x_1 + 2a^2 y_1)}{2 (b^2 x_1^2 + a^2 x_1 y_1 + b^2 x_1 y_1 - c^2 x_1 y_1 + a^2 y_1^2)}, 0 \right\}$$

La projection du point de coordonnées M sur la droite (CD) est le point de coordonnées barycentriques

$$M_2 = \left\{ \frac{x (b^2 x_1 + a^2 y_1) (2b^2 x x_1 + a^2 x_1 y + b^2 x_1 y - c^2 x_1 y + a^2 x y_1 + b^2 x y_1 - c^2 x y_1 + 2a^2 y y_1)}{2 (b^2 x^2 + a^2 x y + b^2 x y - c^2 x y + a^2 y^2) (b^2 x_1^2 + a^2 x_1 y_1 + b^2 x_1 y_1 - c^2 x_1 y_1 + a^2 y_1^2)}, \frac{y (b^2 x_1 + a^2 y_1) (2b^2 x x_1 + a^2 x_1 y + b^2 x_1 y - c^2 x_1 y + a^2 x y_1 + b^2 x y_1 - c^2 x y_1 + 2a^2 y y_1)}{2 (b^2 x^2 + a^2 x y + b^2 x y - c^2 x y + a^2 y^2) (b^2 x_1^2 + a^2 x_1 y_1 + b^2 x_1 y_1 - c^2 x_1 y_1 + a^2 y_1^2)}, \frac{Num_z(M_2)}{2 (b^2 x^2 + a^2 x y + b^2 x y - c^2 x y + a^2 y^2) (b^2 x_1^2 + a^2 x_1 y_1 + b^2 x_1 y_1 - c^2 x_1 y_1 + a^2 y_1^2)} \right\}$$

avec

$$\begin{aligned} Num_z(M_2) = & a^2 b^2 x x_1^2 y - b^4 x x_1^2 y - b^2 c^2 x x_1^2 y + a^2 b^2 x_1^2 y^2 - b^4 x_1^2 y^2 + b^2 c^2 x_1^2 y^2 \\ & - a^2 b^2 x^2 x_1 y_1 + b^4 x^2 x_1 y_1 - b^2 c^2 x^2 x_1 y_1 + a^4 x x_1 y y_1 - 2a^2 b^2 x x_1 y y_1 + b^4 x x_1 y y_1 \\ & - 3a^2 c^2 x x_1 y y_1 - 3b^2 c^2 x x_1 y y_1 + 2c^4 x x_1 y y_1 + a^4 x_1 y^2 y_1 - a^2 b^2 x_1 y^2 y_1 - a^2 c^2 x_1 y^2 y_1 \\ & - a^4 x^2 y_1^2 + a^2 b^2 x^2 y_1^2 + a^2 c^2 x^2 y_1^2 - a^4 x y y_1^2 + a^2 b^2 x y y_1^2 - a^2 c^2 x y y_1^2 \end{aligned}$$

La projection du point de coordonnées M sur la droite (BC) est le point de coordonnées barycentriques

$$M_3 = \left\{ 0, \frac{(b^2 x_1 + a^2 y_1) (a^2 x_1 + b^2 x_1 - c^2 x_1 + 2a^2 y_1)}{2a^2 (b^2 x_1^2 + a^2 x_1 y_1 + b^2 x_1 y_1 - c^2 x_1 y_1 + a^2 y_1^2)}, \frac{x_1 (a^2 b^2 x_1 - b^4 x_1 + b^2 c^2 x_1 + a^4 y_1 - a^2 b^2 y_1 - a^2 c^2 y_1)}{2a^2 (b^2 x_1^2 + a^2 x_1 y_1 + b^2 x_1 y_1 - c^2 x_1 y_1 + a^2 y_1^2)} \right\}$$

La projection du point de coordonnées M sur la droite (AD) est le point de coordonnées barycentriques

$$M_4 = \left\{ \frac{Num_x(M_4)}{2 (b^2 x^2 + a^2 x y + b^2 x y - c^2 x y + a^2 y^2) (b^2 x_1^2 + a^2 x_1 y_1 + b^2 x_1 y_1 - c^2 x_1 y_1 + a^2 y_1^2)}, \frac{(b^2 x + a^2 y) y_1 (2b^2 x x_1 + a^2 x_1 y + b^2 x_1 y - c^2 x_1 y + a^2 x y_1 + b^2 x y_1 - c^2 x y_1 + 2a^2 y y_1)}{2 (b^2 x^2 + a^2 x y + b^2 x y - c^2 x y + a^2 y^2) (b^2 x_1^2 + a^2 x_1 y_1 + b^2 x_1 y_1 - c^2 x_1 y_1 + a^2 y_1^2)}, \frac{-(c^2 x y_1 (2b^2 x x_1 + a^2 x_1 y + b^2 x_1 y - c^2 x_1 y + a^2 x y_1 + b^2 x y_1 - c^2 x y_1 + 2a^2 y y_1))}{2 (b^2 x^2 + a^2 x y + b^2 x y - c^2 x y + a^2 y^2) (b^2 x_1^2 + a^2 x_1 y_1 + b^2 x_1 y_1 - c^2 x_1 y_1 + a^2 y_1^2)} \right\}$$

avec

$$\begin{aligned} Num_x(M_4) = & 2b^4 x^2 x_1^2 + 2a^2 b^2 x x_1^2 y + 2b^4 x x_1^2 y - 2b^2 c^2 x x_1^2 y + 2a^2 b^2 x_1^2 y^2 + 2a^2 b^2 x^2 x_1 y_1 \\ & + 2a^4 x x_1 y y_1 + a^2 b^2 x x_1 y y_1 + b^4 x x_1 y y_1 - 3a^2 c^2 x x_1 y y_1 - 2b^2 c^2 x x_1 y y_1 + c^4 x x_1 y y_1 \\ & + a^4 x_1 y^2 y_1 + a^2 b^2 x_1 y^2 y_1 - a^2 c^2 x_1 y^2 y_1 + a^2 b^2 x^2 y_1^2 - b^4 x^2 y_1^2 + a^2 c^2 x^2 y_1^2 + 2b^2 c^2 x^2 y_1^2 \\ & - c^4 x^2 y_1^2 + a^4 x y y_1^2 - a^2 b^2 x y y_1^2 + a^2 c^2 x y y_1^2 \end{aligned}$$

La distance MM_1^2 a pour valeur

$$MM_1^2 = \frac{(a-b+c)(a+b-c)c^2(-a+b+c)(a+b+c)x_1^2y_1^2}{4(b^2x_1^2+a^2x_1y_1+b^2x_1y_1-c^2x_1y_1+a^2y_1^2)^2}$$

La distance MM_2^2 a pour valeur

$$MM_2^2 = \frac{(-a-b+c)(a-b+c)(-a+b+c)(a+b+c)(b^2x_1+a^2y_1)^2(-x_1y+xy_1)^2}{4(b^2x^2+a^2xy+b^2xy-c^2xy+a^2y^2)(b^2x_1^2+a^2x_1y_1+b^2x_1y_1-c^2x_1y_1+a^2y_1^2)^2}$$

La distance MM_3^2 a pour valeur

$$MM_3^2 = \frac{(-a+b+c)(a+b-c)(a-b+c)(a+b+c)x_1^2(b^2x_1+a^2y_1)^2}{4a^2(b^2x_1^2+a^2x_1y_1+b^2x_1y_1-c^2x_1y_1+a^2y_1^2)^2}$$

La distance MM_4^2 a pour valeur

$$MM_4^2 = \frac{a^2(-a+b+c)(a+b-c)c^2(a-b+c)(a+b+c)y_1^2(-x_1y+xy_1)^2}{4(b^2x^2+a^2xy+b^2xy-c^2xy+a^2y^2)(b^2x_1^2+a^2x_1y_1+b^2x_1y_1-c^2x_1y_1+a^2y_1^2)^2}$$

Ces quatre expressions sont divisibles par

$$\frac{(a-b-c)(a+b-c)(a-b+c)(a+b+c)}{4a^2(b^2x^2+a^2xy+b^2xy-c^2xy+a^2y^2)(b^2x_1^2+a^2x_1y_1+b^2x_1y_1-c^2x_1y_1+a^2y_1^2)^2}$$

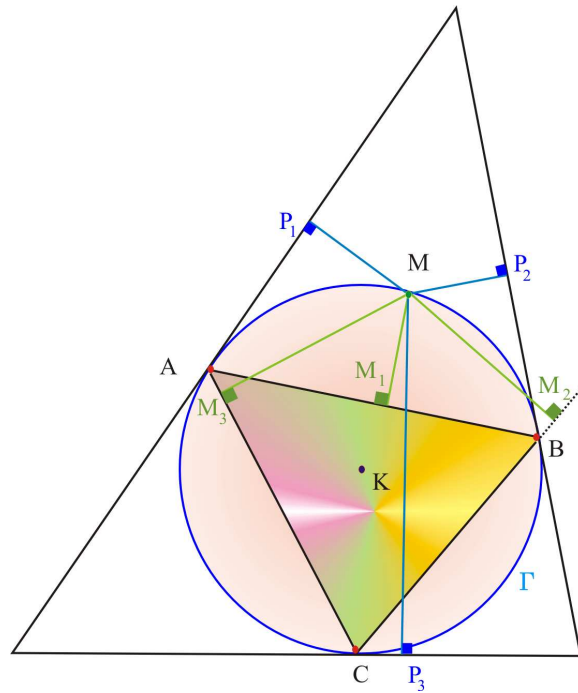
L'évaluation de l'expression $MM_1^2 MM_2^2 - MM_3^2 MM_4^2$ se ramène, à un facteur multiplicatif près, à l'évaluation de

$$\begin{aligned} & (a^2c^2x_1^2(b^2x^2+a^2xy+b^2xy-c^2xy+a^2y^2)y_1^2)(a^2(b^2x_1+a^2y_1)^2(-x_1y+xy_1)^2) \\ & - \left(x_1^2(b^2x^2+a^2xy+b^2xy-c^2xy+a^2y^2)(b^2x_1+a^2y_1)^2\right)(a^4c^2y_1^2(-x_1y+xy_1)^2) \end{aligned}$$

égal à 0.

Exercice 9.6.2

Soient M un point appartenant au cercle inscrit à un triangle PQR et A, B, C les points de contact du cercle inscrit avec les côtés du triangle PQR . Montrer que le produit des distances de M aux trois côtés du triangle ABC est égal au produit des distances de ce même point M aux trois côtés du triangle PQR des contacts.

**Solution:**

Le point M appartient au cercle circonscrit Γ au triangle ABC et le triangle PQR est donc le triangle tangentiel associé au triangle ABC . Le cercle inscrit au triangle PQR est donc Γ : soit K le centre du cercle Γ . Le tracé des trois tangentes au cercle Γ issues des points A, B, C définit le triangle PQR de l'énoncé.

Dessin = $\{A, B, C, K, M\}$

Le repère barycentrique choisi est A, B, C .

Les points composés sont K, M .

Avec des notations naturelles, on a

$$M = \left\{ x, y, -\frac{c^2 x y}{b^2 x + a^2 y} \right\}$$

On déduit les coordonnées barycentriques des points composés:

$$M = \left\{ \frac{x (b^2 x + a^2 y)}{b^2 x^2 + a^2 x y + b^2 x y - c^2 x y + a^2 y^2}, \frac{y (b^2 x + a^2 y)}{b^2 x^2 + a^2 x y + b^2 x y - c^2 x y + a^2 y^2}, \frac{-c^2 x y}{b^2 x^2 + a^2 x y + b^2 x y - c^2 x y + a^2 y^2} \right\}$$

$$K = \left\{ \frac{a^2 (a^2 - b^2 - c^2)}{(a - b - c) (a + b - c) (a - b + c) (a + b + c)}, \frac{b^2 (-a^2 + b^2 - c^2)}{(-a + b - c) (a + b - c) (-a + b + c) (a + b + c)}, \frac{c^2 (a^2 + b^2 - c^2)}{(-a + b + c) (a + b - c) (a - b + c) (a + b + c)} \right\}$$

La projection du point de coordonnées M sur la droite (AB) est le point M_1 de coordonnées barycentriques

$$M_1 = \left\{ \frac{x (2b^2x + a^2y + b^2y - c^2y)}{2(b^2x^2 + a^2xy + b^2xy - c^2xy + a^2y^2)}, \frac{y (a^2x + b^2x - c^2x + 2a^2y)}{2(b^2x^2 + a^2xy + b^2xy - c^2xy + a^2y^2)}, 0 \right\}$$

La distance MM_1^2 a pour valeur

$$MM_1^2 = \frac{(a-b+c)(a+b-c)c^2(-a+b+c)(a+b+c)x^2y^2}{4(b^2x^2 + a^2xy + b^2xy - c^2xy + a^2y^2)^2}$$

La projection du point de coordonnées M sur la droite (BC) est le point M_2 de coordonnées barycentriques

$$M_2 = \left\{ 0, \frac{(b^2x + a^2y)(a^2x + b^2x - c^2x + 2a^2y)}{2a^2(b^2x^2 + a^2xy + b^2xy - c^2xy + a^2y^2)}, \frac{x(a^2b^2x - b^4x + b^2c^2x + a^4y - a^2b^2y - a^2c^2y)}{2a^2(b^2x^2 + a^2xy + b^2xy - c^2xy + a^2y^2)} \right\}$$

La distance MM_2^2 a pour valeur

$$MM_2^2 = \frac{(-a+b+c)(a+b-c)(a-b+c)(a+b+c)x^2(b^2x + a^2y)^2}{4a^2(b^2x^2 + a^2xy + b^2xy - c^2xy + a^2y^2)^2}$$

La projection du point de coordonnées M sur la droite (AC) est le point M_3 de coordonnées barycentriques

$$M_3 = \left\{ \frac{(b^2x + a^2y)(2b^2x + a^2y + b^2y - c^2y)}{2b^2(b^2x^2 + a^2xy + b^2xy - c^2xy + a^2y^2)}, 0, \frac{y(-a^2b^2x + b^4x - b^2c^2x - a^4y + a^2b^2y + a^2c^2y)}{2b^2(b^2x^2 + a^2xy + b^2xy - c^2xy + a^2y^2)} \right\}$$

La distance MM_3^2 a pour valeur

$$MM_3^2 = \frac{(a-b+c)(a+b-c)(-a+b+c)(a+b+c)y^2(b^2x + a^2y)^2}{4b^2(b^2x^2 + a^2xy + b^2xy - c^2xy + a^2y^2)^2}$$

Il résulte que $MM_1^2 MM_2^2 MM_3^2$ a pour valeur

$$MM_1^2 MM_2^2 MM_3^2 = \frac{(-a+b+c)^3(a+b-c)^3c^2(a-b+c)^3(a+b+c)^3x^4y^4(b^2x + a^2y)^4}{64a^2b^2(b^2x^2 + a^2xy + b^2xy - c^2xy + a^2y^2)^6}$$

Un point A_1 situé sur la perpendiculaire à (AK) passant par A est

$$A_1 = \{1 + b^2 - c^2, -b^2, c^2\}$$

La projection du point de coordonnées M sur la droite (AA_1) est le point P_1 de coordonnées barycentriques

$$P_1 = \left\{ \frac{2b^4x^2 + 2a^2b^2xy + a^2b^2y^2 - b^4y^2 + a^2c^2y^2 + 2b^2c^2y^2 - c^4y^2}{2b^2(b^2x^2 + a^2xy + b^2xy - c^2xy + a^2y^2)}, \frac{y(2b^2x + a^2y + b^2y - c^2y)}{2(b^2x^2 + a^2xy + b^2xy - c^2xy + a^2y^2)}, \frac{-c^2y(2b^2x + a^2y + b^2y - c^2y)}{2b^2(b^2x^2 + a^2xy + b^2xy - c^2xy + a^2y^2)} \right\}$$

La distance MP_1^2 a pour valeur

$$MP_1^2 = \frac{a^2 (-a + b + c) (a + b - c) c^2 (a - b + c) (a + b + c) y^4}{4 b^2 (b^2 x^2 + a^2 x y + b^2 x y - c^2 x y + a^2 y^2)^2}$$

Un point B_1 situé sur la perpendiculaire à (BK) passant par B est

$$B_1 = \{a^2, 1 - a^2 + c^2, -c^2\}$$

La projection du point de coordonnées M sur la droite (BB_1) est le point P_2 de coordonnées barycentriques

$$P_2 = \left\{ \frac{x (a^2 x + b^2 x - c^2 x + 2 a^2 y)}{2 (b^2 x^2 + a^2 x y + b^2 x y - c^2 x y + a^2 y^2)}, \right. \\ \frac{(-a^4 x^2 + a^2 b^2 x^2 + 2 a^2 c^2 x^2 + b^2 c^2 x^2 - c^4 x^2 + 2 a^2 b^2 x y + 2 a^4 y^2)}{2 a^2 (b^2 x^2 + a^2 x y + b^2 x y - c^2 x y + a^2 y^2)}, \\ \left. \frac{-c^2 x (a^2 x + b^2 x - c^2 x + 2 a^2 y)}{2 a^2 (b^2 x^2 + a^2 x y + b^2 x y - c^2 x y + a^2 y^2)} \right\}$$

La distance MP_2^2 a pour valeur

$$MP_2^2 = \frac{b^2 (-a + b + c) (a + b - c) c^2 (a - b + c) (a + b + c) x^4}{4 a^2 (b^2 x^2 + a^2 x y + b^2 x y - c^2 x y + a^2 y^2)^2}$$

Un point C_1 situé sur la perpendiculaire à (CK) passant par C est

$$C_1 = \{-a^2, b^2, 1 + a^2 - b^2\}$$

La projection du point de coordonnées M sur la droite (CC_1) est le point P_3 de coordonnées barycentriques

$$P_3 = \left\{ \frac{(b^2 x + a^2 y) (a^2 b^2 x - b^4 x + b^2 c^2 x + a^4 y - a^2 b^2 y - a^2 c^2 y)}{2 b^2 c^2 (b^2 x^2 + a^2 x y + b^2 x y - c^2 x y + a^2 y^2)}, \right. \\ \frac{-(b^2 x + a^2 y) (a^2 b^2 x - b^4 x + b^2 c^2 x + a^4 y - a^2 b^2 y - a^2 c^2 y)}{2 a^2 c^2 (b^2 x^2 + a^2 x y + b^2 x y - c^2 x y + a^2 y^2)}, \\ \left. \frac{Num_z(P_3)}{2 a^2 b^2 c^2 (b^2 x^2 + a^2 x y + b^2 x y - c^2 x y + a^2 y^2)} \right\}$$

avec

$$Num_z(P_3) = -a^4 b^4 x^2 + 2 a^2 b^6 x^2 - b^8 x^2 + a^2 b^4 c^2 x^2 + b^6 c^2 x^2 - 2 a^6 b^2 x y + 4 a^4 b^4 x y - 2 a^2 b^6 x y \\ + 2 a^4 b^2 c^2 x y + 2 a^2 b^4 c^2 x y - 2 a^2 b^2 c^4 x y - a^8 y^2 + 2 a^6 b^2 y^2 - a^4 b^4 y^2 + a^6 c^2 y^2 + a^4 b^2 c^2 y^2$$

La distance MP_3^2 a pour valeur

$$MP_3^2 = \frac{(-a + b + c) (a + b - c) (a - b + c) (a + b + c) (b^2 x + a^2 y)^4}{4 a^2 b^2 c^2 (b^2 x^2 + a^2 x y + b^2 x y - c^2 x y + a^2 y^2)^2}$$

Il résulte que $MP_1^2 MP_2^2 MP_3^2$ a pour valeur

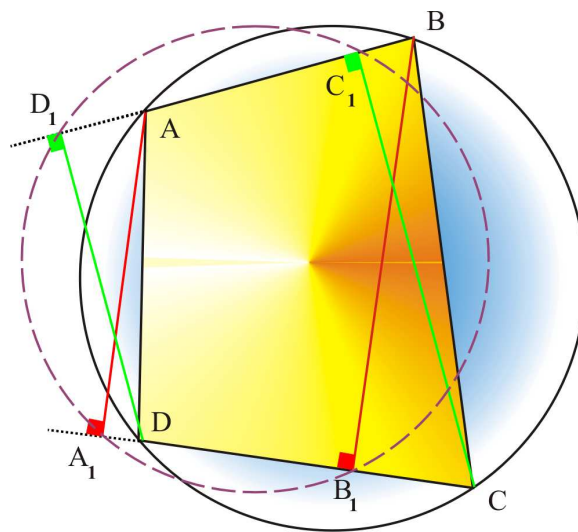
$$MP_1^2 MP_2^2 MP_3^2 = \frac{(-a + b + c)^3 (a + b - c)^3 c^2 (a - b + c)^3 (a + b + c)^3 x^4 y^4 (b^2 x + a^2 y)^4}{64 a^2 b^2 (b^2 x^2 + a^2 x y + b^2 x y - c^2 x y + a^2 y^2)^6}$$

9.7 Projections et cocyclicité

Exercice 9.7.1

Soient quatre points A, B, C, D appartenant à un même cercle, A_1 (resp. B_1) la projection orthogonale de A (resp. B) sur la droite CD , C_1 (resp. D_1) la projection orthogonale de C (resp. D) sur la droite AB . Montrer que les points A_1, B_1, C_1, D_1 sont cocycliques.

Solution:



Dessin = $\{A, B, C, D\}$

Avec des notations naturelles, on a

$$D = \left\{ X, Y, -\frac{c^2 XY}{b^2 X + a^2 Y} \right\}$$

Le repère barycentrique choisi est A, B, C .

Les points composés sont D .

On déduit les coordonnées barycentriques du point composé:

$$D = \left\{ \frac{X (b^2 X + a^2 Y)}{b^2 X^2 + a^2 XY + b^2 XY - c^2 XY + a^2 Y^2}, \frac{Y (b^2 X + a^2 Y)}{b^2 X^2 + a^2 XY + b^2 XY - c^2 XY + a^2 Y^2}, \frac{-c^2 XY}{b^2 X^2 + a^2 XY + b^2 XY - c^2 XY + a^2 Y^2} \right\}$$

La projection du point A sur la droite (CD) est le point A_1 de coordonnées barycentriques

$$A_1 = \left\{ \frac{X (2b^2 X + a^2 Y + b^2 Y - c^2 Y)}{2 (b^2 X^2 + a^2 XY + b^2 XY - c^2 XY + a^2 Y^2)}, \frac{Y (2b^2 X + a^2 Y + b^2 Y - c^2 Y)}{2 (b^2 X^2 + a^2 XY + b^2 XY - c^2 XY + a^2 Y^2)}, \frac{Y (a^2 X - b^2 X - c^2 X + a^2 Y - b^2 Y + c^2 Y)}{2 (b^2 X^2 + a^2 XY + b^2 XY - c^2 XY + a^2 Y^2)} \right\}$$

La projection du point B sur la droite (CD) est le point B_1 de coordonnées barycentriques

$$B_1 = \left\{ \frac{X (a^2 X + b^2 X - c^2 X + 2a^2 Y)}{2 (b^2 X^2 + a^2 XY + b^2 XY - c^2 XY + a^2 Y^2)}, \frac{Y (a^2 X + b^2 X - c^2 X + 2a^2 Y)}{2 (b^2 X^2 + a^2 XY + b^2 XY - c^2 XY + a^2 Y^2)}, \frac{X (-a^2 X + b^2 X + c^2 X - a^2 Y + b^2 Y - c^2 Y)}{2 (b^2 X^2 + a^2 XY + b^2 XY - c^2 XY + a^2 Y^2)} \right\}$$

La projection du point C sur la droite (AB) est le point C_1 de coordonnées barycentriques

$$C_1 = \left\{ \frac{a^2 - b^2 + c^2}{2c^2}, \frac{-a^2 + b^2 + c^2}{2c^2}, 0 \right\}$$

La projection du point D sur la droite (AB) est le point D_1 de coordonnées barycentriques

$$D_1 = \left\{ \frac{X (2b^2 X + a^2 Y + b^2 Y - c^2 Y)}{2 (b^2 X^2 + a^2 XY + b^2 XY - c^2 XY + a^2 Y^2)}, \frac{Y (a^2 X + b^2 X - c^2 X + 2a^2 Y)}{2 (b^2 X^2 + a^2 XY + b^2 XY - c^2 XY + a^2 Y^2)}, 0 \right\}$$

Equation du cercle passant par les points A_1, B_1, C_1

Le centre $M = \{x, y, 1 - x, y\}$ de ce cercle doit vérifier $MA_1^2 - MB_1^2 = 0$ et $MA_1^2 - MC_1^2 = 0$, soit

$$\begin{aligned} & -a^2 X - 3b^2 X + c^2 X - 3a^2 Y - b^2 Y + c^2 Y + y (2a^2 X + 2b^2 X - 2c^2 X + 4a^2 Y) \\ & + x (4b^2 X + 2a^2 Y + 2b^2 Y - 2c^2 Y) = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & a^2 b^2 X - b^4 X - b^2 c^2 X + a^4 Y - a^2 b^2 Y - 2a^2 c^2 Y - b^2 c^2 Y + c^4 Y \\ & + y (-2a^2 b^2 X + 2b^4 X - 2b^2 c^2 X - 2a^4 Y + 2a^2 b^2 Y + 2a^2 c^2 Y) \\ & + x (-2a^2 b^2 X + 2b^4 X + 2b^2 c^2 X - 2a^4 Y + 2a^2 b^2 Y + 4a^2 c^2 Y + 2b^2 c^2 Y - 2c^4 Y) = 0 \end{aligned}$$

chacune de ces équations ayant été simplifiée par le facteur

$$a^2 X - b^2 X - c^2 X + a^2 Y - b^2 Y + c^2 Y$$

La résolution de ce système linéaire donne

$$\begin{aligned} x &= \frac{(2b^2 X + a^2 Y + b^2 Y - c^2 Y) (a^2 b^2 X - b^4 X + a^2 c^2 X + 2b^2 c^2 X - c^4 X + a^4 Y - a^2 b^2 Y + a^2 c^2 Y)}{2 (-a + b + c) (a + b - c) (a - b + c) (a + b + c) (b^2 X^2 + a^2 XY + b^2 XY - c^2 XY + a^2 Y^2)} \\ y &= \frac{(a^2 X + b^2 X - c^2 X + 2a^2 Y) (a^2 b^2 X - b^4 X - b^2 c^2 X + a^4 Y - a^2 b^2 Y - 2a^2 c^2 Y - b^2 c^2 Y + c^4 Y)}{2 (a - b - c) (a + b - c) (a - b + c) (a + b + c) (b^2 X^2 + a^2 XY + b^2 XY - c^2 XY + a^2 Y^2)} \end{aligned}$$

Les coordonnées du centre du cercle sont ainsi

$$\left\{ \frac{(2b^2X + a^2Y + b^2Y - c^2Y)(a^2b^2X - b^4X + a^2c^2X + 2b^2c^2X - c^4X + a^4Y - a^2b^2Y + a^2c^2Y)}{2(-a+b+c)(a+b-c)(a-b+c)(a+b+c)(b^2X^2 + a^2XY + b^2XY - c^2XY + a^2Y^2)}, \right. \\ \left. \frac{(a^2X + b^2X - c^2X + 2a^2Y)(a^2b^2X - b^4X - b^2c^2X + a^4Y - a^2b^2Y - 2a^2c^2Y - b^2c^2Y + c^4Y)}{2(a-b-c)(a+b-c)(a-b+c)(a+b+c)(b^2X^2 + a^2XY + b^2XY - c^2XY + a^2Y^2)}, \right. \\ \left. \frac{(a^2X - b^2X - c^2X + a^2Y - b^2Y + c^2Y)(a^2b^2X - b^4X + b^2c^2X + a^4Y - a^2b^2Y - a^2c^2Y)}{2(a-b-c)(a+b-c)(a-b+c)(a+b+c)(b^2X^2 + a^2XY + b^2XY - c^2XY + a^2Y^2)} \right\}$$

Le rayon au carré de ce cercle a pour valeur

$$r^2 = \frac{a^2b^2(a^2X - b^2X - c^2X + a^2Y - b^2Y + c^2Y)^2}{4(-a+b+c)(a+b-c)(a-b+c)(a+b+c)(b^2X^2 + a^2XY + b^2XY - c^2XY + a^2Y^2)}$$

Un point $M = \{x, y, 1 - x - y\}$ appartient à ce cercle si et seulement si sa distance (au carré) au centre est égale à cette valeur, soit

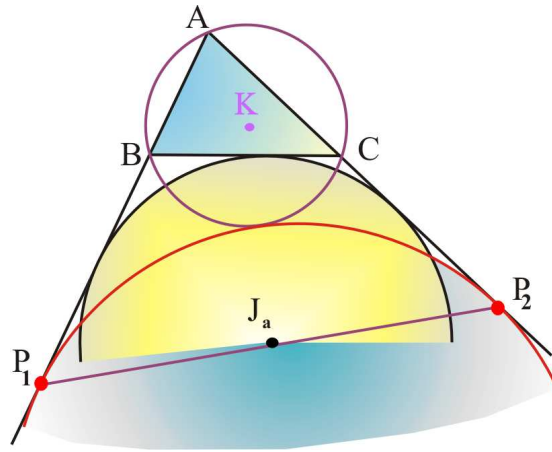
$$0 = 2a^2b^2X^2 + 2b^4X^2 - 2b^2c^2X^2 - 2a^2b^2xX^2 - 6b^4xX^2 + 2b^2c^2xX^2 + 4b^4x^2X^2 - 4a^2b^2X^2y \\ - 4b^4X^2y + 4b^2c^2X^2y + 4a^2b^2xX^2y + 4b^4xX^2y - 4b^2c^2xX^2y + 4a^2b^2X^2y^2 + a^4XY + 6a^2b^2XY \\ + b^4XY - 2a^2c^2XY - 2b^2c^2XY + c^4XY - 2a^4xXY - 10a^2b^2xXY - 4b^4xXY + 4a^2c^2xXY \\ + 6b^2c^2xXY - 2c^4xXY + 4a^2b^2x^2XY + 4b^4x^2XY - 4b^2c^2x^2XY - 4a^4XyY - 10a^2b^2XyY \\ - 2b^4XyY + 6a^2c^2XyY + 4b^2c^2XyY - 2c^4XyY + 4a^4xXyY + 8a^2b^2xXyY + 4b^4xXyY \\ - 8a^2c^2xXyY - 8b^2c^2xXyY + 4c^4xXyY + 4a^4Xy^2Y + 4a^2b^2Xy^2Y - 4a^2c^2Xy^2Y + 2a^4Y^2 \\ + 2a^2b^2Y^2 - 2a^2c^2Y^2 - 4a^4xY^2 - 4a^2b^2xY^2 + 4a^2c^2xY^2 + 4a^2b^2x^2Y^2 - 6a^4yY^2 - 2a^2b^2yY^2 \\ + 2a^2c^2yY^2 + 4a^4xY^2 + 4a^2b^2xY^2 - 4a^2c^2xY^2 + 4a^4y^2Y^2$$

Le point $M = D_1$ convient.

La réciproque se démontre de la même façon.

Exercice 9.7.2 *difficile sans l'inversion*

Dans un triangle ABC , on considère le cercle tangent en P_1 et P_2 aux prolongements des droites (AB) , (AC) et tangent au cercle circonscrit à ABC . Montrer que le milieu du segment $[P_1P_2]$ est le centre J_a du cercle exinscrit dans l'angle A .

**Solution:**

Soit K le centre du cercle circonscrit à ABC . Nous choisissons un point $D = \{X, Y, \frac{-c^2 XY}{b^2 X + a^2 Y}\}$ sur le cercle circonscrit et un point M sur la droite (KM) , M étant le barycentre de $\{(K, k), (D, (1 - k))\}$. La projection P_1 (resp. P_2) de M sur la droite (AB) (resp. (AC)) doit satisfaire $P_1 M^2 = P_2 M^2 = D M^2$. Ces conditions nous permettent de déterminer les coordonnées barycentriques de M .

Dessin = $\{A, B, C, D, J_a, K\}$

Le repère barycentrique choisi est A, B, C .

Les points composés sont D, K, J_a .

Les coordonnées barycentriques des points composés D, J_a sont:

$$D = \left\{ \frac{X (b^2 X + a^2 Y)}{b^2 X^2 + a^2 X Y + b^2 X Y - c^2 X Y + a^2 Y^2}, \frac{Y (b^2 X + a^2 Y)}{b^2 X^2 + a^2 X Y + b^2 X Y - c^2 X Y + a^2 Y^2}, \frac{-c^2 X Y}{b^2 X^2 + a^2 X Y + b^2 X Y - c^2 X Y + a^2 Y^2} \right\}$$

$$J_a = \left\{ \frac{-a}{-a + b + c}, \frac{b}{-a + b + c}, \frac{c}{-a + b + c} \right\}$$

Dessin = $\text{Dessin} \cup \{M\} = \{A, B, C, D, J_a, K, M\}$

Le repère barycentrique choisi est A, B, C .

Les points composés sont M .

On déduit les coordonnées barycentriques du point composé $M = \left\{ \frac{x_M}{\text{Den}(M)}, \frac{y_M}{\text{Den}(M)}, \frac{z_M}{\text{Den}(M)} \right\}$ avec

$$x_M = a^4 b^2 X^2 - 2 a^2 b^4 X^2 + b^6 X^2 - 2 a^2 b^2 c^2 X^2 - 2 b^4 c^2 X^2 + b^2 c^4 X^2 + a^2 b^4 k X^2 - b^6 k X^2 + a^2 b^2 c^2 k X^2 + 2 b^4 c^2 k X^2 - b^2 c^4 k X^2 + a^6 X Y - 2 a^4 b^2 X Y + a^2 b^4 X Y - 2 a^4 c^2 X Y - 2 a^2 b^2 c^2 X Y + a^2 c^4 X Y + 2 a^4 b^2 k X Y - 2 a^2 b^4 k X Y + 2 a^2 b^2 c^2 k X Y + a^6 k Y^2 - a^4 b^2 k Y^2 - a^4 c^2 k Y^2$$

$$y_M = -a^2 b^4 k X^2 + b^6 k X^2 - b^4 c^2 k X^2 + a^4 b^2 X Y - 2 a^2 b^4 X Y + b^6 X Y - 2 a^2 b^2 c^2 X Y - 2 b^4 c^2 X Y + b^2 c^4 X Y - 2 a^4 b^2 k X Y + 2 a^2 b^4 k X Y + 2 a^2 b^2 c^2 k X Y + a^6 Y^2 - 2 a^4 b^2 Y^2 + a^2 b^4 Y^2 - 2 a^4 c^2 Y^2 - 2 a^2 b^2 c^2 Y^2 + a^2 c^4 Y^2 - a^6 k Y^2 + a^4 b^2 k Y^2 + 2 a^4 c^2 k Y^2 + a^2 b^2 c^2 k Y^2 - a^2 c^4 k Y^2$$

$$z_M = c^2 (-a^2 b^2 k X^2 - b^4 k X^2 + b^2 c^2 k X^2 - a^4 X Y + 2 a^2 b^2 X Y - b^4 X Y + 2 a^2 c^2 X Y + 2 b^2 c^2 X Y - c^4 X Y - 4 a^2 b^2 k X Y - a^4 k Y^2 - a^2 b^2 k Y^2 + a^2 c^2 k Y^2)$$

$$Den(M) = (a - b - c) (a + b - c) (a - b + c) (a + b + c) (b^2 X^2 + a^2 X Y + b^2 X Y - c^2 X Y + a^2 Y^2)$$

$$\text{Dessin} = \text{Dessin} \cup \{P_1, P_2\} = \{A, B, C, D, J_a, K, M, P_1, P_2\}$$

La projection du point M sur la droite (AB) est le point P_1 de coordonnées barycentriques

$$P_1 = \left\{ \frac{-2b^2 X^2 + b^2 k X^2 - a^2 X Y - b^2 X Y + c^2 X Y - a^2 k Y^2}{2(-b^2 X^2 - a^2 X Y - b^2 X Y + c^2 X Y - a^2 Y^2)}, \frac{-b^2 k X^2 - a^2 X Y - b^2 X Y + c^2 X Y - 2a^2 Y^2 + a^2 k Y^2}{2(-b^2 X^2 - a^2 X Y - b^2 X Y + c^2 X Y - a^2 Y^2)}, 0 \right\}$$

La projection du point M sur la droite (AB) est le point P_2 de coordonnées barycentriques

$$P_2 = \left\{ \frac{2b^4 X^2 - b^4 k X^2 + 3a^2 b^2 X Y + b^4 X Y - b^2 c^2 X Y - 2a^2 b^2 k X Y + a^4 Y^2 + a^2 b^2 Y^2 - a^2 c^2 Y^2 - a^4 k Y^2 + a^2 c^2 k Y^2}{2b^2 (b^2 X^2 + a^2 X Y + b^2 X Y - c^2 X Y + a^2 Y^2)}, 0, \frac{b^4 k X^2 - a^2 b^2 X Y + b^4 X Y - b^2 c^2 X Y + 2a^2 b^2 k X Y - a^4 Y^2 + a^2 b^2 Y^2 + a^2 c^2 Y^2 + a^4 k Y^2 - a^2 c^2 k Y^2}{2b^2 (b^2 X^2 + a^2 X Y + b^2 X Y - c^2 X Y + a^2 Y^2)} \right\}$$

La condition $MP_1^2 - MD^2 = 0$ implique

$$0 = (b^2 k X^2 + a^2 X Y + 2ab X Y + b^2 X Y - c^2 X Y - 2abk X Y + a^2 k Y^2) (b^2 k X^2 + a^2 X Y - 2ab X Y + b^2 X Y - c^2 X Y + 2abk X Y + a^2 k Y^2)$$

La solution de

$$b^2 k X^2 + a^2 X Y + b^2 X Y - c^2 X Y \pm 2ab X Y - 2(\pm)abk X Y + a^2 k Y^2 = 0$$

fournit

$$k = \frac{-a^2 X Y - b^2 X Y + c^2 X Y - 2(\pm)ab X Y}{b^2 X^2 - 2(\pm)ab X Y + a^2 Y^2}$$

La condition $MP_2^2 - MD^2 = 0$ devient

$$0 = (2ab^2 X - 2b^2 c X \pm 2b^3 X + a^3 Y - ab^2 Y - 2a^2 c Y + a^2 c^2 Y) (2ab^2 X + 2b^2 c X \pm 2b^3 X + a^3 Y - ab^2 Y + 2a^2 c Y + a^2 c^2 Y)$$

Traisons la situation

$$2ab^2 X - 2b^2 c X \pm 2b^3 X + a^3 Y - ab^2 Y - 2a^2 c Y + a^2 c^2 Y = 0$$

On obtient alors

$$Y = \frac{-2(ab^2 X - b^2 c X \pm b^3 X)}{a(a^2 - b^2 - 2ac + c^2)}$$

d'où on déduit

$$k = \frac{2(a - b - c)(a + b - c)(a - c \pm b)(a^2 + b^2 - c^2 \pm 2ab)}{a(a^2 + b^2 - 2ac + c^2 \pm 2ab - 2(\pm)bc)^2}$$

et on obtient ainsi

$$M = \left\{ \frac{(a^2 + b^2 - c^2 + 2(\pm)ab)(a^4 - b^4 - 2a^3c + 2ab^2c + 2b^2c^2 + 2ac^3 - c^4 \pm 2a^3b - 2(\pm)ab^3 - 2(\pm)abc^2)}{(a-b+c)(a+b+c)(a^2+b^2-2ac+c^2 \pm 2ab-2(\pm)bc)^2}, \right. \\ \left. \frac{4b^2c(a-c \pm b)(a^2+b^2-c^2 \pm 2ab)}{(a-b+c)(a+b+c)(a^2+b^2-2ac+c^2 \pm 2ab-2(\pm)bc)^2}, \right. \\ \left. \frac{-4b^2c(a-c \pm b)(2ab \pm a^2 \pm b^2 - (\pm)c^2)}{(a-b+c)(a+b+c)(a^2+b^2-2ac+c^2+2(\pm)ab-2(\pm)bc)^2} \right\}$$

Explicitement, les points M et M^* possibles sont

$$M = \left\{ \frac{a^3 + a^2b - ab^2 - b^3 - a^2c + 2abc - b^2c - ac^2 + bc^2 + c^3}{(a+b-c)^2(a-b+c)}, \right. \\ \left. \frac{-4b^2c}{(-a+b-c)(a+b-c)^2}, \frac{4b^2c^2}{(-a+b-c)(a+b-c)^2} \right\} \\ M^* = \left\{ \frac{a^3 - a^2b - ab^2 + b^3 - a^2c - 2abc - b^2c - ac^2 - bc^2 + c^3}{(a-b-c)^2(a+b+c)}, \right. \\ \left. \frac{4b^2c}{(-a+b+c)^2(a+b+c)}, \frac{4b^2c^2}{(-a+b+c)^2(a+b+c)} \right\}$$

Il nous reste à analyser l'équation

$$2ab^2X + 2b^2cX + 2b^3 \pm X + a^3Y - ab^2Y + 2a^2cY + ac^2Y = 0$$

Le même calcul permet d'obtenir

$$k = \frac{2(a-b+c)(a+b+c)(a+c \pm b)(a^2+b^2-c^2+2(\pm)ab)}{a(a^2+b^2+2ac+c^2 \pm 2ab \pm 2bc)^2}$$

et deux possibilités pour le point M , soit

$$M = \left\{ \frac{a^3 + a^2b - ab^2 - b^3 + a^2c - 2abc + b^2c - ac^2 + bc^2 - c^3}{(a-b-c)(a+b+c)^2}, \right. \\ \left. \frac{4b^2c}{(-a+b+c)(a+b+c)^2}, \frac{4b^2c^2}{(-a+b+c)(a+b+c)^2} \right\} \\ M = \left\{ \frac{a^3 - a^2b - ab^2 + b^3 + a^2c + 2abc + b^2c - ac^2 - bc^2 - c^3}{(a+b-c)(a-b+c)^2}, \right. \\ \left. \frac{-4b^2c}{(-a+b-c)^2(a+b-c)}, \frac{4b^2c^2}{(-a+b-c)^2(a+b-c)} \right\}$$

déjà obtenues.

Dessin = $\{A, B, C, D, J_a, K, M, P_1, P_2\}$

$$M = \left\{ \frac{a^3 + a^2b - ab^2 - b^3 - a^2c + 2abc - b^2c - ac^2 + bc^2 + c^3}{(a+b-c)^2(a-b+c)}, \right. \\ \left. \frac{-4b^2c}{(-a+b-c)(a+b-c)^2}, \frac{4b^2c^2}{(-a+b-c)(a+b-c)^2} \right\}$$

La projection du point M sur la droite (AB) est le point P_1 de coordonnées barycentriques

$$P_1 = \left\{ \frac{-a+b+c}{-a-b+c}, \frac{-2b}{-a-b+c}, 0 \right\}$$

La projection du point M sur la droite (AB) est le point P_2 de coordonnées barycentriques

$$P_2 = \left\{ \frac{a+b+c}{a+b-c}, 0, \frac{-2c}{a+b-c} \right\}$$

Dessin = $\text{Dessin} \cup \{I\} = \{A, B, C, D, I, J_a, K, M, P_1, P_2\}$

Soit I le milieu de $[P_1P_2]$.

Le repère barycentrique choisi est A, B, C .

Les points composés sont I .

Les coordonnées barycentriques du point composé sont:

$$I = \left\{ \frac{a}{a+b-c}, \frac{b}{a+b-c}, \frac{-c}{a+b-c} \right\}$$

Ce point ne convient pas, la droite joignant le point C à ce point coupe (AB) en un point intérieur au segment $[AB]$, ce qui est exclu dans le contexte de l'énoncé.

Dessin = $\{A, B, C, D, J_a, K, M, P_1, P_2\}$

Dessin = $\text{Dessin} \cup \{M^*\} = \{A, B, C, D, I, J_a, K, M, M^*, P_1, P_2\}$

Le repère barycentrique choisi est A, B, C .

Les points composés sont M^* .

On déduit les coordonnées barycentriques du point composé:

$$M^* = \left\{ \frac{a^3 - a^2b - ab^2 + b^3 - a^2c - 2abc - b^2c - ac^2 - bc^2 + c^3}{(a-b-c)^2(a+b+c)}, \frac{4b^2c}{(-a+b+c)^2(a+b+c)}, \frac{4bc^2}{(-a+b+c)^2(a+b+c)} \right\}$$

Dessin = $\text{Dessin} \cup \{P_1^*, P_2^*\} = \{A, B, C, D, I, J_a, K, M, M^*, P_1, P_1^*, P_2, P_2^*\}$

Le repère barycentrique choisi est A, B, C .

Les points composés sont P_1^*, P_2^* .

La projection du point M^* sur la droite (AB) est le point P_1^* de coordonnées barycentriques

$$P_1^* = \left\{ \frac{-a-b+c}{-a+b+c}, \frac{2b}{-a+b+c}, 0 \right\}$$

La projection du point M^* sur la droite (AB) est le point P_2^* de coordonnées barycentriques

$$P_2^* = \left\{ \frac{-a+b-c}{-a+b+c}, 0, \frac{2c}{-a+b+c} \right\}$$

Dessin = $\text{Dessin} \cup \{I^*\} = \{A, B, C, D, I, I^*, J_a, K, M, M^*, P_1, P_1^*, P_2, P_2^*\}$

Soit I^* le milieu du segment $P_1^*P_2^*$.

Le repère barycentrique choisi est A, B, C .

Les points composés sont I^* .

On déduit les coordonnées barycentriques du point composé:

$$I^* = \left\{ \frac{-a}{-a+b+c}, \frac{b}{-a+b+c}, \frac{c}{-a+b+c} \right\}$$

Ce point est le centre du cercle exinscrit.

CHAPITRE

10

Théorème de Pascal

10 Théorème de Pascal

10.1 Un théorème de Pascal abstrait

Exercice 10.1.1

Soit ABC un triangle, M_i un point de coordonnées barycentriques $\{X_i, Y_i, Z_i\}$ pour $i = 1, 2, 3$. Soient P_1 le point $(BM_1) \cap (CM_3)$, P_2 le point $(AM_1) \cap (CM_2)$, P_3 le point $(AM_3) \cap (BM_2)$. On pose

$$k_1 = \frac{(-X_1 X_3 Y_1 Y_2 + X_1 X_2 Y_1 Y_3 - X_3 Y_1 Y_2 Z_1 + X_1 Y_2 Y_3 Z_1) (Y_3 Z_2 + X_2 Z_3 + Z_2 Z_3)}{Y_3 (X_2 Y_1 + Y_1 Y_2 + Y_2 Z_1) (-X_1 X_3 Z_2 - X_3 Z_1 Z_2 + X_1 X_2 Z_3 + X_1 Z_2 Z_3)}$$

$$k_2 = \frac{(-X_1 X_3 Y_1 Y_2 + X_1 X_2 Y_1 Y_3 + X_2 X_3 Y_1 Z_1 - X_1 X_3 Y_2 Z_1) (Y_3 Z_2 + X_2 Z_3 + Z_2 Z_3)}{(X_2 Y_1 + Y_1 Y_2 + Y_2 Z_1) (-X_1 X_3 Y_3 Z_2 + X_1 X_2 Y_3 Z_3 + X_2 X_3 Z_1 Z_3 - X_1 X_3 Z_2 Z_3)}$$

$$k_3 = \frac{(X_2 X_3 Y_1 - X_1 X_3 Y_2 + X_3 Y_1 Y_2 - X_1 Y_2 Y_3) Z_1 (Y_3 Z_2 + X_2 Z_3 + Z_2 Z_3)}{(X_2 Y_1 + Y_1 Y_2 + Y_2 Z_1) (X_3 Y_3 Z_1 Z_2 + X_2 X_3 Z_1 Z_3 - X_1 X_3 Z_2 Z_3 - X_1 Y_3 Z_2 Z_3)}$$

On suppose que k_1, k_2, k_3 sont définis et que $k_1 = k_2 = k_3$. Montrer que les points P_1, P_2, P_3 appartiennent à une même droite et que l'on a l'égalité $\overrightarrow{P_1 P_2} = k_1 \overrightarrow{P_1 P_3}$.

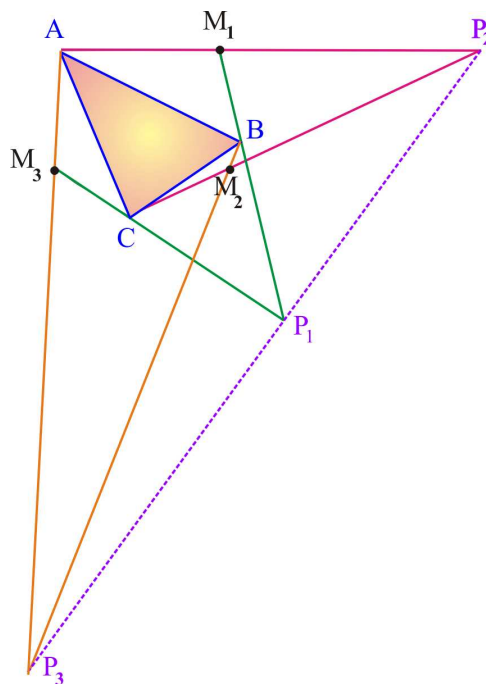
Montrer que la condition équivaut à

$$0 = X_2 X_3 Y_1 Y_3 Z_1 Z_2 - X_1 X_3 Y_2 Y_3 Z_1 Z_2 - X_2 X_3 Y_1 Y_2 Z_1 Z_3 \\ + X_1 X_2 Y_2 Y_3 Z_1 Z_3 + X_1 X_3 Y_1 Y_2 Z_2 Z_3 - X_1 X_2 Y_1 Y_3 Z_2 Z_3$$

lorsque k_1, k_2, k_3 sont définis.

Une formulation différente est

$$\frac{1}{X_1 Y_2 Z_3} + \frac{1}{X_3 Y_1 Z_2} + \frac{1}{X_2 Y_3 Z_1} = \frac{1}{X_1 Y_3 Z_2} + \frac{1}{X_2 Y_1 Z_3} + \frac{1}{X_3 Y_2 Z_1}$$



Solution:

Dessin = $\{A, B, C, M_1, M_2, M_3\}$

Le repère barycentrique choisi est A, B, C .

Les points composés sont M_1, M_2, M_3 .

On déduit les coordonnées barycentriques des points composés:

$$M_1 = \left\{ \frac{X_1}{X_1 + Y_1 + Z_1}, \frac{Y_1}{X_1 + Y_1 + Z_1}, \frac{Z_1}{X_1 + Y_1 + Z_1} \right\}$$

$$M_2 = \left\{ \frac{X_2}{X_2 + Y_2 + Z_2}, \frac{Y_2}{X_2 + Y_2 + Z_2}, \frac{Z_2}{X_2 + Y_2 + Z_2} \right\}$$

$$M_3 = \left\{ \frac{X_3}{X_3 + Y_3 + Z_3}, \frac{Y_3}{X_3 + Y_3 + Z_3}, \frac{Z_3}{X_3 + Y_3 + Z_3} \right\}$$

Dessin = $\text{Dessin} \cup \{P_1\} = \{A, B, C, M_1, M_2, M_3, P_1\}$

Détermination du point P_1 :

Soit P_1 le point $(BM_1) \cap (CM_3)$. Le point P_1 est composé.

Comme $P_1 \in (BM_1)$, on a, en choisissant les inconnues ν_1

$$\overrightarrow{OP_1} = \nu_1 \overrightarrow{OB} + (1 - \nu_1) \overrightarrow{OM_1}$$

On déduit:

$$\overrightarrow{OP_1} = i(1) \overrightarrow{OA} + i(2) \overrightarrow{OB} + i(3) \overrightarrow{OC}$$

avec

$$i(1) = \frac{(1 - \nu_1) X_1}{X_1 + Y_1 + Z_1}$$

$$i(2) = \frac{\nu_1 X_1 + Y_1 + \nu_1 Z_1}{X_1 + Y_1 + Z_1}$$

$$i(3) = \frac{(1 - \nu_1) Z_1}{X_1 + Y_1 + Z_1}$$

Comme $P_1 \in (CM_3)$, on a, en choisissant les inconnues μ_1

$$\overrightarrow{OP_1} = \mu_1 \overrightarrow{OC} + (1 - \mu_1) \overrightarrow{OM_3}$$

On déduit:

$$\overrightarrow{OP_1} = j(1) \overrightarrow{OA} + j(2) \overrightarrow{OB} + j(3) \overrightarrow{OC}$$

avec

$$j(1) = \frac{(1 - \mu_1) X_3}{X_3 + Y_3 + Z_3}$$

$$j(2) = \frac{(1 - \mu_1) Y_3}{X_3 + Y_3 + Z_3}$$

$$j(3) = \frac{\mu_1 X_3 + \mu_1 Y_3 + Z_3}{X_3 + Y_3 + Z_3}$$

La résolution du système linéaire d'inconnues ν_1, μ_1 donne

$$\nu_1 = \frac{-X_3 Y_1 + X_1 Y_3}{X_1 X_3 + X_1 Y_3 + X_3 Z_1} \quad \mu_1 = \frac{X_3 Z_1 - X_1 Z_3}{X_1 X_3 + X_1 Y_3 + X_3 Z_1}$$

On déduit que:

$$P_1 = \left\{ \frac{X_1 X_3}{X_1 X_3 + X_1 Y_3 + X_3 Z_1}, \frac{X_1 Y_3}{X_1 X_3 + X_1 Y_3 + X_3 Z_1}, \frac{X_3 Z_1}{X_1 X_3 + X_1 Y_3 + X_3 Z_1} \right\}$$

Dessin = Dessin $\cup \{P_2\} = \{A, B, C, M_1, M_2, M_3, P_1, P_2\}$

Détermination du point P_2 :

Soit P_2 le point $(AM_1) \cap (CM_2)$. Le point P_2 est composé.

Comme $P_2 \in (AM_1)$, on a, en choisissant les inconnues ν_1

$$\overrightarrow{OP_2} = \nu_1 \overrightarrow{OA} + (1 - \nu_1) \overrightarrow{OM_1}$$

On déduit:

$$\overrightarrow{OP_2} = k(1) \overrightarrow{OA} + k(2) \overrightarrow{OB} + k(3) \overrightarrow{OC}$$

avec

$$k(1) = \frac{X_1 + \nu_1 Y_1 + \nu_1 Z_1}{X_1 + Y_1 + Z_1}$$

$$k(2) = \frac{(1 - \nu_1) Y_1}{X_1 + Y_1 + Z_1}$$

$$k(3) = \frac{(1 - \nu_1) Z_1}{X_1 + Y_1 + Z_1}$$

Comme $P_2 \in (CM_2)$, on a, en choisissant les inconnues μ_1

$$\overrightarrow{OP_2} = \mu_1 \overrightarrow{OC} + (1 - \mu_1) \overrightarrow{OM_2}$$

On déduit:

$$\overrightarrow{OP_2} = l(1) \overrightarrow{OA} + l(2) \overrightarrow{OB} + l(3) \overrightarrow{OC}$$

avec

$$\begin{aligned} l(1) &= \frac{(1 - \mu_1) X_2}{X_2 + Y_2 + Z_2} \\ l(2) &= \frac{(1 - \mu_1) Y_2}{X_2 + Y_2 + Z_2} \\ l(3) &= \frac{\mu_1 X_2 + \mu_1 Y_2 + Z_2}{X_2 + Y_2 + Z_2} \end{aligned}$$

La résolution du système linéaire d'inconnues ν_1, μ_1 donne

$$\nu_1 = \frac{X_2 Y_1 - X_1 Y_2}{X_2 Y_1 + Y_2 Y_1 + Y_2 Z_1} \quad \mu_1 = \frac{Y_2 Z_1 - Y_1 Z_2}{X_2 Y_1 + Y_2 Y_1 + Y_2 Z_1}$$

On déduit que:

$$P_2 = \left\{ \frac{X_2 Y_1}{X_2 Y_1 + Y_1 Y_2 + Y_2 Z_1}, \frac{Y_1 Y_2}{X_2 Y_1 + Y_1 Y_2 + Y_2 Z_1}, \frac{Y_2 Z_1}{X_2 Y_1 + Y_1 Y_2 + Y_2 Z_1} \right\}$$

Dessin = Dessin $\cup \{P_3\} = \{A, B, C, M_1, M_2, M_3, P_1, P_2, P_3\}$

Détermination du point P_3 :

Soit P_3 le point $(AM_3) \cap (BM_2)$. Le point P_3 est composé.

Comme $P_3 \in (AM_3)$, on a, en choisissant les inconnues ν_1

$$\overrightarrow{OP_3} = \nu_1 \overrightarrow{OA} + (1 - \nu_1) \overrightarrow{OM_3}$$

On déduit:

$$\overrightarrow{OP_3} = m(1) \overrightarrow{OA} + m(2) \overrightarrow{OB} + m(3) \overrightarrow{OC}$$

avec

$$\begin{aligned} m(1) &= \frac{X_3 + \nu_1 Y_3 + \nu_1 Z_3}{X_3 + Y_3 + Z_3} \\ m(2) &= \frac{(1 - \nu_1) Y_3}{X_3 + Y_3 + Z_3} \\ m(3) &= \frac{(1 - \nu_1) Z_3}{X_3 + Y_3 + Z_3} \end{aligned}$$

Comme $P_3 \in (BM_2)$, on a, en choisissant les inconnues μ_1

$$\overrightarrow{OP_3} = \mu_1 \overrightarrow{OB} + (1 - \mu_1) \overrightarrow{OM_2}$$

On déduit:

$$\overrightarrow{OP_3} = n(1) \overrightarrow{OA} + n(2) \overrightarrow{OB} + n(3) \overrightarrow{OC}$$

avec

$$\begin{aligned} n(1) &= \frac{(1 - \mu_1) X_2}{X_2 + Y_2 + Z_2} \\ n(2) &= \frac{\mu_1 X_2 + Y_2 + \mu_1 Z_2}{X_2 + Y_2 + Z_2} \\ n(3) &= \frac{(1 - \mu_1) Z_2}{X_2 + Y_2 + Z_2} \end{aligned}$$

La résolution du système linéaire d'inconnues ν_1, μ_1 donne

$$\nu_1 = \frac{-X_3 Z_2 + X_2 Z_3}{Y_3 Z_2 + X_2 Z_3 + Z_2 Z_3} \quad \mu_1 = \frac{Y_3 Z_2 - Y_2 Z_3}{Y_3 Z_2 + X_2 Z_3 + Z_2 Z_3}$$

On déduit que:

$$P_3 = \left\{ \frac{X_2 Z_3}{Y_3 Z_2 + X_2 Z_3 + Z_2 Z_3}, \frac{Y_3 Z_2}{Y_3 Z_2 + X_2 Z_3 + Z_2 Z_3}, \frac{Z_2 Z_3}{Y_3 Z_2 + X_2 Z_3 + Z_2 Z_3} \right\}$$

Calculons le vecteur $\overrightarrow{P_1 P_2}$. On a:

$$\overrightarrow{P_1 P_2} = o(1) \overrightarrow{OA} + o(2) \overrightarrow{OB} + o(3) \overrightarrow{OC}$$

avec

$$\begin{aligned} o(1) &= \frac{-X_1 X_3 Y_1 Y_2 + X_1 X_2 Y_1 Y_3 + X_2 X_3 Y_1 Z_1 - X_1 X_3 Y_2 Z_1}{(X_1 X_3 + X_1 Y_3 + X_3 Z_1) (X_2 Y_1 + Y_1 Y_2 + Y_2 Z_1)} \\ o(2) &= \frac{X_1 X_3 Y_1 Y_2 - X_1 X_2 Y_1 Y_3 + X_3 Y_1 Y_2 Z_1 - X_1 Y_2 Y_3 Z_1}{(X_1 X_3 + X_1 Y_3 + X_3 Z_1) (X_2 Y_1 + Y_1 Y_2 + Y_2 Z_1)} \\ o(3) &= \frac{-(X_2 X_3 Y_1 + X_1 X_3 Y_2 - X_3 Y_1 Y_2 + X_1 Y_2 Y_3) Z_1}{(X_1 X_3 + X_1 Y_3 + X_3 Z_1) (X_2 Y_1 + Y_1 Y_2 + Y_2 Z_1)} \end{aligned}$$

Calculons le vecteur $\overrightarrow{P_1 P_3}$. On a:

$$\overrightarrow{P_1 P_3} = p(1) \overrightarrow{OA} + p(2) \overrightarrow{OB} + p(3) \overrightarrow{OC}$$

avec

$$\begin{aligned} p(1) &= \frac{-X_1 X_3 Y_3 Z_2 + X_1 X_2 Y_3 Z_3 + X_2 X_3 Z_1 Z_3 - X_1 X_3 Z_2 Z_3}{(X_1 X_3 + X_1 Y_3 + X_3 Z_1) (Y_3 Z_2 + X_2 Z_3 + Z_2 Z_3)} \\ p(2) &= \frac{Y_3 (X_1 X_3 Z_2 + X_3 Z_1 Z_2 - X_1 X_2 Z_3 - X_1 Z_2 Z_3)}{(X_1 X_3 + X_1 Y_3 + X_3 Z_1) (Y_3 Z_2 + X_2 Z_3 + Z_2 Z_3)} \\ p(3) &= \frac{-X_3 Y_3 Z_1 Z_2 - X_2 X_3 Z_1 Z_3 + X_1 X_3 Z_2 Z_3 + X_1 Y_3 Z_2 Z_3}{(X_1 X_3 + X_1 Y_3 + X_3 Z_1) (Y_3 Z_2 + X_2 Z_3 + Z_2 Z_3)} \end{aligned}$$

Les vecteurs $\overrightarrow{P_1 P_2}$ et $\overrightarrow{P_1 P_3}$ sont colinéaires si et seulement si les coefficients $o(1), o(2), o(3)$ et $p(1), p(2), p(3)$ sont proportionnels. Or $k_i = o(i)/p(i)$ pour $i = 1, 2, 3$: il résulte la conclusion énoncée.

Les factorisations de $k_1 - k_2$ et $k_1 - k_3$ contiennent toutes deux, au numérateur, le facteur

$$\begin{aligned} &X_2 X_3 Y_1 Y_3 Z_1 Z_2 - X_1 X_3 Y_2 Y_3 Z_1 Z_2 - X_2 X_3 Y_1 Y_2 Z_1 Z_3 \\ &+ X_1 X_2 Y_2 Y_3 Z_1 Z_3 + X_1 X_3 Y_1 Y_2 Z_2 Z_3 - X_1 X_2 Y_1 Y_3 Z_2 Z_3 \end{aligned}$$

et les autres facteurs intervenant au numérateur et au dénominateur de ces factorisations sont les facteurs présents dans les dénominateurs de k_1, k_2, k_3 : ils sont donc non-nuls lorsque k_1, k_2, k_3 sont définis. L'égalité $k_1 = k_2 = k_3$ est ainsi équivalente à la nullité de l'expression précitée. En divisant cette expression par $X_1 X_2 X_3 Y_1 Y_2 Y_3 Z_1 Z_2 Z_3$, on obtient la seconde condition formulée en termes de fractions.

10.2 Théorème de Pascal pour une conique

Exercice 10.2.1

On suppose dans l'exercice précédent qu'il existe des constantes α, β_1, β_2 tels que l'on ait

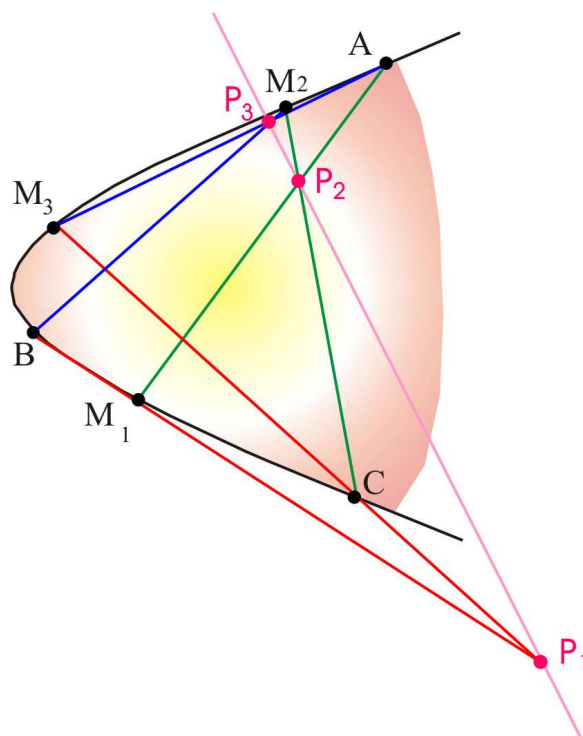
$$Z_i = -\frac{\alpha c^2 X_i Y_i}{b^2 \beta_1 X_i + a^2 \beta_2 Y_i}$$

pour $i = 1, 2, 3$. Alors, lorsque les coefficients k_1, k_2, k_3 sont définis, les points P_1, P_2, P_3 sont sur une même droite et on a

$$k_1 = \frac{b^2 \beta_1 X_1 + a^2 \beta_2 Y_1}{b^2 \beta_1 X_3} \frac{N}{D}$$

avec l'expression

$$\frac{N}{D} = \frac{b^2 \beta_1 X_2 X_3 + b^2 \beta_1 X_3 Y_2 + a^2 \beta_2 X_3 Y_2 - \alpha c^2 X_3 Y_2 + a^2 \beta_2 Y_2 Y_3}{b^2 \beta_1 X_1 X_2 + a^2 \beta_2 X_2 Y_1 + b^2 \beta_1 X_1 Y_2 - \alpha c^2 X_1 Y_2 + a^2 \beta_2 Y_1 Y_2}$$

**Solution:**

La condition

$$0 = X_2 X_3 Y_1 Y_3 Z_1 Z_2 - X_1 X_3 Y_2 Y_3 Z_1 Z_2 - X_2 X_3 Y_1 Y_2 Z_1 Z_3 \\ + X_1 X_2 Y_2 Y_3 Z_1 Z_3 + X_1 X_3 Y_1 Y_2 Z_2 Z_3 - X_1 X_2 Y_1 Y_3 Z_2 Z_3$$

est vérifiée. Le calcul donne alors la valeur indiquée pour k_1 .

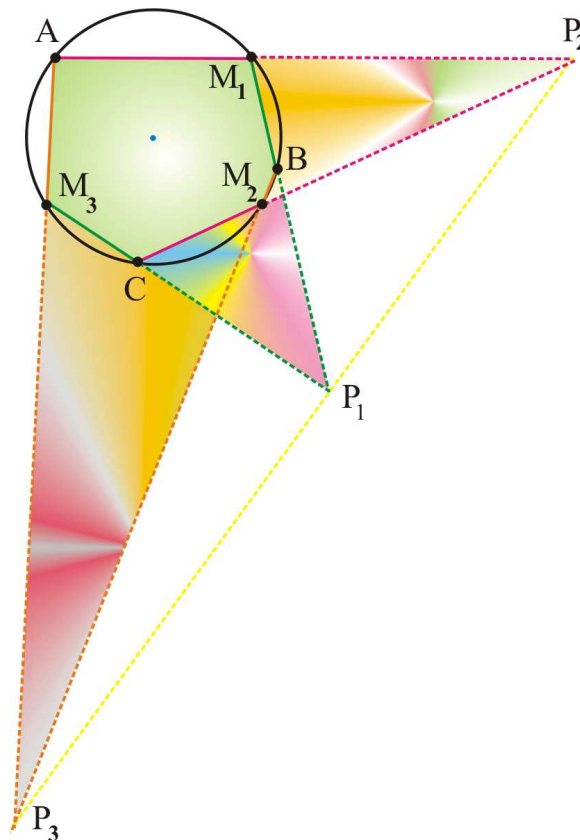
10.3 Le théorème de Pascal pour le cercle

Exercice 10.3.1

Sur le cercle circonscrit à un triangle ABC , on place des points M_1, M_2, M_3 de telle sorte que les six points A, B, C, M_1, M_2, M_3 soient distincts. Montrer que les côtés opposés se coupent deux à deux en ligne droite (on posera $P_1 = (BM_1) \cap (CM_3)$, $P_2 = (AM_1) \cap (CM_2)$, $P_3 = (AM_3) \cap (BM_2)$).

Exprimer le rapport de proportionnalité entre les vecteurs $\overrightarrow{P_1P_2}$ et $\overrightarrow{P_1P_3}$, les distances $P_1P_2^2$ et $P_1P_3^2$ en fonction des coordonnées barycentriques des points M_i , $i = 1, 2, 3$.

Nous détaillons volontairement le théorème de Pascal dans le cas du cercle.

**Solution:**

Dessin = $\{A, B, C, M_1, M_2, M_3\}$

Le repère barycentrique choisi est A, B, C .

Les points composés sont M_1, M_2, M_3 .

On a directement les descriptions des points composés:

$$\begin{aligned}
 M_1 &= \left\{ \frac{X_1 (b^2 X_1 + a^2 Y_1)}{b^2 X_1^2 + a^2 X_1 Y_1 + b^2 X_1 Y_1 - c^2 X_1 Y_1 + a^2 Y_1^2}, \right. \\
 &\quad \frac{Y_1 (b^2 X_1 + a^2 Y_1)}{b^2 X_1^2 + a^2 X_1 Y_1 + b^2 X_1 Y_1 - c^2 X_1 Y_1 + a^2 Y_1^2}, \\
 &\quad \left. - \frac{c^2 X_1 Y_1}{b^2 X_1^2 + a^2 X_1 Y_1 + b^2 X_1 Y_1 - c^2 X_1 Y_1 + a^2 Y_1^2} \right\} \\
 M_2 &= \left\{ \frac{X_2 (b^2 X_2 + a^2 Y_2)}{b^2 X_2^2 + a^2 X_2 Y_2 + b^2 X_2 Y_2 - c^2 X_2 Y_2 + a^2 Y_2^2}, \right. \\
 &\quad \frac{Y_2 (b^2 X_2 + a^2 Y_2)}{b^2 X_2^2 + a^2 X_2 Y_2 + b^2 X_2 Y_2 - c^2 X_2 Y_2 + a^2 Y_2^2}, \\
 &\quad \left. - \frac{c^2 X_2 Y_2}{b^2 X_2^2 + a^2 X_2 Y_2 + b^2 X_2 Y_2 - c^2 X_2 Y_2 + a^2 Y_2^2} \right\} \\
 M_3 &= \left\{ \frac{X_3 (b^2 X_3 + a^2 Y_3)}{b^2 X_3^2 + a^2 X_3 Y_3 + b^2 X_3 Y_3 - c^2 X_3 Y_3 + a^2 Y_3^2}, \right. \\
 &\quad \frac{Y_3 (b^2 X_3 + a^2 Y_3)}{b^2 X_3^2 + a^2 X_3 Y_3 + b^2 X_3 Y_3 - c^2 X_3 Y_3 + a^2 Y_3^2}, \\
 &\quad \left. - \frac{c^2 X_3 Y_3}{b^2 X_3^2 + a^2 X_3 Y_3 + b^2 X_3 Y_3 - c^2 X_3 Y_3 + a^2 Y_3^2} \right\}
 \end{aligned}$$

Détermination du point P_1 :

Soit P_1 le point $(BM_1) \cap (CM_3)$. Le point P_1 est composé.

Comme $P_1 \in (BM_1)$, on a, en choisissant les inconnues ν_1

$$\overrightarrow{OP_1} = \nu_1 \overrightarrow{OB} + (1 - \nu_1) \overrightarrow{OM_1}$$

On déduit:

$$\begin{aligned}
 \overrightarrow{OP_1} &= \frac{(1 - \nu_1) X_1 (b^2 X_1 + a^2 Y_1)}{b^2 X_1^2 + a^2 X_1 Y_1 + b^2 X_1 Y_1 - c^2 X_1 Y_1 + a^2 Y_1^2} \overrightarrow{OA} \\
 &+ \frac{b^2 \nu_1 X_1^2 + b^2 X_1 Y_1 + a^2 \nu_1 X_1 Y_1 - c^2 \nu_1 X_1 Y_1 + a^2 Y_1^2}{b^2 X_1^2 + a^2 X_1 Y_1 + b^2 X_1 Y_1 - c^2 X_1 Y_1 + a^2 Y_1^2} \overrightarrow{OB} \\
 &+ \frac{c^2 (1 - \nu_1) X_1 Y_1}{-b^2 X_1^2 - a^2 X_1 Y_1 - b^2 X_1 Y_1 + c^2 X_1 Y_1 - a^2 Y_1^2} \overrightarrow{OC}
 \end{aligned}$$

Comme $P_1 \in (CM_3)$, on a, en choisissant les inconnues μ_1

$$\overrightarrow{OP_1} = \mu_1 \overrightarrow{OC} + (1 - \mu_1) \overrightarrow{OM_3}$$

On déduit:

$$\begin{aligned}
 \overrightarrow{OP_1} &= \frac{(1 - \mu_1) X_3 (b^2 X_3 + a^2 Y_3)}{b^2 X_3^2 + a^2 X_3 Y_3 + b^2 X_3 Y_3 - c^2 X_3 Y_3 + a^2 Y_3^2} \overrightarrow{OA} \\
 &+ \frac{(1 - \mu_1) Y_3 (b^2 X_3 + a^2 Y_3)}{b^2 X_3^2 + a^2 X_3 Y_3 + b^2 X_3 Y_3 - c^2 X_3 Y_3 + a^2 Y_3^2} \overrightarrow{OB} \\
 &+ \frac{b^2 \mu_1 X_3^2 - c^2 X_3 Y_3 + a^2 \mu_1 X_3 Y_3 + b^2 \mu_1 X_3 Y_3 + a^2 \mu_1 Y_3^2}{b^2 X_3^2 + a^2 X_3 Y_3 + b^2 X_3 Y_3 - c^2 X_3 Y_3 + a^2 Y_3^2} \overrightarrow{OC}
 \end{aligned}$$

La résolution du système linéaire d'inconnues ν_1, μ_1 donne

$$\nu_1 = \frac{(b^2 X_1 + a^2 Y_1) (-X_3 Y_1 + X_1 Y_3)}{X_1 (b^2 X_1 X_3 + b^2 X_1 Y_3 - c^2 Y_1 X_3 + a^2 Y_1 X_3 + a^2 Y_1 Y_3)}$$

$$\mu_1 = \frac{b^2 c^2 X_3 (-X_3 Y_1 + X_1 Y_3)}{(b^2 X_3 + a^2 Y_3) (b^2 X_1 X_3 + b^2 X_1 Y_3 - c^2 Y_1 X_3 + a^2 Y_1 X_3 + a^2 Y_1 Y_3)}$$

On déduit que:

$$P_1 = \left\{ \frac{X_3 (b^2 X_1 + a^2 Y_1)}{b^2 X_1 X_3 + a^2 X_3 Y_1 - c^2 X_3 Y_1 + b^2 X_1 Y_3 + a^2 Y_1 Y_3}, \right. \\ \left. \frac{(b^2 X_1 + a^2 Y_1) Y_3}{b^2 X_1 X_3 + a^2 X_3 Y_1 - c^2 X_3 Y_1 + b^2 X_1 Y_3 + a^2 Y_1 Y_3}, \right. \\ \left. \frac{-c^2 X_3 Y_1}{b^2 X_1 X_3 + a^2 X_3 Y_1 - c^2 X_3 Y_1 + b^2 X_1 Y_3 + a^2 Y_1 Y_3} \right\}$$

De même

$$P_2 = \left\{ \frac{X_2 (b^2 X_1 + a^2 Y_1)}{b^2 X_1 X_2 + a^2 X_2 Y_1 + b^2 X_1 Y_2 - c^2 X_1 Y_2 + a^2 Y_1 Y_2}, \right. \\ \left. \frac{(b^2 X_1 + a^2 Y_1) Y_2}{b^2 X_1 X_2 + a^2 X_2 Y_1 + b^2 X_1 Y_2 - c^2 X_1 Y_2 + a^2 Y_1 Y_2}, \right. \\ \left. \frac{-c^2 X_1 Y_2}{b^2 X_1 X_2 + a^2 X_2 Y_1 + b^2 X_1 Y_2 - c^2 X_1 Y_2 + a^2 Y_1 Y_2} \right\}$$

De même

$$P_3 = \left\{ \frac{X_3 (b^2 X_2 + a^2 Y_2)}{b^2 X_2 X_3 + a^2 X_3 Y_2 + b^2 X_3 Y_2 - c^2 X_3 Y_2 + a^2 Y_2 Y_3}, \right. \\ \left. \frac{Y_2 (b^2 X_3 + a^2 Y_3)}{b^2 X_2 X_3 + a^2 X_3 Y_2 + b^2 X_3 Y_2 - c^2 X_3 Y_2 + a^2 Y_2 Y_3}, \right. \\ \left. \frac{-c^2 X_3 Y_2}{b^2 X_2 X_3 + a^2 X_3 Y_2 + b^2 X_3 Y_2 - c^2 X_3 Y_2 + a^2 Y_2 Y_3} \right\}$$

On a directement, par l'exercice précédent

$$\overrightarrow{P_1 P_2} = \frac{(b^2 X_1 + a^2 Y_1) (b^2 X_2 X_3 + a^2 X_3 Y_2 + b^2 X_3 Y_2 - c^2 X_3 Y_2 + a^2 Y_2 Y_3)}{b^2 X_3 (b^2 X_1 X_2 + a^2 X_2 Y_1 + b^2 X_1 Y_2 - c^2 X_1 Y_2 + a^2 Y_1 Y_2)} \overrightarrow{P_1 P_3}$$

La distance $P_1 P_2^2$ est égale à

$$P_1 P_2^2 = \frac{c^2 (b^2 X_1 + a^2 Y_1)^2 n^*}{d^*}$$

avec

$$\begin{aligned}
n^* = & b^2 c^2 X_2^2 X_3^2 Y_1^2 - a^2 b^2 X_1 X_2 X_3^2 Y_1 Y_2 + b^4 X_1 X_2 X_3^2 Y_1 Y_2 \\
& - b^2 c^2 X_1 X_2 X_3^2 Y_1 Y_2 - a^4 X_2 X_3^2 Y_1^2 Y_2 + a^2 b^2 X_2 X_3^2 Y_1^2 Y_2 \\
& + 2 a^2 c^2 X_2 X_3^2 Y_1^2 Y_2 + b^2 c^2 X_2 X_3^2 Y_1^2 Y_2 - c^4 X_2 X_3^2 Y_1^2 Y_2 \\
& + a^2 b^2 X_1^2 X_3^2 Y_2^2 + a^4 X_1 X_3^2 Y_1 Y_2^2 + b^4 X_1 X_3^2 Y_1 Y_2^2 \\
& - 2 a^2 c^2 X_1 X_3^2 Y_1 Y_2^2 - 2 b^2 c^2 X_1 X_3^2 Y_1 Y_2^2 + c^4 X_1 X_3^2 Y_1 Y_2^2 \\
& + a^2 b^2 X_3^2 Y_1^2 Y_2^2 + a^2 b^2 X_1 X_2^2 X_3 Y_1 Y_3 - b^4 X_1 X_2^2 X_3 Y_1 Y_3 \\
& - b^2 c^2 X_1 X_2^2 X_3 Y_1 Y_3 + a^4 X_2^2 X_3 Y_1^2 Y_3 - a^2 b^2 X_2^2 X_3 Y_1^2 Y_3 \\
& - a^2 c^2 X_2^2 X_3 Y_1^2 Y_3 - a^2 b^2 X_1^2 X_2 X_3 Y_2 Y_3 - b^4 X_1^2 X_2 X_3 Y_2 Y_3 \\
& + b^2 c^2 X_1^2 X_2 X_3 Y_2 Y_3 - a^4 X_1 X_2 X_3 Y_1 Y_2 Y_3 - 2 a^2 b^2 X_1 X_2 X_3 Y_1 Y_2 Y_3 \\
& - b^4 X_1 X_2 X_3 Y_1 Y_2 Y_3 + c^4 X_1 X_2 X_3 Y_1 Y_2 Y_3 - a^4 X_2 X_3 Y_1^2 Y_2 Y_3 \\
& - a^2 b^2 X_2 X_3 Y_1^2 Y_2 Y_3 + a^2 c^2 X_2 X_3 Y_1^2 Y_2 Y_3 + a^2 b^2 X_1^2 X_3 Y_2^2 Y_3 \\
& - b^4 X_1^2 X_3 Y_2^2 Y_3 + a^2 c^2 X_1^2 X_3 Y_2^2 Y_3 + 2 b^2 c^2 X_1^2 X_3 Y_2^2 Y_3 \\
& - c^4 X_1^2 X_3 Y_2^2 Y_3 + a^4 X_1 X_3 Y_1 Y_2^2 Y_3 - a^2 b^2 X_1 X_3 Y_1 Y_2^2 Y_3 \\
& - a^2 c^2 X_1 X_3 Y_1 Y_2^2 Y_3 + b^4 X_1^2 X_2^2 Y_3^2 + 2 a^2 b^2 X_1 X_2^2 Y_1 Y_3^2 \\
& + a^4 X_2^2 Y_1^2 Y_3^2 - a^2 b^2 X_1^2 X_2 Y_2 Y_3^2 + b^4 X_1^2 X_2 Y_2 Y_3^2 \\
& - b^2 c^2 X_1^2 X_2 Y_2 Y_3^2 - a^4 X_1 X_2 Y_1 Y_2 Y_3^2 + a^2 b^2 X_1 X_2 Y_1 Y_2 Y_3^2 \\
& - a^2 c^2 X_1 X_2 Y_1 Y_2 Y_3^2 + a^2 c^2 X_1^2 Y_2^2 Y_3^2
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
d^* = & (b^2 X_1 X_2 + a^2 X_2 Y_1 + b^2 X_1 Y_2 - c^2 X_1 Y_2 + a^2 Y_1 Y_2)^2 \\
& \cdot (b^2 X_1 X_3 + a^2 X_3 Y_1 - c^2 X_3 Y_1 + b^2 X_1 Y_3 + a^2 Y_1 Y_3)^2
\end{aligned}$$

La distance $P_1 P_3^2$ est égale à

$$P_1 P_3^2 = \frac{b^4 c^2 X_3^2 n^*}{d_{13}^*}$$

avec

$$\begin{aligned}
d_{13}^* = & (b^2 X_1 X_3 + a^2 X_3 Y_1 - c^2 X_3 Y_1 + b^2 X_1 Y_3 + a^2 Y_1 Y_3)^2 \\
& \cdot (b^2 X_2 X_3 + a^2 X_3 Y_2 + b^2 X_3 Y_2 - c^2 X_3 Y_2 + a^2 Y_2 Y_3)^2
\end{aligned}$$

CHAPITRE

11

Introduction aux coniques

11 Introduction aux coniques

Ce chapitre ne constitue qu'une introduction aux coniques, de nombreux thèmes classiques propres à ces courbes n'y sont pas développés.

11.1 Equation générale d'une conique passant par A, B, C **Exercice 11.1.1**

Soient ABC un triangle, β_1, β_2 deux réels non-nuls et $\mathfrak{F}$ l'ensemble des points M de coordonnées barycentriques $\{x, y, z\}$ satisfaisant l'équation

$$a^2 \beta_2 y z + c^2 x y + b^2 \beta_1 x z = 0$$

On se propose de démontrer que $\mathfrak{F}$ est l'équation générale d'une conique non-dégénérée passant par A, B, C .

1. Montrer que $A \in \mathfrak{F}$, $B \in \mathfrak{F}$, $C \in \mathfrak{F}$ et que $z = \frac{-c^2 x y}{b^2 \beta_1 x + a^2 \beta_2 y}$ lorsque $b^2 \beta_1 x + a^2 \beta_2 y \neq 0$ ou $y = \frac{-b^2 \beta_1 x z}{c^2 x + a^2 \beta_2 z}$ lorsque $c^2 x + a^2 \beta_2 z \neq 0$.
2. En choisissant le repère cartésien $\{A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\}$, montrer que l'ensemble $\mathfrak{F}$ est une conique lorsque x et y varient. Discuter la forme de la conique selon les valeurs de β_1, β_2 . Discuter le cas particulier $\beta_1 = \beta_2$.
3. Réciproquement, montrer qu'une conique non dégénérée passant par A, B, C a une équation (en coordonnées barycentriques) de la forme

$$a^2 \beta_2 y z + c^2 x y + b^2 \beta_1 x z = 0$$

avec $\beta_1 \neq 0, \beta_2 \neq 0$ (on précisera le passage de l'équation cartésienne à l'équation barycentrique).

Solution:

Nous adoptons des lettres minuscules pour les coordonnées barycentriques et des lettres majuscules pour les coordonnées cartésiennes.

On vérifie immédiatement que A, B, C appartiennent à $\mathfrak{F}$. En résolvant l'équation définissant $\mathfrak{F}$, on

obtient $z = \frac{-c^2 xy}{b^2 \beta_1 x + a^2 \beta_2 y}$ ou alors $y = \frac{-b^2 \beta_1 x z}{c^2 x + a^2 \beta_2 z}$.
 Les coordonnées barycentriques normalisées de M sont

$$M = \left\{ \frac{x (b^2 \beta_1 x + a^2 \beta_2 y)}{b^2 \beta_1 x^2 + b^2 \beta_1 x y + a^2 \beta_2 x y - c^2 x y + a^2 \beta_2 y^2}, \right. \\ \frac{y (b^2 \beta_1 x + a^2 \beta_2 y)}{b^2 \beta_1 x^2 + b^2 \beta_1 x y + a^2 \beta_2 x y - c^2 x y + a^2 \beta_2 y^2}, \\ \left. \frac{c^2 x y}{-b^2 \beta_1 x^2 - b^2 \beta_1 x y - a^2 \beta_2 x y + c^2 x y - a^2 \beta_2 y^2} \right\}$$

Il résulte que

$$\overrightarrow{AM} = \frac{y (b^2 \beta_1 x + a^2 \beta_2 y)}{b^2 \beta_1 x^2 + b^2 \beta_1 x y + a^2 \beta_2 x y - c^2 x y + a^2 \beta_2 y^2} \overrightarrow{AB} \\ + \frac{c^2 x y}{-b^2 \beta_1 x^2 - b^2 \beta_1 x y - a^2 \beta_2 x y + c^2 x y - a^2 \beta_2 y^2} \overrightarrow{AC}$$

donc les coordonnées cartésiennes X, Y de M dans le repère cartésien $\{A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\}$ sont, sous forme paramétrique

$$M = \left\{ \frac{t (b^2 \beta_1 + a^2 \beta_2 t)}{b^2 \beta_1 + b^2 \beta_1 t + a^2 \beta_2 t - c^2 t + a^2 \beta_2 t^2}, \frac{c^2 t}{-b^2 \beta_1 - b^2 \beta_1 t - a^2 \beta_2 t + c^2 t - a^2 \beta_2 t^2} \right\}$$

en ayant posé $y = t x$ afin d'obtenir t pour paramètre. L'obtention de l'équation cartésienne de l'ensemble des points M s'obtient maintenant en éliminant le paramètre t . On a

$$\frac{X}{Y} = \frac{b^2 \beta_1 + a^2 \beta_2 t}{-c^2}$$

ce qui fournit explicitement

$$t = \frac{-c^2 X - b^2 \beta_1 Y}{a^2 \beta_2 Y}$$

En reportant cette valeur de t dans X , on obtient

$$X = \frac{X (c^2 X + b^2 \beta_1 Y)}{c^2 X^2 + b^2 \beta_1 X Y - a^2 \beta_2 X Y + c^2 X Y + b^2 \beta_1 Y^2}$$

Il suit, lorsque

$$c^2 X^2 + b^2 \beta_1 X Y - a^2 \beta_2 X Y + c^2 X Y + b^2 \beta_1 Y^2 \neq 0$$

que

$$-c^2 X + c^2 X^2 - b^2 \beta_1 Y + b^2 \beta_1 X Y - a^2 \beta_2 X Y + c^2 X Y + b^2 \beta_1 Y^2 = 0$$

équation d'une conique dont la forme est déterminée par la forme quadratique

$$Q(X, Y) = c^2 X^2 + (b^2 \beta_1 - a^2 \beta_2 + c^2) X Y + b^2 \beta_1 Y^2$$

Le discriminant de cette forme a pour valeur

$$\Delta = b^4 \beta_1^2 - 2 a^2 b^2 \beta_1 \beta_2 + a^4 \beta_2^2 - 2 b^2 \beta_1 c^2 - 2 a^2 \beta_2 c^2 + c^4$$

Pour $\Delta < 0$, la conique est une ellipse, pour $\Delta > 0$, la conique est une hyperbole et pour $\Delta = 0$, la conique est une parabole. L'expression Δ est de signe quelconque, selon les valeurs de β_1 et de β_2 .

Lorsque $\beta_1 = \beta_2$, le discriminant Δ devient

$$\Delta = a^4 \beta_1^2 - 2 a^2 b^2 \beta_1^2 + b^4 \beta_1^2 - 2 a^2 \beta_1 c^2 - 2 b^2 \beta_1 c^2 + c^4$$

Ce polynôme de degré deux en la variable β_1 a pour racines

$$\beta_1 = \frac{c^2}{(a+b)^2} \quad \text{ou} \quad \beta_1 = \frac{c^2}{(a-b)^2}$$

lorsque $a \neq b$. La conique $\mathfrak{F}$ peut donc être de nature quelconque selon le positionnement de β_1 par rapport à ces deux valeurs exceptionnelles. Lorsque $a = b$, on obtient $\Delta = -4 a^2 \beta_1 c^2 + c^4$, donc $\beta_1 = \frac{c^2}{4a^2}$ fournit une parabole.

Réciproquement, pour une conique ayant une équation cartésienne (dans le repère cartésien $\{A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\}$) de la forme

$$A_0 X^2 + B_0 X Y + C_0 Y^2 + D_0 X + E_0 Y + F_0 = 0$$

la condition $A \in \mathfrak{F}$ implique $F_0 = 0$, la condition $B \in \mathfrak{F}$ implique $A_0 + D_0 = 0$, la condition $C \in \mathfrak{F}$ implique $C_0 + E_0 = 0$. Ainsi, l'équation cartésienne devient

$$A_0 X^2 + B_0 X Y + C_0 Y^2 - A_0 X - C_0 Y = 0$$

Notons que l'éventualité $A_0 = 0$ est exclue puisqu'elle implique que les points de la droite (AB) appartiennent à la conique, supposée non-dégénérée (de même, $C \neq 0$). On peut donc supposer que $A_0 = c^2$, quitte à multiplier l'équation cartésienne par une constante convenable.

Comparons alors cette équation cartésienne avec l'équation cartésienne initiale

$$-c^2 X + c^2 X^2 - b^2 \beta_1 Y + b^2 \beta_1 X Y - a^2 \beta_2 X Y + c^2 X Y + b^2 \beta_1 Y^2 = 0$$

En identifiant les coefficients, on obtient le système

$$\begin{cases} -c^2 + A_0 = 0 \\ -b^2 \beta_1 + C_0 = 0 \\ -B_0 + b^2 \beta_1 - a^2 \beta_2 + c^2 = 0 \end{cases}$$

d'où suit

$$A_0 = c^2 \quad \beta_1 = \frac{C_0}{b^2} \quad \beta_2 = \frac{-B_0 + c^2 + C_0}{a^2}$$

Ainsi, $\beta_1 \neq 0$ et

$$X = \frac{X (c^2 X + b^2 \beta_1 Y)}{c^2 X^2 + b^2 \beta_1 X Y - a^2 \beta_2 X Y + c^2 X Y + b^2 \beta_1 Y^2}$$

lorsque

$$c^2 X^2 + b^2 \beta_1 X Y - a^2 \beta_2 X Y + c^2 X Y + b^2 \beta_1 Y^2 \neq 0$$

Les coordonnées barycentriques d'un point M de la conique passant par A, B, C satisfont ainsi

$$a^2 \beta_2 y z + c^2 x y + b^2 \beta_1 x z = 0$$

Il résulte que $\beta_2 \neq 0$ sinon la conique est dégénérée.

11.2 Tangente à

une conique

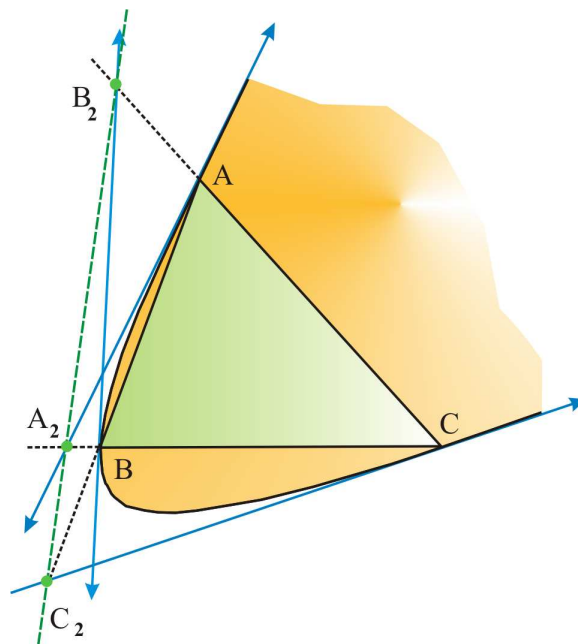
Exercice 11.2.1

Soit un triangle ABC inscrit dans une conique $\mathfrak{F}$ (non- dégénérée) et

$$a^2 \beta_2 Y Z + c^2 X Y + b^2 \beta_1 X Z = 0$$

l'équation de cette conique en coordonnées barycentriques.

1. Déterminer les coordonnées barycentriques d'un point situé sur la tangente à la conique en un point D de coordonnées barycentriques $\{X, Y, \frac{-c^2 XY}{b^2 \beta_1 X + a^2 \beta_2 Y}\}$ et en un point D_1 de coordonnées barycentriques $\{X, \frac{-b^2 \beta_1 X Z}{c^2 X + a^2 \beta_2 Z}, Z\}$
2. Montrer que les tangentes à la conique issues des points A, B, C coupent respectivement les côtés (BC) , (AC) , (AB) du triangle en des points A_2, B_2, C_2 colinéaires. Calculer la distance $A_2 B_2^2$.



Solution:

1). **Dessin** = $\{A, B, C, D, D_1\}$

Le repère barycentrique choisi est A, B, C .

Les points composés sont D, D_1 .

On déduit les coordonnées barycentriques des points composés:

$$D = \left\{ \frac{X (b^2 \beta_1 X + a^2 \beta_2 Y)}{b^2 \beta_1 X^2 + b^2 \beta_1 X Y + a^2 \beta_2 X Y - c^2 X Y + a^2 \beta_2 Y^2}, \right. \\ \frac{Y (b^2 \beta_1 X + a^2 \beta_2 Y)}{b^2 \beta_1 X^2 + b^2 \beta_1 X Y + a^2 \beta_2 X Y - c^2 X Y + a^2 \beta_2 Y^2}, \\ \left. \frac{c^2 X Y}{-b^2 \beta_1 X^2 - b^2 \beta_1 X Y - a^2 \beta_2 X Y + c^2 X Y - a^2 \beta_2 Y^2} \right\} \\ D_1 = \left\{ \frac{X (c^2 X + a^2 \beta_2 Z)}{c^2 X^2 - b^2 \beta_1 X Z + a^2 \beta_2 X Z + c^2 X Z + a^2 \beta_2 Z^2}, \right. \\ \frac{b^2 \beta_1 X Z}{-c^2 X^2 + b^2 \beta_1 X Z - a^2 \beta_2 X Z - c^2 X Z - a^2 \beta_2 Z^2}, \\ \left. \frac{Z (c^2 X + a^2 \beta_2 Z)}{c^2 X^2 - b^2 \beta_1 X Z + a^2 \beta_2 X Z + c^2 X Z + a^2 \beta_2 Z^2} \right\}$$

Désignons par d_1, d_2, d_3 les coordonnées barycentriques intervenant dans la description du point D (on a donc $d_1 + d_2 + d_3 = 1$). Par définition, on a l'égalité vectorielle

$$\overrightarrow{OM} = d_1 \overrightarrow{OA} + d_2 \overrightarrow{OB} + d_3 \overrightarrow{OC}$$

et, en différentiant

$$\begin{aligned} d\overrightarrow{M} &= \left(\frac{\partial d_1}{\partial X} dX + \frac{\partial d_1}{\partial Y} dY + \frac{\partial d_1}{\partial Z} dZ \right) \overrightarrow{OA} \\ &+ \left(\frac{\partial d_2}{\partial X} dX + \frac{\partial d_2}{\partial Y} dY + \frac{\partial d_2}{\partial Z} dZ \right) \overrightarrow{OB} \\ &+ \left(\frac{\partial d_3}{\partial X} dX + \frac{\partial d_3}{\partial Y} dY + \frac{\partial d_3}{\partial Z} dZ \right) \overrightarrow{OC} \end{aligned}$$

Le lecteur vérifiera par calculs que $d\overrightarrow{M}$ est colinéaire au vecteur

$$\begin{aligned} \vec{u} &= (b^4 \beta_1^2 X^2 - b^2 \beta_1 c^2 X^2 + 2 a^2 b^2 \beta_1 \beta_2 X Y + a^4 \beta_2^2 Y^2) \overrightarrow{OA} \\ &+ (-b^4 \beta_1^2 X^2 - 2 a^2 b^2 \beta_1 \beta_2 X Y - a^4 \beta_2^2 Y^2 + a^2 \beta_2 c^2 Y^2) \overrightarrow{OB} \\ &+ (b^2 \beta_1 c^2 X^2 - a^2 \beta_2 c^2 Y^2) \overrightarrow{OC} \end{aligned}$$

Le point M défini par $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OD} + k \vec{u}$ (avec k égal au dénominateur intervenant dans les coordonnées barycentriques de D) appartient à la tangente en D à la conique. On obtient ainsi

$$M = \left\{ \frac{b^2 \beta_1 X^2 + b^4 \beta_1^2 X^2 - b^2 \beta_1 c^2 X^2 + a^2 \beta_2 X Y + 2 a^2 b^2 \beta_1 \beta_2 X Y + a^4 \beta_2^2 Y^2}{b^2 \beta_1 X^2 + b^2 \beta_1 X Y + a^2 \beta_2 X Y - c^2 X Y + a^2 \beta_2 Y^2}, \right. \\ \frac{-b^4 \beta_1^2 X^2 + b^2 \beta_1 X Y - 2 a^2 b^2 \beta_1 \beta_2 X Y + a^2 \beta_2 Y^2 - a^4 \beta_2^2 Y^2 + a^2 \beta_2 c^2 Y^2}{b^2 \beta_1 X^2 + b^2 \beta_1 X Y + a^2 \beta_2 X Y - c^2 X Y + a^2 \beta_2 Y^2}, \\ \left. \frac{c^2 (b^2 \beta_1 X^2 - X Y - a^2 \beta_2 Y^2)}{b^2 \beta_1 X^2 + b^2 \beta_1 X Y + a^2 \beta_2 X Y - c^2 X Y + a^2 \beta_2 Y^2} \right\}$$

Le raisonnement est identique pour le point M_1 . On obtient ici

$$\begin{aligned} \vec{u} &= (-b^2 \beta_1 c^2 X^2 + c^4 X^2 + 2 a^2 \beta_2 c^2 X Z + a^4 \beta_2^2 Z^2) \overrightarrow{OA} \\ &+ (b^2 \beta_1 c^2 X^2 - a^2 b^2 \beta_1 \beta_2 Z^2) \overrightarrow{OB} \\ &+ (-c^4 X^2 - 2 a^2 \beta_2 c^2 X Z + a^2 b^2 \beta_1 \beta_2 Z^2 - a^4 \beta_2^2 Z^2) \overrightarrow{OC} \end{aligned}$$

Le point M_1 défini par $\overrightarrow{OM_1} = \overrightarrow{OD_1} - k_1 \vec{u}$ (avec k_1 égal au dénominateur intervenant dans les coordonnées barycentriques de D_1) appartient à la tangente en D_1 à la conique (tout point défini par $\overrightarrow{OM_1} = \overrightarrow{OD_1} + \lambda \vec{u}$ convient également, lorsque $\lambda \neq 0$). On obtient ainsi

$$M_1 = \left\{ \frac{c^2 X^2 + b^2 \beta_1 c^2 X^2 - c^4 X^2 + a^2 \beta_2 X Z - 2 a^2 \beta_2 c^2 X Z - a^4 \beta_2^2 Z^2}{c^2 X^2 - b^2 \beta_1 X Z + a^2 \beta_2 X Z + c^2 X Z + a^2 \beta_2 Z^2}, \right. \\ \left. \frac{b^2 \beta_1 (c^2 X^2 + X Z - a^2 \beta_2 Z^2)}{-c^2 X^2 + b^2 \beta_1 X Z - a^2 \beta_2 X Z - c^2 X Z - a^2 \beta_2 Z^2}, \right. \\ \left. \frac{c^4 X^2 + c^2 X Z + 2 a^2 \beta_2 c^2 X Z + a^2 \beta_2 Z^2 - a^2 b^2 \beta_1 \beta_2 Z^2 + a^4 \beta_2^2 Z^2}{c^2 X^2 - b^2 \beta_1 X Z + a^2 \beta_2 X Z + c^2 X Z + a^2 \beta_2 Z^2} \right\}$$

2). Notons A_1 (resp. B_1, C_1) un point situé sur la tangente à la conique, issue de A (resp. B, C). Nous appliquons les constructions de la première question. Les coordonnées barycentriques de A_1 (resp. B_1) sont obtenues en choisissant $x = 1, y = 0$ (resp. $x = 0, y = 1$) dans la formule des coordonnées barycentriques de M et le point C_1 est obtenu en choisissant $x = 0, z = 1$ dans la formule des coordonnées barycentriques de M_1 .

Dessin = $\{A, A_1, B, B_1, C, C_1\}$

Le repère barycentrique choisi est A, B, C .

Les points composés sont A_1, B_1, C_1 .

Les coordonnées barycentriques des points composés sont:

$$A_1 = \{1 + b^2 \beta_1 - c^2, -b^2 \beta_1, c^2\} \\ B_1 = \{a^2 \beta_2, 1 - a^2 \beta_2 + c^2, -c^2\} \\ C_1 = \{-a^2 \beta_2, b^2 \beta_1, 1 - b^2 \beta_1 + a^2 \beta_2\}$$

Dessin = $\text{Dessin} \cup \{A_2\} = \{A, A_1, A_2, B, B_1, C, C_1\}$

Détermination du point A_2 :

Soit A_2 le point $(AA_1) \cap (BC)$. Le point A_2 est composé.

Comme $A_2 \in (AA_1)$, on a, en choisissant l'inconnue ν_1

$$\overrightarrow{OA_2} = \nu_1 \overrightarrow{OA} + (1 - \nu_1) \overrightarrow{OA_1}$$

On déduit:

$$\overrightarrow{OA_2} = a(1) \overrightarrow{OA} + a(2) \overrightarrow{OB} + a(3) \overrightarrow{OC}$$

avec

$$a(1) = 1 + b^2 \beta_1 - c^2 - b^2 \beta_1 \nu_1 + c^2 \nu_1 \\ a(2) = b^2 \beta_1 (-1 + \nu_1) \\ a(3) = c^2 (1 - \nu_1)$$

Comme $A_2 \in (BC)$, on a, en choisissant l'inconnue μ_1

$$\overrightarrow{OA_2} = \mu_1 \overrightarrow{OB} + (1 - \mu_1) \overrightarrow{OC}$$

La résolution du système linéaire d'inconnues ν_1, μ_1 donne

$$\mu_1 = \frac{b^2 \beta_1}{b^2 \beta_1 - c^2} \quad \nu_1 = \frac{1 + b^2 \beta_1 - c^2}{b^2 \beta_1 - c^2}$$

On déduit que:

$$A_2 = \{0, \frac{b^2 \beta_1}{b^2 \beta_1 - c^2}, \frac{c^2}{-b^2 \beta_1 + c^2}\}$$

Dessin = Dessin $\cup \{B_2\} = \{A, A_1, A_2, B, B_1, B_2, C, C_1\}$

Détermination du point B_2 :

Soit B_2 le point $(BB_1) \cap (AC)$. Le point B_2 est composé.

Comme $B_2 \in (BB_1)$, on a, en choisissant l'inconnue ν_1

$$\overrightarrow{OB_2} = \nu_1 \overrightarrow{OB} + (1 - \nu_1) \overrightarrow{OB_1}$$

On déduit:

$$\overrightarrow{OB_2} = c(1) \overrightarrow{OA} + c(2) \overrightarrow{OB} + c(3) \overrightarrow{OC}$$

avec

$$\begin{aligned} c(1) &= a^2 \beta_2 (1 - \nu_1) \\ c(2) &= 1 - a^2 \beta_2 + c^2 + a^2 \beta_2 \nu_1 - c^2 \nu_1 \\ c(3) &= c^2 (-1 + \nu_1) \end{aligned}$$

Comme $B_2 \in (AC)$, on a, en choisissant l'inconnue μ_1

$$\overrightarrow{OB_2} = \mu_1 \overrightarrow{OA} + (1 - \mu_1) \overrightarrow{OC}$$

La résolution du système linéaire d'inconnues ν_1, μ_1 donne

$$\mu_1 = \frac{a^2 \beta_2}{a^2 \beta_2 - c^2} \quad \nu_1 = \frac{1 - a^2 \beta_2 + c^2}{-a^2 \beta_2 + c^2}$$

On déduit que:

$$B_2 = \left\{ \frac{a^2 \beta_2}{a^2 \beta_2 - c^2}, 0, \frac{c^2}{-a^2 \beta_2 + c^2} \right\}$$

Dessin = Dessin $\cup \{C_2\} = \{A, A_1, A_2, B, B_1, B_2, C, C_1, C_2\}$

Détermination du point C_2 :

Soit C_2 le point $(CC_1) \cap (AB)$. Le point C_2 est composé.

Comme $C_2 \in (CC_1)$, on a, en choisissant l'inconnue ν_1

$$\overrightarrow{OC_2} = \nu_1 \overrightarrow{OC} + (1 - \nu_1) \overrightarrow{OC_1}$$

On déduit:

$$\overrightarrow{OC_2} = e(1) \overrightarrow{OA} + e(2) \overrightarrow{OB} + e(3) \overrightarrow{OC}$$

avec

$$\begin{aligned} e(1) &= a^2 \beta_2 (-1 + \nu_1) \\ e(2) &= b^2 \beta_1 (1 - \nu_1) \\ e(3) &= 1 - b^2 \beta_1 + a^2 \beta_2 + b^2 \beta_1 \nu_1 - a^2 \beta_2 \nu_1 \end{aligned}$$

Comme $C_2 \in (AB)$, on a, en choisissant l'inconnue μ_1

$$\overrightarrow{OC_2} = \mu_1 \overrightarrow{OA} + (1 - \mu_1) \overrightarrow{OB}$$

La résolution du système linéaire d'inconnues ν_1, μ_1 donne

$$\mu_1 = \frac{a^2 \beta_2}{-b^2 \beta_1 + a^2 \beta_2} \quad \nu_1 = \frac{1 - b^2 \beta_1 + a^2 \beta_2}{-b^2 \beta_1 + a^2 \beta_2}$$

On déduit que:

$$C_2 = \left\{ \frac{a^2 \beta_2}{-b^2 \beta_1 + a^2 \beta_2}, \frac{b^2 \beta_1}{b^2 \beta_1 - a^2 \beta_2}, 0 \right\}$$

Calculons le vecteur $\overrightarrow{A_2 B_2}$. On a:

$$\overrightarrow{A_2 B_2} = g(1) \overrightarrow{OA} + g(2) \overrightarrow{OB} + g(3) \overrightarrow{OC}$$

avec

$$\begin{aligned} g(1) &= \frac{a^2 \beta_2}{a^2 \beta_2 - c^2} \\ g(2) &= \frac{b^2 \beta_1}{b^2 \beta_1 - c^2} \\ g(3) &= \frac{(b^2 \beta_1 - a^2 \beta_2) c^2}{(b^2 \beta_1 - c^2) (-a^2 \beta_2 + c^2)} \end{aligned}$$

Calculons le vecteur $\overrightarrow{A_2 C_2}$. On a:

$$\overrightarrow{A_2 C_2} = h(1) \overrightarrow{OA} + h(2) \overrightarrow{OB} + h(3) \overrightarrow{OC}$$

avec

$$\begin{aligned} h(1) &= \frac{a^2 \beta_2}{-b^2 \beta_1 + a^2 \beta_2} \\ h(2) &= \frac{b^2 \beta_1 (a^2 \beta_2 - c^2)}{(b^2 \beta_1 - a^2 \beta_2) (b^2 \beta_1 - c^2)} \\ h(3) &= \frac{c^2}{b^2 \beta_1 - c^2} \end{aligned}$$

On a ainsi

$$\overrightarrow{A_2 B_2} = \frac{-b^2 \beta_1 + a^2 \beta_2}{a^2 \beta_2 - c^2} \overrightarrow{A_2 C_2}$$

La distance $A_2 B_2^2$ est égale à

$$A_2 B_2^2 = \frac{a^2 AC^2 \beta_2 (b^2 \beta_1 - a^2 \beta_2) c^2}{(b^2 \beta_1 - c^2) (-a^2 \beta_2 + c^2)^2} + \frac{b^2 BC^2 \beta_1 (b^2 \beta_1 - a^2 \beta_2) c^2}{(b^2 \beta_1 - c^2)^2 (-a^2 \beta_2 + c^2)} - \frac{a^2 AB^2 b^2 \beta_1 \beta_2}{(b^2 \beta_1 - c^2) (-a^2 \beta_2 + c^2)}$$

soit

$$A_2 B_2^2 = \frac{a^2 b^2 c^2 \text{Num}(A_2 B_2^2)}{(b^2 \beta_1 - c^2)^2 (a^2 \beta_2 - c^2)^2}$$

avec

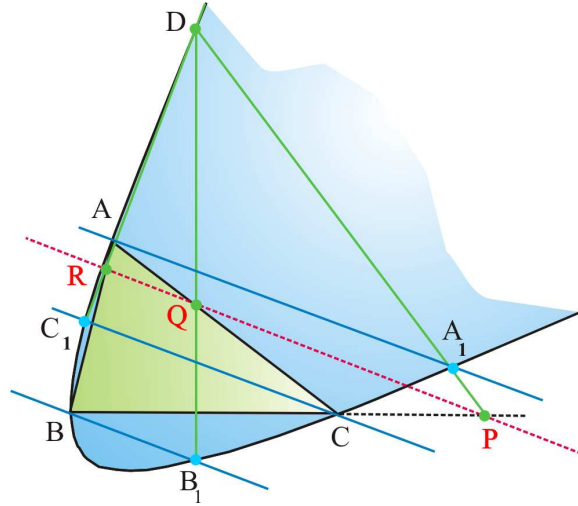
$$\begin{aligned} \text{Num}(A_2 B_2^2) &= -a^2 b^2 \beta_1^2 \beta_2 + b^4 \beta_1^2 \beta_2 + a^4 \beta_1 \beta_2^2 - a^2 b^2 \beta_1 \beta_2^2 + a^2 b^2 \beta_1^2 \beta_2^2 + b^2 \beta_1^2 c^2 \\ &\quad - a^2 \beta_1 \beta_2 c^2 - b^2 \beta_1 \beta_2 c^2 - b^2 \beta_1^2 \beta_2 c^2 + a^2 \beta_2^2 c^2 - a^2 \beta_1 \beta_2^2 c^2 + \beta_1 \beta_2 c^4 \end{aligned}$$

11.3 Le théorème d'Aubert pour une conique

Ce théorème n'est connu que dans le cas du cercle.

Exercice 11.3.1

Soient $A, B, C, A_1, B_1, C_1, D$ sept points d'une même conique tels que les droites (AA_1) , (BB_1) , (CC_1) soient parallèles. On désigne par P, Q, R les points $P = (A_1D) \cap (BC)$, $Q = (B_1D) \cap (CA)$, $R = (C_1D) \cap (AB)$. Montrer que les points P, Q, R appartiennent à une même droite parallèle à la droite (AA_1) .



Solution:

Dessin = $\{A, A_1, B, C, D\}$

Le repère barycentrique choisi est A, B, C .

Les points composés sont A_1, D .

On déduit les coordonnées barycentriques des points composés:

$$A_1 = \left\{ \frac{X_1 (b^2 \beta_1 X_1 + a^2 \beta_2 Y_1)}{b^2 \beta_1 X_1^2 + b^2 \beta_1 X_1 Y_1 + a^2 \beta_2 X_1 Y_1 - c^2 X_1 Y_1 + a^2 \beta_2 Y_1^2}, \right. \\ \left. \frac{Y_1 (b^2 \beta_1 X_1 + a^2 \beta_2 Y_1)}{b^2 \beta_1 X_1^2 + b^2 \beta_1 X_1 Y_1 + a^2 \beta_2 X_1 Y_1 - c^2 X_1 Y_1 + a^2 \beta_2 Y_1^2}, \right. \\ \left. \frac{-c^2 X_1 Y_1}{b^2 \beta_1 X_1^2 + b^2 \beta_1 X_1 Y_1 + a^2 \beta_2 X_1 Y_1 - c^2 X_1 Y_1 + a^2 \beta_2 Y_1^2} \right\}$$

$$D = \left\{ \frac{X (b^2 \beta_1 X + a^2 \beta_2 Y)}{b^2 \beta_1 X^2 + b^2 \beta_1 X Y + a^2 \beta_2 X Y - c^2 X Y + a^2 \beta_2 Y^2}, \right. \\ \left. \frac{Y (b^2 \beta_1 X + a^2 \beta_2 Y)}{b^2 \beta_1 X^2 + b^2 \beta_1 X Y + a^2 \beta_2 X Y - c^2 X Y + a^2 \beta_2 Y^2}, \right. \\ \left. \frac{-c^2 X Y}{b^2 \beta_1 X^2 + b^2 \beta_1 X Y + a^2 \beta_2 X Y - c^2 X Y + a^2 \beta_2 Y^2} \right\}$$

Dessin = Dessin $\cup \{B_1, C_1\} = \{A, A_1, B, B_1, C, C_1, D\}$

Détermination du point C_1 :

Il existe k tel que l'on ait

$$\overrightarrow{OC_1} = \overrightarrow{OC} + k(\overrightarrow{OA_1} - \overrightarrow{OA})$$

ce qui fournit les coordonnées barycentriques du point C_1 .

Le point appartient à la conique lorsque

$$c^2 XY + b^2 \beta_1 XZ + a^2 \beta_2 YZ = 0$$

soit

$$k = \frac{-b^4 \beta_1^2 X_1 + a^2 b^2 \beta_1 \beta_2 X_1 + b^2 \beta_1 c^2 X_1 - a^2 b^2 \beta_1 \beta_2 Y_1 + a^4 \beta_2^2 Y_1}{a^2 \beta_2 c^2 Y_1}$$

On obtient ainsi

$$C_1 = \left\{ \frac{-(b^2 \beta_1 X_1 - c^2 X_1 + a^2 \beta_2 Y_1) (C_1^*)}{a^2 \beta_2 c^2 (b^2 \beta_1 X_1^2 + b^2 \beta_1 X_1 Y_1 + a^2 \beta_2 X_1 Y_1 - c^2 X_1 Y_1 + a^2 \beta_2 Y_1^2)}, \right. \\ \left. \frac{(b^2 \beta_1 X_1 + a^2 \beta_2 Y_1) (C_1^*)}{a^2 \beta_2 c^2 (b^2 \beta_1 X_1^2 + b^2 \beta_1 X_1 Y_1 + a^2 \beta_2 X_1 Y_1 - c^2 X_1 Y_1 + a^2 \beta_2 Y_1^2)}, \right. \\ \left. \frac{(b^2 \beta_1 X_1 + a^2 \beta_2 Y_1) (b^2 \beta_1 X_1 - c^2 X_1 + a^2 \beta_2 Y_1)}{a^2 \beta_2 (b^2 \beta_1 X_1^2 + b^2 \beta_1 X_1 Y_1 + a^2 \beta_2 X_1 Y_1 - c^2 X_1 Y_1 + a^2 \beta_2 Y_1^2)} \right\}$$

avec

$$C_1^* = -b^4 \beta_1^2 X_1 + a^2 b^2 \beta_1 \beta_2 X_1 + b^2 \beta_1 c^2 X_1 - a^2 b^2 \beta_1 \beta_2 Y_1 + a^4 \beta_2^2 Y_1$$

Détermination du point B_1 :

Il existe k tel que l'on ait

$$\overrightarrow{OB_1} = \overrightarrow{OB} + k(\overrightarrow{OA_1} - \overrightarrow{OA})$$

ce qui fournit les coordonnées barycentriques du point B_1 .

Le point appartient à la conique lorsque

$$c^2 XY + b^2 \beta_1 XZ + a^2 \beta_2 YZ = 0$$

soit

$$k = \frac{-b^2 \beta_1 X_1 - a^2 \beta_2 X_1 + c^2 X_1 - a^2 \beta_2 Y_1}{a^2 \beta_2 Y_1}$$

On obtient ainsi

$$B_1 = \left\{ \frac{(b^2 \beta_1 X_1 - c^2 X_1 + a^2 \beta_2 Y_1) (b^2 \beta_1 X_1 + a^2 \beta_2 X_1 - c^2 X_1 + a^2 \beta_2 Y_1)}{a^2 \beta_2 (b^2 \beta_1 X_1^2 + b^2 \beta_1 X_1 Y_1 + a^2 \beta_2 X_1 Y_1 - c^2 X_1 Y_1 + a^2 \beta_2 Y_1^2)}, \right. \\ \left. \frac{-b^2 \beta_1 X_1 (b^2 \beta_1 X_1 - c^2 X_1 + a^2 \beta_2 Y_1)}{a^2 \beta_2 (b^2 \beta_1 X_1^2 + b^2 \beta_1 X_1 Y_1 + a^2 \beta_2 X_1 Y_1 - c^2 X_1 Y_1 + a^2 \beta_2 Y_1^2)}, \right. \\ \left. \frac{c^2 X_1 (b^2 \beta_1 X_1 + a^2 \beta_2 X_1 - c^2 X_1 + a^2 \beta_2 Y_1)}{a^2 \beta_2 (b^2 \beta_1 X_1^2 + b^2 \beta_1 X_1 Y_1 + a^2 \beta_2 X_1 Y_1 - c^2 X_1 Y_1 + a^2 \beta_2 Y_1^2)} \right\}$$

Dessin = Dessin $\cup \{P\} = \{A, A_1, B, B_1, C, C_1, D, P\}$

Détermination du point P :

Soit P le point $(A_1D) \cap (BC)$. Le point P est composé.

Après calculs, nous obtenons

$$P = \left\{ 0, \frac{(b^2 \beta_1 X + a^2 \beta_2 Y) (b^2 \beta_1 X_1 + a^2 \beta_2 Y_1)}{b^4 \beta_1^2 X X_1 - b^2 \beta_1 c^2 X X_1 + a^2 b^2 \beta_1 \beta_2 X_1 Y + a^2 b^2 \beta_1 \beta_2 X Y_1 + a^4 \beta_2^2 Y Y_1 - b^2 \beta_1 c^2 X X_1}, \frac{b^4 \beta_1^2 X X_1 - b^2 \beta_1 c^2 X X_1 + a^2 b^2 \beta_1 \beta_2 X_1 Y + a^2 b^2 \beta_1 \beta_2 X Y_1 + a^4 \beta_2^2 Y Y_1}{b^4 \beta_1^2 X X_1 - b^2 \beta_1 c^2 X X_1 + a^2 b^2 \beta_1 \beta_2 X_1 Y + a^2 b^2 \beta_1 \beta_2 X Y_1 + a^4 \beta_2^2 Y Y_1} \right\}$$

Dessin = Dessin $\cup \{Q\} = \{A, A_1, B, B_1, C, C_1, D, P, Q\}$

Détermination du point Q :

Soit Q le point $(B_1D) \cap (CA)$. Après calculs, nous obtenons

$$Q = \left\{ \frac{(b^2 \beta_1 X + a^2 \beta_2 Y) (b^2 \beta_1 X_1 - c^2 X_1 + a^2 \beta_2 Y_1)}{b^4 \beta_1^2 X X_1 - b^2 \beta_1 c^2 X X_1 + a^2 b^2 \beta_1 \beta_2 X_1 Y + a^2 b^2 \beta_1 \beta_2 X Y_1 + a^4 \beta_2^2 Y Y_1}, 0, \frac{a^2 \beta_2 c^2 X_1 Y}{b^4 \beta_1^2 X X_1 - b^2 \beta_1 c^2 X X_1 + a^2 b^2 \beta_1 \beta_2 X_1 Y + a^2 b^2 \beta_1 \beta_2 X Y_1 + a^4 \beta_2^2 Y Y_1} \right\}$$

Dessin = Dessin $\cup \{R\} = \{A, A_1, B, B_1, C, C_1, D, P, Q, R\}$

Détermination du point R :

Soit R le point $(C_1D) \cap (AB)$. Après calculs, nous obtenons

$$R = \left\{ \frac{b^2 \beta_1 X (b^2 \beta_1 X_1 - c^2 X_1 + a^2 \beta_2 Y_1)}{b^4 \beta_1^2 X X_1 - b^2 \beta_1 c^2 X X_1 + a^2 b^2 \beta_1 \beta_2 X_1 Y + a^2 b^2 \beta_1 \beta_2 X Y_1 + a^4 \beta_2^2 Y Y_1}, \frac{a^2 \beta_2 Y (b^2 \beta_1 X_1 + a^2 \beta_2 Y_1)}{b^4 \beta_1^2 X X_1 - b^2 \beta_1 c^2 X X_1 + a^2 b^2 \beta_1 \beta_2 X_1 Y + a^2 b^2 \beta_1 \beta_2 X Y_1 + a^4 \beta_2^2 Y Y_1}, 0 \right\}$$

Calculons le vecteur $\overrightarrow{PQ}$. On a:

$$\overrightarrow{PQ} = g(1) \overrightarrow{OA} + g(2) \overrightarrow{OB} + g(3) \overrightarrow{OC}$$

avec

$$g(1) = \frac{(b^2 \beta_1 X + a^2 \beta_2 Y) (b^2 \beta_1 X_1 - c^2 X_1 + a^2 \beta_2 Y_1)}{b^4 \beta_1^2 X X_1 - b^2 \beta_1 c^2 X X_1 + a^2 b^2 \beta_1 \beta_2 X_1 Y + a^2 b^2 \beta_1 \beta_2 X Y_1 + a^4 \beta_2^2 Y Y_1} - \frac{(b^2 \beta_1 X + a^2 \beta_2 Y) (b^2 \beta_1 X_1 + a^2 \beta_2 Y_1)}{b^4 \beta_1^2 X X_1 - b^2 \beta_1 c^2 X X_1 + a^2 b^2 \beta_1 \beta_2 X_1 Y + a^2 b^2 \beta_1 \beta_2 X Y_1 + a^4 \beta_2^2 Y Y_1}$$

$$g(2) = \frac{c^2 X_1 (b^2 \beta_1 X + a^2 \beta_2 Y)}{b^4 \beta_1^2 X X_1 - b^2 \beta_1 c^2 X X_1 + a^2 b^2 \beta_1 \beta_2 X_1 Y + a^2 b^2 \beta_1 \beta_2 X Y_1 + a^4 \beta_2^2 Y Y_1}$$

Calculons le vecteur $\overrightarrow{AA_1}$. On a:

$$\overrightarrow{AA_1} = h(1) \overrightarrow{OA} + h(2) \overrightarrow{OB} + h(3) \overrightarrow{OC}$$

avec

$$h(1) = \frac{-Y_1 (b^2 \beta_1 X_1 - c^2 X_1 + a^2 \beta_2 Y_1)}{b^2 \beta_1 X_1^2 + b^2 \beta_1 X_1 Y_1 + a^2 \beta_2 X_1 Y_1 - c^2 X_1 Y_1 + a^2 \beta_2 Y_1^2}$$

$$h(2) = \frac{Y_1 (b^2 \beta_1 X_1 + a^2 \beta_2 Y_1)}{b^2 \beta_1 X_1^2 + b^2 \beta_1 X_1 Y_1 + a^2 \beta_2 X_1 Y_1 - c^2 X_1 Y_1 + a^2 \beta_2 Y_1^2}$$

$$h(3) = \frac{-c^2 X_1 Y_1}{b^2 \beta_1 X_1^2 + b^2 \beta_1 X_1 Y_1 + a^2 \beta_2 X_1 Y_1 - c^2 X_1 Y_1 + a^2 \beta_2 Y_1^2}$$

On a ainsi

$$\overrightarrow{PQ} = \frac{-(b^2 \beta_1 X + a^2 \beta_2 Y) (b^2 \beta_1 X_1^2 + b^2 \beta_1 X_1 Y_1 + a^2 \beta_2 X_1 Y_1 - c^2 X_1 Y_1 + a^2 \beta_2 Y_1^2)}{Y_1 (b^4 \beta_1^2 X X_1 - b^2 \beta_1 c^2 X X_1 + a^2 b^2 \beta_1 \beta_2 X_1 Y + a^2 b^2 \beta_1 \beta_2 X Y_1 + a^4 \beta_2^2 Y Y_1)} \overrightarrow{AA_1}$$

Calculons le vecteur $\overrightarrow{PR}$. On a:

$$\overrightarrow{PR} = j(1) \overrightarrow{OA} + j(2) \overrightarrow{OB} + j(3) \overrightarrow{OC}$$

avec

$$j(1) = \frac{b^2 \beta_1 X (b^2 \beta_1 X_1 - c^2 X_1 + a^2 \beta_2 Y_1)}{b^4 \beta_1^2 X X_1 - b^2 \beta_1 c^2 X X_1 + a^2 b^2 \beta_1 \beta_2 X_1 Y + a^2 b^2 \beta_1 \beta_2 X Y_1 + a^4 \beta_2^2 Y Y_1}$$

$$j(2) = \frac{-b^2 \beta_1 X (b^2 \beta_1 X_1 + a^2 \beta_2 Y_1)}{b^4 \beta_1^2 X X_1 - b^2 \beta_1 c^2 X X_1 + a^2 b^2 \beta_1 \beta_2 X_1 Y + a^2 b^2 \beta_1 \beta_2 X Y_1 + a^4 \beta_2^2 Y Y_1}$$

$$j(3) = \frac{b^2 \beta_1 c^2 X X_1}{b^4 \beta_1^2 X X_1 - b^2 \beta_1 c^2 X X_1 + a^2 b^2 \beta_1 \beta_2 X_1 Y + a^2 b^2 \beta_1 \beta_2 X Y_1 + a^4 \beta_2^2 Y Y_1}$$

On a ainsi

$$\overrightarrow{PQ} = \frac{b^2 \beta_1 X + a^2 \beta_2 Y}{b^2 \beta_1 X} \overrightarrow{PR}$$

CHAPITRE

12

Céliennes

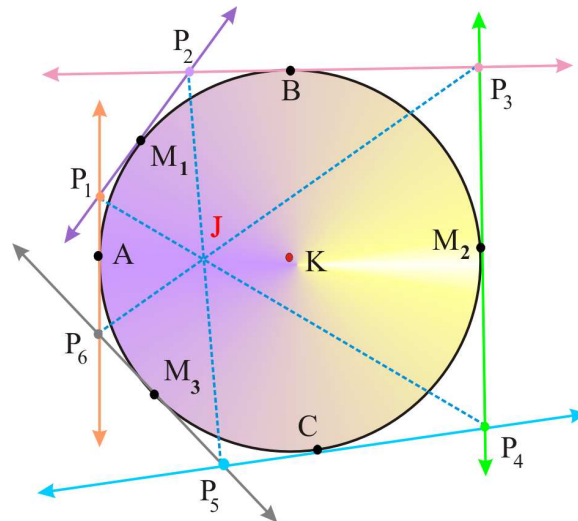
12 Céliennes

12.1 Théorème de Brianchon

Le théorème de Brianchon concerne des droites concourantes issues d'un hexagone circonscrit à un cercle. Nous le démontrerons également pour une conique en distinguant les deux démonstrations très distinctes.

Exercice 12.1.1

Soient M_1, M_2, M_3 des points situés sur le cercle circonscrit à un triangle ABC (on suppose les six points distincts). On forme les 6 couples $\{A, M_1\}$, $\{M_1, B\}$, $\{B, M_2\}$, $\{M_2, C\}$, $\{C, M_3\}$, $\{M_3, A\}$ que l'on numérote de $i = 1$ à 6. A chaque couple, on associe le point P_i défini comme intersection des tangentes au cercle issues des 2 points du i ème couple. Montrer que les droites P_1P_4 , P_2P_5 , P_3P_6 se rencontrent en un même point J .

**Solution:**

Dessin = $\{A, B, C, K, M_1, M_2, M_3\}$

Les coordonnées barycentriques du centre K du cercle circonscrit au triangle ABC sont

$$K = \left\{ \frac{a^2 (a^2 - b^2 - c^2)}{(a - b - c) (a + b - c) (a - b + c) (a + b + c)}, \right. \\ \frac{b^2 (-a^2 + b^2 - c^2)}{(-a + b - c) (a + b - c) (-a + b + c) (a + b + c)}, \\ \left. \frac{c^2 (a^2 + b^2 - c^2)}{(-a + b + c) (a + b - c) (a - b + c) (a + b + c)} \right\}$$

On a, avec des notations naturelles, pour $i = 1, 2, 3$

$$M_i = \{x_i, y_i, -\frac{c^2 x_i y_i}{b^2 x_i + a^2 y_i}\}$$

donc

$$M_i = \left\{ \frac{x_i (b^2 x_i + a^2 y_i)}{b^2 x_i^2 + a^2 x_i y_i + b^2 x_i y_i - c^2 x_i y_i + a^2 y_i^2}, \right. \\ \frac{y_i (b^2 x_i + a^2 y_i)}{b^2 x_i^2 + a^2 x_i y_i + b^2 x_i y_i - c^2 x_i y_i + a^2 y_i^2}, \\ \left. \frac{-c^2 x_3 y_3}{b^2 x_i^2 + a^2 x_i y_i + b^2 x_i y_i - c^2 x_i y_i + a^2 y_i^2} \right\}$$

Dessin = Dessin $\cup \{P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6\} = \{A, B, C, K, M_1, M_2, M_3, P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6\}$

Le repère barycentrique choisi est A, B, C .

Les points composés sont $P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6$.

Déterminons les coordonnées barycentriques du point P_1 en recherchant un point $M = \{X, Y, 1 - X - Y\}$ satisfaisant les conditions $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{AK} = 0$ et $\overrightarrow{MM_1} \cdot \overrightarrow{M_1K} = 0$, soit le système linéaire

$$\begin{cases} 0 = b^2 - b^2 X + (-b^2 + c^2) Y \\ 0 = Y (b^4 x_1^2 - b^2 c^2 x_1^2 + 2 a^2 b^2 x_1 y_1 + a^4 y_1^2) + X (b^4 x_1^2 + 2 a^2 b^2 x_1 y_1 + a^4 y_1^2 - a^2 c^2 y_1^2) \\ - b^4 x_1^2 - 2 a^2 b^2 x_1 y_1 - a^4 y_1^2 \end{cases}$$

d'où

$$X = \frac{2 b^2 x_1 + a^2 y_1}{2 b^2 x_1 + a^2 y_1 + b^2 y_1 - c^2 y_1} \quad Y = \frac{b^2 y_1}{2 b^2 x_1 + a^2 y_1 + b^2 y_1 - c^2 y_1}$$

Ainsi

$$P_1 = \left\{ \frac{2 b^2 x_1 + a^2 y_1}{2 b^2 x_1 + a^2 y_1 + b^2 y_1 - c^2 y_1}, \frac{b^2 y_1}{2 b^2 x_1 + a^2 y_1 + b^2 y_1 - c^2 y_1}, \frac{-c^2 y_1}{2 b^2 x_1 + a^2 y_1 + b^2 y_1 - c^2 y_1} \right\}$$

On déduit de même les coordonnées barycentriques des autres points composés:

$$P_2 = \left\{ \frac{a^2 x_1}{a^2 x_1 + b^2 x_1 - c^2 x_1 + 2 a^2 y_1}, \frac{b^2 x_1 + 2 a^2 y_1}{a^2 x_1 + b^2 x_1 - c^2 x_1 + 2 a^2 y_1}, \frac{-c^2 x_1}{a^2 x_1 + b^2 x_1 - c^2 x_1 + 2 a^2 y_1} \right\}$$

$$P_3 = \left\{ \frac{a^2 x_2}{a^2 x_2 + b^2 x_2 - c^2 x_2 + 2 a^2 y_2}, \frac{b^2 x_2 + 2 a^2 y_2}{a^2 x_2 + b^2 x_2 - c^2 x_2 + 2 a^2 y_2}, \frac{-c^2 x_2}{a^2 x_2 + b^2 x_2 - c^2 x_2 + 2 a^2 y_2} \right\}$$

$$\begin{aligned}
P_4 &= \left\{ \frac{a^2 (b^2 x_2 + a^2 y_2)}{a^2 b^2 x_2 - b^4 x_2 + b^2 c^2 x_2 + a^4 y_2 - a^2 b^2 y_2 - a^2 c^2 y_2}, \right. \\
&\quad \frac{-b^2 (b^2 x_2 + a^2 y_2)}{a^2 b^2 x_2 - b^4 x_2 + b^2 c^2 x_2 + a^4 y_2 - a^2 b^2 y_2 - a^2 c^2 y_2}, \\
&\quad \left. \frac{c^2 (b^2 x_2 - a^2 y_2)}{a^2 b^2 x_2 - b^4 x_2 + b^2 c^2 x_2 + a^4 y_2 - a^2 b^2 y_2 - a^2 c^2 y_2} \right\} \\
P_5 &= \left\{ \frac{a^2 (b^2 x_3 + a^2 y_3)}{a^2 b^2 x_3 - b^4 x_3 + b^2 c^2 x_3 + a^4 y_3 - a^2 b^2 y_3 - a^2 c^2 y_3}, \right. \\
&\quad \frac{-b^2 (b^2 x_3 + a^2 y_3)}{a^2 b^2 x_3 - b^4 x_3 + b^2 c^2 x_3 + a^4 y_3 - a^2 b^2 y_3 - a^2 c^2 y_3}, \\
&\quad \left. \frac{c^2 (b^2 x_3 - a^2 y_3)}{a^2 b^2 x_3 - b^4 x_3 + b^2 c^2 x_3 + a^4 y_3 - a^2 b^2 y_3 - a^2 c^2 y_3} \right\} \\
P_6 &= \left\{ \frac{2 b^2 x_3 + a^2 y_3}{2 b^2 x_3 + a^2 y_3 + b^2 y_3 - c^2 y_3}, \frac{b^2 y_3}{2 b^2 x_3 + a^2 y_3 + b^2 y_3 - c^2 y_3}, \frac{-c^2 y_3}{2 b^2 x_3 + a^2 y_3 + b^2 y_3 - c^2 y_3} \right\}
\end{aligned}$$

Dessin = Dessin $\cup \{J\} = \{A, B, C, K, M_1, M_2, M_3, P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6\}$

Détermination du point J :

En appliquant directement la réponse de l'exercice suivant, on obtient les coordonnées barycentriques du point J commun aux 3 droites

$$\begin{aligned}
J &= \left\{ \frac{a^2 (b^2 x_2 x_3 y_1 - 2 b^2 x_1 x_3 y_2 + b^2 x_1 x_2 y_3 + a^2 x_2 y_1 y_3 - a^2 x_1 y_2 y_3)}{Den}, \right. \\
&\quad \frac{b^2 (-b^2 x_2 x_3 y_1 + 2 a^2 x_3 y_1 y_2 - b^2 x_1 x_2 y_3 - a^2 x_2 y_1 y_3 - a^2 x_1 y_2 y_3)}{Den}, \\
&\quad \left. \frac{c^2 (b^2 x_2 x_3 y_1 - b^2 x_1 x_2 y_3 - a^2 x_2 y_1 y_3 + a^2 x_1 y_2 y_3)}{Den} \right\}
\end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned}
Den &= a^2 b^2 x_2 x_3 y_1 - b^4 x_2 x_3 y_1 + b^2 c^2 x_2 x_3 y_1 - 2 a^2 b^2 x_1 x_3 y_2 - 2 a^2 b^2 x_3 y_1 y_2 + a^2 b^2 x_1 x_2 y_3 + b^4 x_1 x_2 y_3 \\
&\quad - b^2 c^2 x_1 x_2 y_3 + a^4 x_2 y_1 y_3 + a^2 b^2 x_2 y_1 y_3 - a^2 c^2 x_2 y_1 y_3 - a^4 x_1 y_2 y_3 + a^2 b^2 x_1 y_2 y_3 + a^2 c^2 x_1 y_2 y_3
\end{aligned}$$

Exercice 12.1.2 Théorème de Brianchon pour une conique

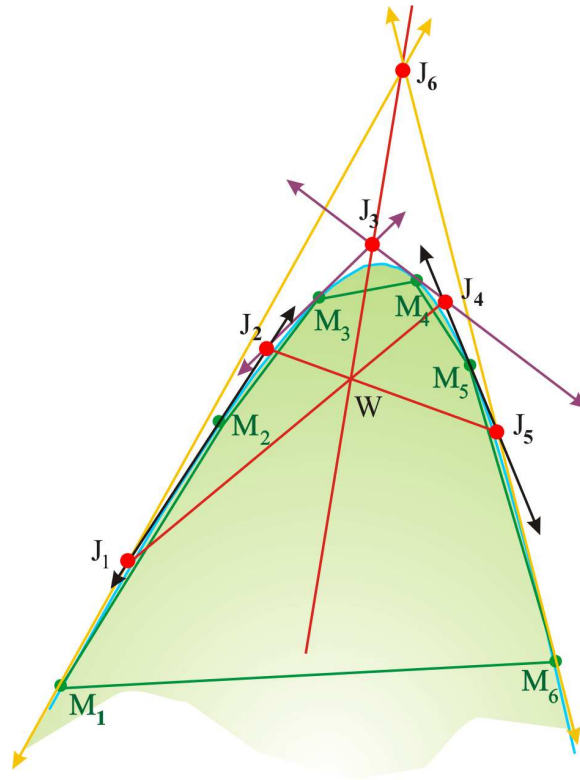
Pour tout hexagone (non nécessairement convexe) circonscrit à une conique $\mathfrak{F}$, les droites qui joignent les sommets opposés passent par un même point.

Solution:

Nous considérons une conique $\mathfrak{F}$ passant par trois points A, B, C (formant un triangle) d'équation

$$a^2 \beta_2 y z + c^2 x y + b^2 \beta_1 x z = 0$$

Soient M_i des points distincts de $\mathfrak{F}$ pour $1 \leq i \leq 6$ situé sur l'hexagone circonscrit (points de contact de l'hexagone avec la conique). On désigne par T_i pour $1 \leq i \leq 6$ un point situé sur la tangente à la conique issue du point M_i .



Les coordonnées barycentriques normalisées d'un point M de la conique $\mathfrak{F}$ sont de la forme

$$M = \left\{ \frac{x (b^2 \beta_1 x + a^2 \beta_2 y)}{b^2 \beta_1 x^2 + b^2 \beta_1 x y + a^2 \beta_2 x y - c^2 x y + a^2 \beta_2 y^2}, \frac{y (b^2 \beta_1 x + a^2 \beta_2 y)}{b^2 \beta_1 x^2 + b^2 \beta_1 x y + a^2 \beta_2 x y - c^2 x y + a^2 \beta_2 y^2}, \frac{c^2 x y}{-b^2 \beta_1 x^2 - b^2 \beta_1 x y - a^2 \beta_2 x y + c^2 x y - a^2 \beta_2 y^2} \right\}$$

soit, en posant $y = t x$,

$$M = \left\{ \frac{b^2 \beta_1 + a^2 \beta_2 t}{b^2 \beta_1 + b^2 \beta_1 t + a^2 \beta_2 t - c^2 t + a^2 \beta_2 t^2}, \frac{t (b^2 \beta_1 + a^2 \beta_2 t)}{b^2 \beta_1 + b^2 \beta_1 t + a^2 \beta_2 t - c^2 t + a^2 \beta_2 t^2}, \frac{-c^2 t}{b^2 \beta_1 + b^2 \beta_1 t + a^2 \beta_2 t - c^2 t + a^2 \beta_2 t^2} \right\}$$

Un point T situé sur la tangente à la conique issue du point M est alors

$$T = \left\{ \frac{b^2 \beta_1 + b^4 \beta_1^2 - b^2 \beta_1 c^2 + a^2 \beta_2 t + 2 a^2 b^2 \beta_1 \beta_2 t + a^4 \beta_2^2 t^2}{b^2 \beta_1 + b^2 \beta_1 t + a^2 \beta_2 t - c^2 t + a^2 \beta_2 t^2}, \frac{-b^4 \beta_1^2 + b^2 \beta_1 t - 2 a^2 b^2 \beta_1 \beta_2 t + a^2 \beta_2 t^2 - a^4 \beta_2^2 t^2 + a^2 \beta_2 c^2 t^2}{b^2 \beta_1 + b^2 \beta_1 t + a^2 \beta_2 t - c^2 t + a^2 \beta_2 t^2}, \frac{c^2 (b^2 \beta_1 - t - a^2 \beta_2 t^2)}{b^2 \beta_1 + b^2 \beta_1 t + a^2 \beta_2 t - c^2 t + a^2 \beta_2 t^2} \right\}$$

Dessin = Dessin $\cup \{M_1, \dots, J_6, T_1, \dots, T_6\} = \{A, B, C, M_1, \dots, M_6, T_1, \dots, T_6\}$

Le repère barycentrique choisi est A, B, C .

Les points composés sont M_i, T_i .

Les coordonnées barycentriques des points composés:

$$M_i = \left\{ \frac{b^2 \beta_1 + a^2 \beta_2 t_i}{b^2 \beta_1 + b^2 \beta_1 t_i + a^2 \beta_2 t_i - c^2 t_i + a^2 \beta_2 t_i^2}, \right. \\ \left. \frac{t_i (b^2 \beta_1 + a^2 \beta_2 t_i)}{b^2 \beta_1 + b^2 \beta_1 t_i + a^2 \beta_2 t_i - c^2 t_i + a^2 \beta_2 t_i^2}, \right. \\ \left. \frac{-c^2 t_i}{b^2 \beta_1 + b^2 \beta_1 t_i + a^2 \beta_2 t_i - c^2 t_i + a^2 \beta_2 t_i^2} \right\}$$

$$T_i = \left\{ \frac{b^2 \beta_1 + b^4 \beta_1^2 - b^2 \beta_1 c^2 + a^2 \beta_2 t_i + 2 a^2 b^2 \beta_1 \beta_2 t_i + a^4 \beta_2^2 t_i^2}{b^2 \beta_1 + b^2 \beta_1 t_i + a^2 \beta_2 t_i - c^2 t_i + a^2 \beta_2 t_i^2}, \right. \\ \left. \frac{-b^4 \beta_1^2 + b^2 \beta_1 t_i - 2 a^2 b^2 \beta_1 \beta_2 t_i + a^2 \beta_2 t_i^2 - a^4 \beta_2^2 t_i^2 + a^2 \beta_2 c^2 t_i^2}{b^2 \beta_1 + b^2 \beta_1 t_i + a^2 \beta_2 t_i - c^2 t_i + a^2 \beta_2 t_i^2}, \right. \\ \left. \frac{c^2 (b^2 \beta_1 - t_i - a^2 \beta_2 t_i^2)}{b^2 \beta_1 + b^2 \beta_1 t_i + a^2 \beta_2 t_i - c^2 t_i + a^2 \beta_2 t_i^2} \right\}$$

Dessin = Dessin $\cup \{J_i\} = \{A, B, C, J_1, \dots, J_6, M_1, \dots, M_6, T_1, \dots, T_6\}$

Détermination du point J_i :

Soit J_i le point $(M_i T_i) \cap (M_{i+1} T_{i+1})$ pour $1 \leq i \leq 6$ (dans les calculs, on convient que $i + 1 = 1$ lorsque $i = 6$). Le point J_i est composé.

Comme $J_i \in (M_i T_i)$, on a, en choisissant l'inconnue ν_1

$$\overrightarrow{OJ_i} = \nu_1 \overrightarrow{OM_i} + (1 - \nu_1) \overrightarrow{OT_i}$$

On déduit:

$$\overrightarrow{OJ_i} = a(1) \overrightarrow{OA} + a(2) \overrightarrow{OB} + a(3) \overrightarrow{OC}$$

avec

$$a(1) = \frac{-a(1)^*}{b^2 \beta_1 + b^2 \beta_1 t_i + a^2 \beta_2 t_i - c^2 t_i + a^2 \beta_2 t_i^2}$$

$$a(2) = \frac{a(2)^*}{b^2 \beta_1 + b^2 \beta_1 t_i + a^2 \beta_2 t_i - c^2 t_i + a^2 \beta_2 t_i^2}$$

$$a(3) = \frac{c^2 (b^2 \beta_1 - b^2 \beta_1 \nu_1 - t_i - a^2 \beta_2 t_i^2 + a^2 \beta_2 \nu_1 t_i^2)}{b^2 \beta_1 + b^2 \beta_1 t_i + a^2 \beta_2 t_i - c^2 t_i + a^2 \beta_2 t_i^2}$$

avec

$$a(1)^* = -b^2 \beta_1 - b^4 \beta_1^2 + b^2 \beta_1 c^2 + b^4 \beta_1^2 \nu_1 - b^2 \beta_1 c^2 \nu_1 - a^2 \beta_2 t_i - 2 a^2 b^2 \beta_1 \beta_2 t_i \\ + 2 a^2 b^2 \beta_1 \beta_2 \nu_1 t_i - a^4 \beta_2^2 t_i^2 + a^4 \beta_2^2 \nu_1 t_i^2$$

$$a(2)^* = -b^4 \beta_1^2 + b^4 \beta_1^2 \nu_1 + b^2 \beta_1 t_i - 2 a^2 b^2 \beta_1 \beta_2 t_i + 2 a^2 b^2 \beta_1 \beta_2 \nu_1 t_i + a^2 \beta_2 t_i^2 \\ - a^4 \beta_2^2 t_i^2 + a^2 \beta_2 c^2 t_i^2 + a^4 \beta_2^2 \nu_1 t_i^2 - a^2 \beta_2 c^2 \nu_1 t_i^2$$

Comme $J_i \in (M_{i+1} T_{i+1})$, on a, en choisissant l'inconnue μ_1

$$\overrightarrow{OJ_i} = \mu_1 \overrightarrow{OM_{i+1}} + (1 - \mu_1) \overrightarrow{OT_{i+1}}$$

On déduit:

$$\overrightarrow{OJ_i} = b(1) \overrightarrow{OA} + b(2) \overrightarrow{OB} + b(3) \overrightarrow{OC}$$

avec

$$\begin{aligned} b(1) &= \frac{-b(1)^*}{b^2 \beta_1 + b^2 \beta_1 t_{i+1} + a^2 \beta_2 t_{i+1} - c^2 t_{i+1} + a^2 \beta_2 t_{i+1}^2} \\ b(2) &= \frac{b(2)^*}{b^2 \beta_1 + b^2 \beta_1 t_{i+1} + a^2 \beta_2 t_{i+1} - c^2 t_{i+1} + a^2 \beta_2 t_{i+1}^2} \\ b(3) &= \frac{c^2 (b^2 \beta_1 - b^2 \beta_1 \mu_1 - t_{i-1} - a^2 \beta_2 t_{i-1}^2 + a^2 \beta_2 \mu_1 t_{i-1}^2)}{b^2 \beta_1 + b^2 \beta_1 t_{i+1} + a^2 \beta_2 t_{i+1} - c^2 t_{i+1} + a^2 \beta_2 t_{i+1}^2} \end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned} b(1)^* &= -b^2 \beta_1 - b^4 \beta_1^2 + b^2 \beta_1 c^2 + b^4 \beta_1^2 \mu_1 - b^2 \beta_1 c^2 \mu_1 - a^2 \beta_2 t_{i+1} \\ &\quad - 2 a^2 b^2 \beta_1 \beta_2 t_{i+1} + 2 a^2 b^2 \beta_1 \beta_2 \mu_1 t_{i+1} - a^4 \beta_2^2 t_{i+1}^2 + a^4 \beta_2^2 \mu_1 t_{i+1}^2 \\ b(2)^* &= -b^4 \beta_1^2 + b^4 \beta_1^2 \mu_1 + b^2 \beta_1 t_{i+1} - 2 a^2 b^2 \beta_1 \beta_2 t_{i+1} + 2 a^2 b^2 \beta_1 \beta_2 \mu_1 t_{i+1} + a^2 \beta_2 t_{i+1}^2 \\ &\quad - a^4 \beta_2^2 t_{i+1}^2 + a^2 \beta_2 c^2 t_{i+1}^2 + a^4 \beta_2^2 \mu_1 t_{i+1}^2 - a^2 \beta_2 c^2 \mu_1 t_{i+1}^2 \end{aligned}$$

La résolution du système linéaire d'inconnues ν_1, μ_1 donne

$$\begin{aligned} \nu_1 &= \frac{-2 b^2 \beta_1 + t_i - b^2 \beta_1 t_i - a^2 \beta_2 t_i + c^2 t_i - t_{i+1} - b^2 \beta_1 t_{i+1} - a^2 \beta_2 t_{i+1} + c^2 t_{i+1} - 2 a^2 \beta_2 t_i t_{i+1}}{-2 b^2 \beta_1 - b^2 \beta_1 t_i - a^2 \beta_2 t_i + c^2 t_i - b^2 \beta_1 t_{i+1} - a^2 \beta_2 t_{i+1} + c^2 t_{i+1} - 2 a^2 \beta_2 t_i t_{i+1}} \\ \mu_1 &= \frac{-2 b^2 \beta_1 - t_i - b^2 \beta_1 t_i - a^2 \beta_2 t_i + c^2 t_i + t_{i+1} - b^2 \beta_1 t_{i+1} - a^2 \beta_2 t_{i+1} + c^2 t_{i+1} - 2 a^2 \beta_2 t_i t_{i+1}}{-2 b^2 \beta_1 - b^2 \beta_1 t_i - a^2 \beta_2 t_i + c^2 t_i - b^2 \beta_1 t_{i+1} - a^2 \beta_2 t_{i+1} + c^2 t_{i+1} - 2 a^2 \beta_2 t_i t_{i+1}} \end{aligned}$$

On déduit que:

$$\begin{aligned} J_i &= \left\{ \frac{2 b^2 \beta_1 + a^2 \beta_2 t_i + a^2 \beta_2 t_{i+1}}{2 b^2 \beta_1 + b^2 \beta_1 t_i + a^2 \beta_2 t_i - c^2 t_i + b^2 \beta_1 t_{i+1} + a^2 \beta_2 t_{i+1} - c^2 t_{i+1} + 2 a^2 \beta_2 t_i t_{i+1}}, \right. \\ &\quad \frac{b^2 \beta_1 t_i + b^2 \beta_1 t_{i+1} + 2 a^2 \beta_2 t_i t_{i+1}}{2 b^2 \beta_1 + b^2 \beta_1 t_i + a^2 \beta_2 t_i - c^2 t_i + b^2 \beta_1 t_{i+1} + a^2 \beta_2 t_{i+1} - c^2 t_{i+1} + 2 a^2 \beta_2 t_i t_{i+1}}, \\ &\quad \left. \frac{c^2 (t_i + t_{i+1})}{-2 b^2 \beta_1 - b^2 \beta_1 t_i - a^2 \beta_2 t_i + c^2 t_i - b^2 \beta_1 t_{i+1} - a^2 \beta_2 t_{i+1} + c^2 t_{i+1} - 2 a^2 \beta_2 t_i t_{i+1}} \right\} \end{aligned}$$

Dessin = Dessin $\cup \{W_1\} = \{A, B, C, J_1, \dots, J_6, M_1, \dots, M_6, T_1, \dots, T_6, W_1\}$

Détermination du point W_1 :

Soit W_1 le point $(J_1 J_4) \cap (J_2 J_5)$. Le point W_1 est composé.

On obtient

$$W_1 = \left\{ \frac{Num_x(W_1)}{Den(W_1)}, \frac{Num_y(W_1)}{Den(W_1)}, \frac{Num_z(W_1)}{Den(W_1)} \right\}$$

avec

$$\begin{aligned} Num_x(W_1) &= 2 b^2 \beta_1 t_1 t_2 - 2 b^2 \beta_1 t_2 t_3 + a^2 \beta_2 t_1 t_2 t_4 + 2 b^2 \beta_1 t_3 t_4 + a^2 \beta_2 t_1 t_3 t_4 + a^2 \beta_2 t_1 t_2 t_5 \\ &\quad - a^2 \beta_2 t_2 t_3 t_5 - 2 b^2 \beta_1 t_4 t_5 - a^2 \beta_2 t_1 t_4 t_5 - a^2 \beta_2 t_2 t_4 t_5 - 2 b^2 \beta_1 t_1 t_6 - a^2 \beta_2 t_1 t_3 t_6 \\ &\quad - a^2 \beta_2 t_2 t_3 t_6 - a^2 \beta_2 t_1 t_4 t_6 + a^2 \beta_2 t_3 t_4 t_6 + 2 b^2 \beta_1 t_5 t_6 + a^2 \beta_2 t_2 t_5 t_6 + a^2 \beta_2 t_3 t_5 t_6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Num_y(W_1) &= b^2 \beta_1 t_1 t_2 t_4 + b^2 \beta_1 t_1 t_3 t_4 + 2 a^2 \beta_2 t_1 t_2 t_3 t_4 + b^2 \beta_1 t_1 t_2 t_5 - b^2 \beta_1 t_2 t_3 t_5 - b^2 \beta_1 t_1 t_4 t_5 \\ &\quad - b^2 \beta_1 t_2 t_4 t_5 - 2 a^2 \beta_2 t_2 t_3 t_4 t_5 - b^2 \beta_1 t_1 t_3 t_6 - b^2 \beta_1 t_2 t_3 t_6 - 2 a^2 \beta_2 t_1 t_2 t_3 t_6 - b^2 \beta_1 t_1 t_4 t_6 \\ &\quad + b^2 \beta_1 t_3 t_4 t_6 + b^2 \beta_1 t_2 t_5 t_6 + 2 a^2 \beta_2 t_1 t_2 t_5 t_6 + b^2 \beta_1 t_3 t_5 t_6 - 2 a^2 \beta_2 t_1 t_4 t_5 t_6 + 2 a^2 \beta_2 t_3 t_4 t_5 t_6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Num}_z(W_1) = & c^2 (t_1 t_2 t_4 + t_1 t_3 t_4 + t_1 t_2 t_5 - t_2 t_3 t_5 - t_1 t_4 t_5 - t_2 t_4 t_5 - t_1 t_3 t_6 \\ & - t_2 t_3 t_6 - t_1 t_4 t_6 + t_3 t_4 t_6 + t_2 t_5 t_6 + t_3 t_5 t_6) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \text{Den}(W_1) = & -2b^2 \beta_1 t_1 t_2 + 2b^2 \beta_1 t_2 t_3 - b^2 \beta_1 t_1 t_2 t_4 - a^2 \beta_2 t_1 t_2 t_4 + c^2 t_1 t_2 t_4 - 2b^2 \beta_1 t_3 t_4 \\ & - b^2 \beta_1 t_1 t_3 t_4 - a^2 \beta_2 t_1 t_3 t_4 + c^2 t_1 t_3 t_4 - 2a^2 \beta_2 t_1 t_2 t_3 t_4 - b^2 \beta_1 t_1 t_2 t_5 - a^2 \beta_2 t_1 t_2 t_5 \\ & + c^2 t_1 t_2 t_5 + b^2 \beta_1 t_2 t_3 t_5 + a^2 \beta_2 t_2 t_3 t_5 - c^2 t_2 t_3 t_5 + 2b^2 \beta_1 t_4 t_5 + b^2 \beta_1 t_1 t_4 t_5 \\ & + a^2 \beta_2 t_1 t_4 t_5 - c^2 t_1 t_4 t_5 + b^2 \beta_1 t_2 t_4 t_5 + a^2 \beta_2 t_2 t_4 t_5 - c^2 t_2 t_4 t_5 + 2a^2 \beta_2 t_2 t_3 t_4 t_5 \\ & + 2b^2 \beta_1 t_1 t_6 + b^2 \beta_1 t_1 t_3 t_6 + a^2 \beta_2 t_1 t_3 t_6 - c^2 t_1 t_3 t_6 + b^2 \beta_1 t_2 t_3 t_6 + a^2 \beta_2 t_2 t_3 t_6 \\ & - c^2 t_2 t_3 t_6 + 2a^2 \beta_2 t_1 t_2 t_3 t_6 + b^2 \beta_1 t_1 t_4 t_6 + a^2 \beta_2 t_1 t_4 t_6 - c^2 t_1 t_4 t_6 - b^2 \beta_1 t_3 t_4 t_6 \\ & - a^2 \beta_2 t_3 t_4 t_6 + c^2 t_3 t_4 t_6 - 2b^2 \beta_1 t_5 t_6 - b^2 \beta_1 t_2 t_5 t_6 - a^2 \beta_2 t_2 t_5 t_6 + c^2 t_2 t_5 t_6 \\ & - 2a^2 \beta_2 t_1 t_2 t_5 t_6 - b^2 \beta_1 t_3 t_5 t_6 - a^2 \beta_2 t_3 t_5 t_6 + c^2 t_3 t_5 t_6 + 2a^2 \beta_2 t_1 t_4 t_5 t_6 - 2a^2 \beta_2 t_3 t_4 t_5 t_6 \end{aligned}$$

Dessin = Dessin $\cup \{W_2\} = \{A, B, C, J_1, \dots, J_6, M_1, \dots, M_6, T_1, \dots, T_6, W_1, W_2\}$

Détermination du point W_2 :

Soit W_2 le point $(J_1 J_4) \cap (J_3 J_6)$. Le point W_2 est composé.

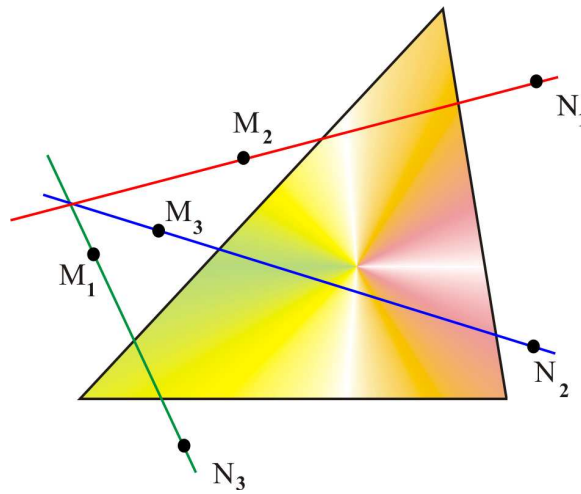
En échangeant les variables t_2 par t_3 et t_5 par t_6 , on obtient W_2 et on constate que

$$W_1 = W_2$$

12.2 Céviennes dans un contexte général

Exercice 12.2.1

Soit ABC un triangle, N_i des points de coordonnées barycentriques $\{a_i, b_i, c_i\}$ pour $i = 1, 2, 3$ et M_i des points de coordonnées barycentriques $\{X_i, Y_i, Z_i\}$ pour $i = 1, 2, 3$. Montrer que les droites $(N_1 M_2)$, $(N_2 M_3)$, $(N_3 M_1)$ se coupent en un même point si et seulement si il existe une relation algébrique (que l'on explicitera) entre les coordonnées barycentriques $\{X_i, Y_i, Z_i\}$ et $\{a_i, b_i, c_i\}$.



Solution:**Dessin** = $\{A, B, C, M_1, M_2, M_3, N_1, N_2, N_3\}$ Le repère barycentrique choisi est A, B, C .Les points composés sont $M_1, M_2, M_3, N_1, N_2, N_3$.

On déduit les coordonnées barycentriques des points composés:

$$M_1 = \left\{ \frac{X_1}{X_1 + Y_1 + Z_1}, \frac{Y_1}{X_1 + Y_1 + Z_1}, \frac{Z_1}{X_1 + Y_1 + Z_1} \right\}$$

$$M_2 = \left\{ \frac{X_2}{X_2 + Y_2 + Z_2}, \frac{Y_2}{X_2 + Y_2 + Z_2}, \frac{Z_2}{X_2 + Y_2 + Z_2} \right\}$$

$$M_3 = \left\{ \frac{X_3}{X_3 + Y_3 + Z_3}, \frac{Y_3}{X_3 + Y_3 + Z_3}, \frac{Z_3}{X_3 + Y_3 + Z_3} \right\}$$

$$N_1 = \left\{ \frac{a_1}{a_1 + b_1 + c_1}, \frac{b_1}{a_1 + b_1 + c_1}, \frac{c_1}{a_1 + b_1 + c_1} \right\}$$

$$N_2 = \left\{ \frac{a_2}{a_2 + b_2 + c_2}, \frac{b_2}{a_2 + b_2 + c_2}, \frac{c_2}{a_2 + b_2 + c_2} \right\}$$

$$N_3 = \left\{ \frac{a_3}{a_3 + b_3 + c_3}, \frac{b_3}{a_3 + b_3 + c_3}, \frac{c_3}{a_3 + b_3 + c_3} \right\}$$

Dessin = **Dessin** $\cup \{P_1\} = \{A, B, C, M_1, M_2, M_3, N_1, N_2, N_3, P_1\}$ Détermination du point P_1 :Soit P_1 le point $(N_1M_2) \cap (N_2M_3)$. Le point P_1 est composé.Comme $P_1 \in (N_1M_2)$, on a, en choisissant les inconnues ν_1

$$\overrightarrow{OP_1} = (1 - \nu_1) \overrightarrow{OM_2} + \nu_1 \overrightarrow{ON_1}$$

On déduit:

$$\overrightarrow{OP_1} = a(1) \overrightarrow{OA} + a(2) \overrightarrow{OB} + a(3) \overrightarrow{OC}$$

avec

$$a(1) = \frac{a_1 X_2 + b_1 X_2 + c_1 X_2 - b_1 \nu_1 X_2 - c_1 \nu_1 X_2 + a_1 \nu_1 Y_2 + a_1 \nu_1 Z_2}{(a_1 + b_1 + c_1) (X_2 + Y_2 + Z_2)}$$

$$a(2) = \frac{b_1 \nu_1 X_2 + a_1 Y_2 + b_1 Y_2 + c_1 Y_2 - a_1 \nu_1 Y_2 - c_1 \nu_1 Y_2 + b_1 \nu_1 Z_2}{(a_1 + b_1 + c_1) (X_2 + Y_2 + Z_2)}$$

$$a(3) = \frac{c_1 \nu_1 X_2 + c_1 \nu_1 Y_2 + a_1 Z_2 + b_1 Z_2 + c_1 Z_2 - a_1 \nu_1 Z_2 - b_1 \nu_1 Z_2}{(a_1 + b_1 + c_1) (X_2 + Y_2 + Z_2)}$$

Comme $P_1 \in (N_2M_3)$, on a, en choisissant les inconnues μ_1

$$\overrightarrow{OP_1} = (1 - \mu_1) \overrightarrow{OM_3} + \mu_1 \overrightarrow{ON_2}$$

On déduit:

$$\overrightarrow{OP_1} = b(1) \overrightarrow{OA} + b(2) \overrightarrow{OB} + b(3) \overrightarrow{OC}$$

avec

$$b(1) = \frac{a_2 X_3 + b_2 X_3 + c_2 X_3 - b_2 \mu_1 X_3 - c_2 \mu_1 X_3 + a_2 \mu_1 Y_3 + a_2 \mu_1 Z_3}{(a_2 + b_2 + c_2) (X_3 + Y_3 + Z_3)}$$

$$b(2) = \frac{b_2 \mu_1 X_3 + a_2 Y_3 + b_2 Y_3 + c_2 Y_3 - a_2 \mu_1 Y_3 - c_2 \mu_1 Y_3 + b_2 \mu_1 Z_3}{(a_2 + b_2 + c_2) (X_3 + Y_3 + Z_3)}$$

$$b(3) = \frac{c_2 \mu_1 X_3 + c_2 \mu_1 Y_3 + a_2 Z_3 + b_2 Z_3 + c_2 Z_3 - a_2 \mu_1 Z_3 - b_2 \mu_1 Z_3}{(a_2 + b_2 + c_2) (X_3 + Y_3 + Z_3)}$$

La résolution du système linéaire d'inconnues ν_1, μ_1 donne

$$\nu_1 = \frac{(a_1 + b_1 + c_1) (c_2 X_3 Y_2 - c_2 X_2 Y_3 - b_2 X_3 Z_2 + a_2 Y_3 Z_2 + b_2 X_2 Z_3 - a_2 Y_2 Z_3)}{\text{Den}(P_1)}$$

$$\mu_1 = \frac{(a_2 + b_2 + c_2) (c_1 X_3 Y_2 - c_1 X_2 Y_3 - b_1 X_3 Z_2 + a_1 Y_3 Z_2 + b_1 X_2 Z_3 - a_1 Y_2 Z_3)}{\text{Den}(P_1)}$$

On déduit que:

$$P_1 = \left\{ \frac{b_2 c_1 X_2 X_3 - b_1 c_2 X_2 X_3 + a_1 c_2 X_3 Y_2 - a_2 c_1 X_2 Y_3 - a_1 b_2 X_3 Z_2 + a_1 a_2 Y_3 Z_2 + a_2 b_1 X_2 Z_3 - a_1 a_2 Y_2 Z_3}{\text{Den}(P_1)}, \right.$$

$$\frac{b_2 c_1 X_3 Y_2 - b_1 c_2 X_2 Y_3 - a_2 c_1 Y_2 Y_3 + a_1 c_2 Y_2 Y_3 - b_1 b_2 X_3 Z_2 + a_2 b_1 Y_3 Z_2 + b_1 b_2 X_2 Z_3 - a_1 b_2 Y_2 Z_3}{\text{Den}(P_1)},$$

$$\left. \frac{c_1 c_2 X_3 Y_2 - c_1 c_2 X_2 Y_3 - b_1 c_2 X_3 Z_2 + a_1 c_2 Y_3 Z_2 + b_2 c_1 X_2 Z_3 - a_2 c_1 Y_2 Z_3 + a_2 b_1 Z_2 Z_3 - a_1 b_2 Z_2 Z_3}{\text{Den}(P_1)} \right\}$$

avec

$$\begin{aligned} \text{Den}(P_1) = & b_2 c_1 X_2 X_3 - b_1 c_2 X_2 X_3 + b_2 c_1 X_3 Y_2 + a_1 c_2 X_3 Y_2 + c_1 c_2 X_3 Y_2 - a_2 c_1 X_2 Y_3 \\ & - b_1 c_2 X_2 Y_3 - c_1 c_2 X_2 Y_3 - a_2 c_1 Y_2 Y_3 + a_1 c_2 Y_2 Y_3 - a_1 b_2 X_3 Z_2 - b_1 b_2 X_3 Z_2 \\ & - b_1 c_2 X_3 Z_2 + a_1 a_2 Y_3 Z_2 + a_2 b_1 Y_3 Z_2 + a_1 c_2 Y_3 Z_2 + a_2 b_1 X_2 Z_3 + b_1 b_2 X_2 Z_3 \\ & + b_2 c_1 X_2 Z_3 - a_1 a_2 Y_2 Z_3 - a_1 b_2 Y_2 Z_3 - a_2 c_1 Y_2 Z_3 + a_2 b_1 Z_2 Z_3 - a_1 b_2 Z_2 Z_3 \end{aligned}$$

Dessin = Dessin $\cup \{P_2\} = \{A, B, C, M_1, M_2, M_3, N_1, N_2, N_3, P_1, P_2\}$

Détermination du point P_2 :

Soit P_2 le point $(N_2 M_3) \cap (N_3 M_1)$. Le point P_2 est composé.

Comme $P_2 \in (N_2 M_3)$, on a, en choisissant les inconnues ν_1

$$\overrightarrow{OP_2} = (1 - \nu_1) \overrightarrow{OM_3} + \nu_1 \overrightarrow{ON_2}$$

On déduit:

$$\overrightarrow{OP_2} = c(1) \overrightarrow{OA} + c(2) \overrightarrow{OB} + c(3) \overrightarrow{OC}$$

avec

$$c(1) = \frac{a_2 X_3 + b_2 X_3 + c_2 X_3 - b_2 \nu_1 X_3 - c_2 \nu_1 X_3 + a_2 \nu_1 Y_3 + a_2 \nu_1 Z_3}{(a_2 + b_2 + c_2) (X_3 + Y_3 + Z_3)}$$

$$c(2) = \frac{b_2 \nu_1 X_3 + a_2 Y_3 + b_2 Y_3 + c_2 Y_3 - a_2 \nu_1 Y_3 - c_2 \nu_1 Y_3 + b_2 \nu_1 Z_3}{(a_2 + b_2 + c_2) (X_3 + Y_3 + Z_3)}$$

$$c(3) = \frac{c_2 \nu_1 X_3 + c_2 \nu_1 Y_3 + a_2 Z_3 + b_2 Z_3 + c_2 Z_3 - a_2 \nu_1 Z_3 - b_2 \nu_1 Z_3}{(a_2 + b_2 + c_2) (X_3 + Y_3 + Z_3)}$$

Comme $P_2 \in (N_3 M_1)$, on a, en choisissant les inconnues μ_1

$$\overrightarrow{OP_2} = (1 - \mu_1) \overrightarrow{OM_1} + \mu_1 \overrightarrow{ON_3}$$

On déduit:

$$\overrightarrow{OP_2} = d(1) \overrightarrow{OA} + d(2) \overrightarrow{OB} + d(3) \overrightarrow{OC}$$

avec

$$\begin{aligned} d(1) &= \frac{a_3 X_1 + b_3 X_1 + c_3 X_1 - b_3 \mu_1 X_1 - c_3 \mu_1 X_1 + a_3 \mu_1 Y_1 + a_3 \mu_1 Z_1}{(a_3 + b_3 + c_3) (X_1 + Y_1 + Z_1)} \\ d(2) &= \frac{b_3 \mu_1 X_1 + a_3 Y_1 + b_3 Y_1 + c_3 Y_1 - a_3 \mu_1 Y_1 - c_3 \mu_1 Y_1 + b_3 \mu_1 Z_1}{(a_3 + b_3 + c_3) (X_1 + Y_1 + Z_1)} \\ d(3) &= \frac{c_3 \mu_1 X_1 + c_3 \mu_1 Y_1 + a_3 Z_1 + b_3 Z_1 + c_3 Z_1 - a_3 \mu_1 Z_1 - b_3 \mu_1 Z_1}{(a_3 + b_3 + c_3) (X_1 + Y_1 + Z_1)} \end{aligned}$$

La résolution du système linéaire d'inconnues ν_1, μ_1 donne

$$\begin{aligned} \nu_1 &= \frac{(a_2 + b_2 + c_2) (c_3 X_3 Y_1 + c_3 X_1 Y_3 + b_3 X_3 Z_1 - a_3 Y_3 Z_1 - b_3 X_1 Z_3 + a_3 Y_1 Z_3)}{Den(P_2)} \\ \mu_1 &= \frac{(a_3 + b_3 + c_3) (c_2 X_3 Y_1 + c_2 X_1 Y_3 + b_2 X_3 Z_1 - a_2 Y_3 Z_1 - b_2 X_1 Z_3 + a_2 Y_1 Z_3)}{Den(P_2)} \end{aligned}$$

On déduit que:

$$\begin{aligned} P_2 &= \left\{ \frac{b_3 c_2 X_1 X_3 - b_2 c_3 X_1 X_3 - a_3 c_2 X_3 Y_1 + a_2 c_3 X_1 Y_3 + a_3 b_2 X_3 Z_1 - a_2 a_3 Y_3 Z_1 - a_2 b_3 X_1 Z_3 + a_2 a_3 Y_1 Z_3}{Den(P_2)} \right. \\ &\quad \left. - \frac{b_2 c_3 X_3 Y_1 + b_3 c_2 X_1 Y_3 - a_3 c_2 Y_1 Y_3 + a_2 c_3 Y_1 Y_3 + b_2 b_3 X_3 Z_1 - a_2 b_3 Y_3 Z_1 - b_2 b_3 X_1 Z_3 + a_3 b_2 Y_1 Z_3}{Den(P_2)} \right. \\ &\quad \left. - \frac{-c_2 c_3 X_3 Y_1 + c_2 c_3 X_1 Y_3 + b_3 c_2 X_3 Z_1 - a_3 c_2 Y_3 Z_1 - b_2 c_3 X_1 Z_3 + a_2 c_3 Y_1 Z_3 + a_3 b_2 Z_1 Z_3 - a_2 b_3 Z_1 Z_3}{Den(P_2)} \right\} \end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned} Den(P_2) &= b_3 c_2 X_1 X_3 - b_2 c_3 X_1 X_3 - a_3 c_2 X_3 Y_1 - b_2 c_3 X_3 Y_1 - c_2 c_3 X_3 Y_1 + b_3 c_2 X_1 Y_3 \\ &\quad + a_2 c_3 X_1 Y_3 + c_2 c_3 X_1 Y_3 - a_3 c_2 Y_1 Y_3 + a_2 c_3 Y_1 Y_3 + a_3 b_2 X_3 Z_1 + b_2 b_3 X_3 Z_1 \\ &\quad + b_3 c_2 X_3 Z_1 - a_2 a_3 Y_3 Z_1 - a_2 b_3 Y_3 Z_1 - a_3 c_2 Y_3 Z_1 - a_2 b_3 X_1 Z_3 - b_2 b_3 X_1 Z_3 \\ &\quad - b_2 c_3 X_1 Z_3 + a_2 a_3 Y_1 Z_3 + a_3 b_2 Y_1 Z_3 + a_2 c_3 Y_1 Z_3 + a_3 b_2 Z_1 Z_3 - a_2 b_3 Z_1 Z_3 \end{aligned}$$

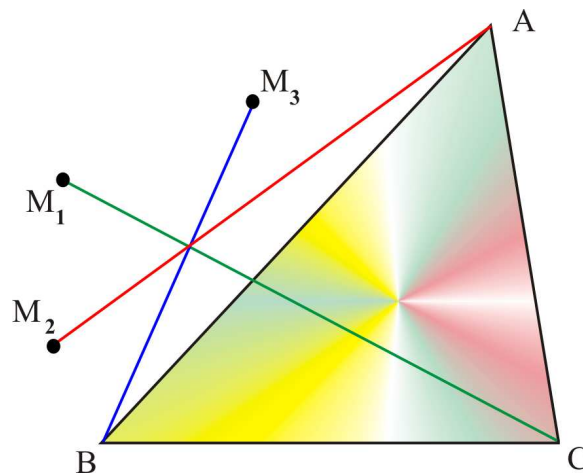
On a $P_1 = P_2$ lorsque les coordonnées barycentriques sont identiques. En formant leur différence, on obtient

$$\begin{aligned} 0 &= b_2 c_1 c_3 X_2 X_3 Y_1 - b_1 c_2 c_3 X_2 X_3 Y_1 + b_3 c_1 c_2 X_1 X_3 Y_2 - b_2 c_1 c_3 X_1 X_3 Y_2 - a_3 c_1 c_2 X_3 Y_1 Y_2 \\ &\quad + a_1 c_2 c_3 X_3 Y_1 Y_2 - b_3 c_1 c_2 X_1 X_2 Y_3 + b_1 c_2 c_3 X_1 X_2 Y_3 + a_3 c_1 c_2 X_2 Y_1 Y_3 - a_2 c_1 c_3 X_2 Y_1 Y_3 \\ &\quad + a_2 c_1 c_3 X_1 Y_2 Y_3 - a_1 c_2 c_3 X_1 Y_2 Y_3 - b_2 b_3 c_1 X_2 X_3 Z_1 + b_1 b_3 c_2 X_2 X_3 Z_1 + a_3 b_2 c_1 X_3 Y_2 Z_1 \\ &\quad - a_1 b_3 c_2 X_3 Y_2 Z_1 + a_2 b_3 c_1 X_2 Y_3 Z_1 - a_3 b_1 c_2 X_2 Y_3 Z_1 - a_2 a_3 c_1 Y_2 Y_3 Z_1 + a_1 a_3 c_2 Y_2 Y_3 Z_1 \\ &\quad - b_1 b_3 c_2 X_1 X_3 Z_2 + b_1 b_2 c_3 X_1 X_3 Z_2 + a_3 b_1 c_2 X_3 Y_1 Z_2 - a_1 b_2 c_3 X_3 Y_1 Z_2 + a_1 b_3 c_2 X_1 Y_3 Z_2 \\ &\quad - a_2 b_1 c_3 X_1 Y_3 Z_2 - a_1 a_3 c_2 Y_1 Y_3 Z_2 + a_1 a_2 c_3 Y_1 Y_3 Z_2 - a_3 b_1 b_2 X_3 Z_1 Z_2 + a_1 b_2 b_3 X_3 Z_1 Z_2 \\ &\quad + a_2 a_3 b_1 Y_3 Z_1 Z_2 - a_1 a_2 b_3 Y_3 Z_1 Z_2 + b_2 b_3 c_1 X_1 X_2 Z_3 - b_1 b_2 c_3 X_1 X_2 Z_3 - a_3 b_2 c_1 X_2 Y_1 Z_3 \\ &\quad + a_2 b_1 c_3 X_2 Y_1 Z_3 - a_2 b_3 c_1 X_1 Y_2 Z_3 + a_1 b_2 c_3 X_1 Y_2 Z_3 + a_2 a_3 c_1 Y_1 Y_2 Z_3 - a_1 a_2 c_3 Y_1 Y_2 Z_3 \\ &\quad + a_3 b_1 b_2 X_2 Z_1 Z_3 - a_2 b_1 b_3 X_2 Z_1 Z_3 - a_1 a_3 b_2 Y_2 Z_1 Z_3 + a_1 a_2 b_3 Y_2 Z_1 Z_3 + a_2 b_1 b_3 X_1 Z_2 Z_3 \\ &\quad - a_1 b_2 b_3 X_1 Z_2 Z_3 - a_2 a_3 b_1 Y_1 Z_2 Z_3 + a_1 a_3 b_2 Y_1 Z_2 Z_3 \end{aligned}$$

12.3 Céliennes dans un cas simple

Exercice 12.3.1

Soit ABC un triangle et M_i pour $i = 1, 2, 3$ des points de coordonnées barycentriques $\{X_i, Y_i, Z_i\}$. Montrer que les droites (AM_2) , (BM_3) , (CM_1) se coupent en un même point si et seulement si $X_3 Y_1 Z_2 = X_1 Y_2 Z_3$.

**Solution:**

Dessin = $\{A, B, C, M_1, M_2, M_3\}$

Le repère barycentrique choisi est A, B, C .

Les points composés sont M_1, M_2, M_3 .

Les coordonnées barycentriques des points composés sont:

$$M_1 = \left\{ \frac{X_1}{X_1 + Y_1 + Z_1}, \frac{Y_1}{X_1 + Y_1 + Z_1}, \frac{Z_1}{X_1 + Y_1 + Z_1} \right\}$$

$$M_2 = \left\{ \frac{X_2}{X_2 + Y_2 + Z_2}, \frac{Y_2}{X_2 + Y_2 + Z_2}, \frac{Z_2}{X_2 + Y_2 + Z_2} \right\}$$

$$M_3 = \left\{ \frac{X_3}{X_3 + Y_3 + Z_3}, \frac{Y_3}{X_3 + Y_3 + Z_3}, \frac{Z_3}{X_3 + Y_3 + Z_3} \right\}$$

Dessin = $\text{Dessin} \cup \{P_1\} = \{A, B, C, M_1, M_2, M_3, P_1\}$

Détermination du point P_1 :

Soit P_1 le point $(AM_2) \cap (BM_3)$. Le point P_1 est composé.

Comme $P_1 \in (AM_2)$, on a, en choisissant les inconnues ν_1

$$\overrightarrow{OP_1} = \nu_1 \overrightarrow{OA} + (1 - \nu_1) \overrightarrow{OM_2}$$

On déduit:

$$\overrightarrow{OP_1} = a(1) \overrightarrow{OA} + a(2) \overrightarrow{OB} + a(3) \overrightarrow{OC}$$

avec

$$a(1) = \frac{X_2 + \nu_1 Y_2 + \nu_1 Z_2}{X_2 + Y_2 + Z_2}$$

$$a(2) = \frac{(1 - \nu_1) Y_2}{X_2 + Y_2 + Z_2}$$

$$a(3) = \frac{(1 - \nu_1) Z_2}{X_2 + Y_2 + Z_2}$$

Comme $P_1 \in (BM_3)$, on a, en choisissant les inconnues μ_1

$$\overrightarrow{OP_1} = \mu_1 \overrightarrow{OB} + (1 - \mu_1) \overrightarrow{OM_3}$$

On déduit:

$$\overrightarrow{OP_1} = b(1) \overrightarrow{OA} + b(2) \overrightarrow{OB} + b(3) \overrightarrow{OC}$$

avec

$$b(1) = \frac{(1 - \mu_1) X_3}{X_3 + Y_3 + Z_3}$$

$$b(2) = \frac{\mu_1 X_3 + Y_3 + \mu_1 Z_3}{X_3 + Y_3 + Z_3}$$

$$b(3) = \frac{(1 - \mu_1) Z_3}{X_3 + Y_3 + Z_3}$$

La résolution du système linéaire d'inconnues ν_1, μ_1 donne

$$\nu_1 = \frac{X_3 Z_2 - X_2 Z_3}{X_3 Z_2 + (Y_2 + Z_2) Z_3} \quad \mu_1 = \frac{-Y_3 Z_2 + Y_2 Z_3}{X_3 Z_2 + Y_2 Z_3 + Z_2 Z_3}$$

On déduit que:

$$P_1 = \left\{ \frac{X_3 Z_2}{X_3 Z_2 + Y_2 Z_3 + Z_2 Z_3}, \frac{Y_2 Z_3}{X_3 Z_2 + Y_2 Z_3 + Z_2 Z_3}, \frac{Z_2 Z_3}{X_3 Z_2 + Y_2 Z_3 + Z_2 Z_3} \right\}$$

Dessin = Dessin $\cup \{P_2\} = \{A, B, C, M_1, M_2, M_3, P_1, P_2\}$

Détermination du point P_2 :

Soit P_2 le point $(BM_3) \cap (CM_1)$. Le point P_2 est composé.

Comme $P_2 \in (BM_3)$, on a, en choisissant les inconnues ν_1

$$\overrightarrow{OP_2} = \nu_1 \overrightarrow{OB} + (1 - \nu_1) \overrightarrow{OM_3}$$

On déduit:

$$\overrightarrow{OP_2} = c(1) \overrightarrow{OA} + c(2) \overrightarrow{OB} + c(3) \overrightarrow{OC}$$

avec

$$c(1) = \frac{(1 - \nu_1) X_3}{X_3 + Y_3 + Z_3}$$

$$c(2) = \frac{\nu_1 X_3 + Y_3 + \nu_1 Z_3}{X_3 + Y_3 + Z_3}$$

$$c(3) = \frac{(1 - \nu_1) Z_3}{X_3 + Y_3 + Z_3}$$

Comme $P_2 \in (CM_1)$, on a, en choisissant les inconnues μ_1

$$\overrightarrow{OP_2} = \mu_1 \overrightarrow{OC} + (1 - \mu_1) \overrightarrow{OM_1}$$

On déduit:

$$\overrightarrow{OP_2} = d(1) \overrightarrow{OA} + d(2) \overrightarrow{OB} + d(3) \overrightarrow{OC}$$

avec

$$\begin{aligned} d(1) &= \frac{(1 - \mu_1) X_1}{X_1 + Y_1 + Z_1} \\ d(2) &= \frac{(1 - \mu_1) Y_1}{X_1 + Y_1 + Z_1} \\ d(3) &= \frac{\mu_1 X_1 + \mu_1 Y_1 + Z_1}{X_1 + Y_1 + Z_1} \end{aligned}$$

La résolution du système linéaire d'inconnues ν_1, μ_1 donne

$$\nu_1 = \frac{X_3 Y_1 - X_1 Y_3}{X_3 Y_1 + X_1 X_3 + X_1 Z_3} \quad \mu_1 = \frac{-X_3 Z_1 + X_1 Z_3}{X_3 Y_1 + X_1 X_3 + X_1 Z_3}$$

On déduit que:

$$P_2 = \left\{ \frac{X_1 X_3}{X_1 X_3 + X_3 Y_1 + X_1 Z_3}, \frac{X_3 Y_1}{X_1 X_3 + X_3 Y_1 + X_1 Z_3}, \frac{X_1 Z_3}{X_1 X_3 + X_3 Y_1 + X_1 Z_3} \right\}$$

Dessin = Dessin $\cup \{P_3\} = \{A, B, C, M_1, M_2, M_3, P_1, P_2, P_3\}$

Détermination du point P_3 :

Soit P_3 le point $(CM_1) \cap (AM_2)$. Le point P_3 est composé.

Comme $P_3 \in (CM_1)$, on a, en choisissant les inconnues ν_1

$$\overrightarrow{OP_3} = \nu_1 \overrightarrow{OC} + (1 - \nu_1) \overrightarrow{OM_1}$$

On déduit:

$$\overrightarrow{OP_3} = e(1) \overrightarrow{OA} + e(2) \overrightarrow{OB} + e(3) \overrightarrow{OC}$$

avec

$$\begin{aligned} e(1) &= \frac{(1 - \nu_1) X_1}{X_1 + Y_1 + Z_1} \\ e(2) &= \frac{(1 - \nu_1) Y_1}{X_1 + Y_1 + Z_1} \\ e(3) &= \frac{\nu_1 X_1 + \nu_1 Y_1 + Z_1}{X_1 + Y_1 + Z_1} \end{aligned}$$

Comme $P_3 \in (AM_2)$, on a, en choisissant les inconnues μ_1

$$\overrightarrow{OP_3} = \mu_1 \overrightarrow{OA} + (1 - \mu_1) \overrightarrow{OM_2}$$

On déduit:

$$\overrightarrow{OP_3} = f(1) \overrightarrow{OA} + f(2) \overrightarrow{OB} + f(3) \overrightarrow{OC}$$

avec

$$\begin{aligned} f(1) &= \frac{X_2 + \mu_1 Y_2 + \mu_1 Z_2}{X_2 + Y_2 + Z_2} \\ f(2) &= \frac{(1 - \mu_1) Y_2}{X_2 + Y_2 + Z_2} \end{aligned}$$

$$f(3) = \frac{(1 - \mu_1) Z_2}{X_2 + Y_2 + Z_2}$$

La résolution du système linéaire d'inconnues ν_1, μ_1 donne

$$\nu_1 = \frac{-Y_2 Z_1 + Y_1 Z_2}{X_1 Y_2 + Y_1 (Y_2 + Z_2)} \quad \mu_1 = \frac{-X_2 Y_1 + X_1 Y_2}{X_1 Y_2 + Y_1 Y_2 + Y_1 Z_2}$$

On déduit que:

$$P_3 = \left\{ \frac{X_1 Y_2}{X_1 Y_2 + Y_1 Y_2 + Y_1 Z_2}, \frac{Y_1 Y_2}{X_1 Y_2 + Y_1 Y_2 + Y_1 Z_2}, \frac{Y_1 Z_2}{X_1 Y_2 + Y_1 Y_2 + Y_1 Z_2} \right\}$$

On a $P_1 = P_2 = P_3$ si et seulement si les coordonnées barycentriques de P_1 sont identiques aux coordonnées barycentriques de P_2 , soit en formant leur différence

$$\begin{aligned} & \frac{(X_3 + Z_3) (-X_3 Y_1 Z_2 + X_1 Y_2 Z_3)}{(X_1 X_3 + X_3 Y_1 + X_1 Z_3) (X_3 Z_2 + Y_2 Z_3 + Z_2 Z_3)} \\ & \frac{Z_3 (X_3 Y_1 Z_2 - X_1 Y_2 Z_3)}{(X_1 X_3 + X_3 Y_1 + X_1 Z_3) (X_3 Z_2 + Y_2 Z_3 + Z_2 Z_3)} \\ & \frac{X_3 (X_3 Y_1 Z_2 - X_1 Y_2 Z_3)}{(X_1 X_3 + X_3 Y_1 + X_1 Z_3) (X_3 Z_2 + Y_2 Z_3 + Z_2 Z_3)} \end{aligned}$$

qui se réduit à

$$X_3 Y_1 Z_2 - X_1 Y_2 Z_3 = 0$$

CHAPITRE

13

Triangle orthique

13 Triangle orthique

13.1 Triangle orthique, Cercle de Taylor

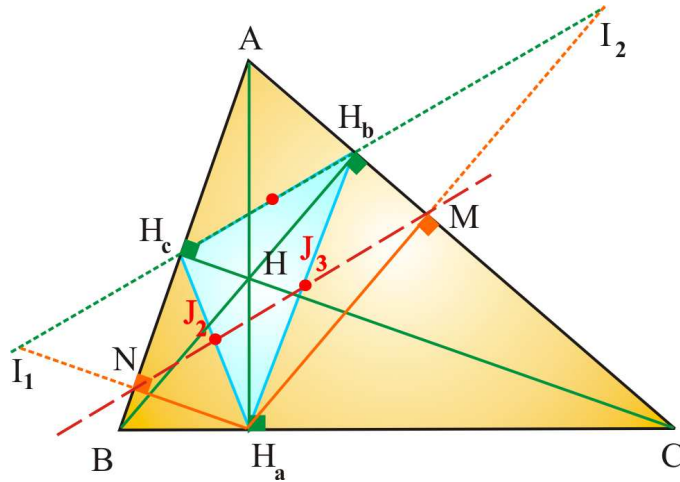
Exercice 13.1.1

Soit ABC un triangle, H son orthocentre, H_a, H_b, H_c les projections orthogonales de H sur les cotés (BC) , (AC) , (AB) . Le point H_a se projette orthogonalement sur le coté (AB) en N et sur le coté (AC) en M . On désigne par I_1 (resp. I_2) le symétrique orthogonal de H_a par rapport au coté (AB) (resp. (AC)).

Le triangle $H_aH_bH_c$ est appelé triangle orthique.

1. Calculer les coordonnées barycentriques des points mentionnés. Calculer $H_aH_b^2$, $H_aH_c^2$, $H_bH_c^2$.
2. Montrer que les points I_1, I_2, H_b, H_c sont alignés.
3. Soient J_1, J_2, J_3 les milieux des cotés du triangle orthique ($J_1 \in (H_bH_c)$, $J_2 \in (H_aH_c)$, $J_3 \in (H_aH_b)$). Montrer que J_2, J_3, M, N sont alignés.
4. Soient P, Q les projetés orthogonaux de H_b sur (AB) et (BC) , et R, S les projetés orthogonaux de H_c sur (BC) et (AC) . Montrer que
 - (a) les vecteurs $\overrightarrow{PS}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont colinéaires.
 - (b) les vecteurs $\overrightarrow{NR}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires.
 - (c) les vecteurs $\overrightarrow{MQ}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont colinéaires.
 - (d) Calculer PS^2 , NR^2 , MQ^2 , MP^2 , H_aR^2 , H_aQ^2 , H_bS^2 , H_bM^2 , H_cP^2 , H_cN^2 .
5. Déterminer les coordonnées barycentriques du centre C_T du cercle passant par R, N, P . Calculer le rayon R_T^2 .
6. Montrer que les six points M, N, P, Q, R, S sont sur un même cercle (appelé cercle de Taylor).

Solution:



Dessin = $\{A, B, C, H, H_a, H_b, H_c\}$

Le repère barycentrique choisi est A, B, C .

Les points composés sont H, H_a, H_b, H_c .

On déduit les coordonnées barycentriques des points composés:

$$H = \left\{ \frac{(a^2 + b^2 - c^2)(a^2 - b^2 + c^2)}{(-a + b + c)(a + b - c)(a - b + c)(a + b + c)}, \right. \\ \left. \frac{(-a^2 + b^2 + c^2)(a^2 + b^2 - c^2)}{(-a + b + c)(a + b - c)(a - b + c)(a + b + c)}, \right. \\ \left. \frac{(-a^2 + b^2 + c^2)(a^2 - b^2 + c^2)}{(-a + b + c)(a + b - c)(a - b + c)(a + b + c)} \right\}$$

$$H_a = \left\{ 0, \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2a^2}, \frac{a^2 - b^2 + c^2}{2a^2} \right\}$$

$$H_b = \left\{ \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2b^2}, 0, \frac{-a^2 + b^2 + c^2}{2b^2} \right\}$$

$$H_c = \left\{ \frac{a^2 - b^2 + c^2}{2c^2}, \frac{-a^2 + b^2 + c^2}{2c^2}, 0 \right\}$$

La distance $H_a H_b^2$ est égale à

$$H_a H_b^2 = \frac{c^2 (a^2 + b^2 - c^2)^2}{4a^2 b^2}$$

La distance $H_a H_c^2$ est égale à

$$H_a H_c^2 = \frac{b^2 (a^2 - b^2 + c^2)^2}{4a^2 c^2}$$

La distance $H_b H_c^2$ est égale à

$$H_b H_c^2 = \frac{a^2 (a^2 - b^2 - c^2)^2}{4b^2 c^2}$$

Dessin = $\text{Dessin} \cup \{M, N\} = \{A, B, C, H, H_a, H_b, H_c, M, N\}$

Le repère barycentrique choisi est A, B, C .

Les points composés sont N, M .

La projection du point H_a sur la droite (AB) est le point N de coordonnées barycentriques

$$N = \left\{ \frac{(a^2 - b^2 + c^2)^2}{4a^2c^2}, \frac{(a+b-c)(a-b+c)(-a+b+c)(a+b+c)}{4a^2c^2}, 0 \right\}$$

La projection du point H_a sur la droite (AC) est le point M de coordonnées barycentriques

$$M = \left\{ \frac{(a^2 + b^2 - c^2)^2}{4a^2b^2}, 0, \frac{(a-b+c)(a+b-c)(-a+b+c)(a+b+c)}{4a^2b^2} \right\}$$

Dessin = Dessin $\cup \{I_1, I_2\} = \{A, B, C, H, H_a, H_b, H_c, I_1, I_2, M, N\}$

Les points composés sont I_2, I_1 .

On a les équations vectorielles

$$\begin{aligned} \vec{0} &= \overrightarrow{H_a M} - \overrightarrow{M I_2} \\ \vec{0} &= \overrightarrow{H_a N} - \overrightarrow{N I_1} \end{aligned}$$

et, par découpages automatiques, le système linéaire

$$\begin{aligned} \vec{0} &= -\overrightarrow{O H_a} - \overrightarrow{O I_2} + 2 \overrightarrow{O M} \\ \vec{0} &= -\overrightarrow{O H_a} - \overrightarrow{O I_1} + 2 \overrightarrow{O N} \end{aligned}$$

Tenant compte des points composés précédents, on déduit:

$$\begin{aligned} I_1 &= \left\{ \frac{(a^2 - b^2 + c^2)^2}{2a^2c^2}, \frac{-a^4 + 2a^2b^2 - b^4 + a^2c^2 + b^2c^2}{2a^2c^2}, \frac{-a^2 + b^2 - c^2}{2a^2} \right\} \\ I_2 &= \left\{ \frac{(a^2 + b^2 - c^2)^2}{2a^2b^2}, \frac{-a^2 - b^2 + c^2}{2a^2}, \frac{-a^4 + 2a^2b^2 - b^4 + a^2c^2 + b^2c^2}{2a^2b^2} \right\} \end{aligned}$$

Calculons le vecteur $\overrightarrow{H_c H_b}$. On a:

$$\overrightarrow{H_c H_b} = a(1) \overrightarrow{O A} + a(2) \overrightarrow{O B} + a(3) \overrightarrow{O C}$$

avec

$$\begin{aligned} a(1) &= \frac{(b-c)(b+c)(-a^2+b^2+c^2)}{2b^2c^2} \\ a(2) &= \frac{a^2-b^2-c^2}{2c^2} \\ a(3) &= \frac{-a^2+b^2+c^2}{2b^2} \end{aligned}$$

Calculons le vecteur $\overrightarrow{I_1 I_2}$. On a:

$$\overrightarrow{I_1 I_2} = b(1) \overrightarrow{O A} + b(2) \overrightarrow{O B} + b(3) \overrightarrow{O C}$$

avec

$$b(1) = \frac{(-a+b+c)(b-c)(a+b-c)(a-b+c)(b+c)(a+b+c)}{2a^2b^2c^2}$$

$$b(2) = \frac{(a-b-c)(a+b-c)(a-b+c)(a+b+c)}{2a^2c^2}$$

$$b(3) = \frac{(-a+b+c)(a+b-c)(a-b+c)(a+b+c)}{2a^2b^2}$$

On a ainsi

$$\overrightarrow{H_cH_b} = \frac{a^2(a^2-b^2-c^2)}{a^4-2a^2b^2+b^4-2a^2c^2-2b^2c^2+c^4} \overrightarrow{I_1I_2}$$

Calculons le vecteur $\overrightarrow{H_cH_b}$. On a:

$$\overrightarrow{H_cH_b} = c(1) \overrightarrow{OA} + c(2) \overrightarrow{OB} + c(3) \overrightarrow{OC}$$

avec

$$c(1) = \frac{(b-c)(b+c)(-a^2+b^2+c^2)}{2b^2c^2}$$

$$c(2) = \frac{a^2-b^2-c^2}{2c^2}$$

$$c(3) = \frac{-a^2+b^2+c^2}{2b^2}$$

Calculons le vecteur $\overrightarrow{I_1H_c}$. On a:

$$\overrightarrow{I_1H_c} = d(1) \overrightarrow{OA} + d(2) \overrightarrow{OB} + d(3) \overrightarrow{OC}$$

avec

$$d(1) = \frac{(b-c)(b+c)(a^2-b^2+c^2)}{2a^2c^2}$$

$$d(2) = \frac{b^2(-a^2+b^2-c^2)}{2a^2c^2}$$

$$d(3) = \frac{a^2-b^2+c^2}{2a^2}$$

On a ainsi

$$\overrightarrow{H_cH_b} = \frac{a^2(-a^2+b^2+c^2)}{b^2(a^2-b^2+c^2)} \overrightarrow{I_1H_c}$$

Dessin = Dessin $\cup \{J_1, J_2, J_3\} = \{A, B, C, H, H_a, H_b, H_c, I_1, I_2, J_1, J_2, J_3, M, N\}$

Les points composés sont J_1, J_2, J_3 .

On a les équations vectorielles

$$\begin{aligned} \vec{0} &= -\overrightarrow{H_bJ_1} + \overrightarrow{J_1H_c} \\ \vec{0} &= -\overrightarrow{H_aJ_2} + \overrightarrow{J_2H_c} \\ \vec{0} &= -\overrightarrow{H_bJ_3} + \overrightarrow{J_3H_a} \end{aligned}$$

et, par découpages automatiques, le système linéaire

$$\begin{aligned} \vec{0} &= \overrightarrow{OH_b} + \overrightarrow{OH_c} - 2 \overrightarrow{OJ_1} \\ \vec{0} &= \overrightarrow{OH_a} + \overrightarrow{OH_c} - 2 \overrightarrow{OJ_2} \\ \vec{0} &= \overrightarrow{OH_a} + \overrightarrow{OH_b} - 2 \overrightarrow{OJ_3} \end{aligned}$$

Tenant compte des points composés précédents, on déduit:

$$\begin{aligned} J_1 &= \left\{ \frac{a^2 b^2 - b^4 + a^2 c^2 + 2 b^2 c^2 - c^4}{4 b^2 c^2}, \frac{-a^2 + b^2 + c^2}{4 c^2}, \frac{-a^2 + b^2 + c^2}{4 b^2} \right\} \\ J_2 &= \left\{ \frac{a^2 - b^2 + c^2}{4 c^2}, \frac{-(a^4 - a^2 b^2 - 2 a^2 c^2 - b^2 c^2 + c^4)}{4 a^2 c^2}, \frac{a^2 - b^2 + c^2}{4 a^2} \right\} \\ J_3 &= \left\{ \frac{a^2 + b^2 - c^2}{4 b^2}, \frac{a^2 + b^2 - c^2}{4 a^2}, \frac{-(a^4 - 2 a^2 b^2 + b^4 - a^2 c^2 - b^2 c^2)}{4 a^2 b^2} \right\} \end{aligned}$$

Calculons le vecteur $\overrightarrow{J_2 J_3}$. On a:

$$\overrightarrow{J_2 J_3} = e(1) \overrightarrow{OA} + e(2) \overrightarrow{OB} + e(3) \overrightarrow{OC}$$

avec

$$\begin{aligned} e(1) &= \frac{(b-c)(b+c)(-a^2+b^2+c^2)}{4 b^2 c^2} \\ e(2) &= \frac{a^2 - b^2 - c^2}{4 c^2} \\ e(3) &= \frac{-a^2 + b^2 + c^2}{4 b^2} \end{aligned}$$

Calculons le vecteur $\overrightarrow{MN}$. On a:

$$\overrightarrow{MN} = f(1) \overrightarrow{OA} + f(2) \overrightarrow{OB} + f(3) \overrightarrow{OC}$$

avec

$$\begin{aligned} f(1) &= \frac{(a-b-c)(b-c)(a+b-c)(a-b+c)(b+c)(a+b+c)}{4 a^2 b^2 c^2} \\ f(2) &= \frac{(-a+b+c)(a+b-c)(a-b+c)(a+b+c)}{4 a^2 c^2} \\ f(3) &= \frac{(a-b-c)(a+b-c)(a-b+c)(a+b+c)}{4 a^2 b^2} \end{aligned}$$

On a ainsi

$$\overrightarrow{J_2 J_3} = \frac{a^2 (-a^2 + b^2 + c^2)}{a^4 - 2 a^2 b^2 + b^4 - 2 a^2 c^2 - 2 b^2 c^2 + c^4} \overrightarrow{MN}$$

Calculons le vecteur $\overrightarrow{J_2 J_3}$. On a:

$$\overrightarrow{J_2 J_3} = g(1) \overrightarrow{OA} + g(2) \overrightarrow{OB} + g(3) \overrightarrow{OC}$$

avec

$$\begin{aligned} g(1) &= \frac{(b-c)(b+c)(-a^2+b^2+c^2)}{4 b^2 c^2} \\ g(2) &= \frac{a^2 - b^2 - c^2}{4 c^2} \\ g(3) &= \frac{-a^2 + b^2 + c^2}{4 b^2} \end{aligned}$$

Calculons le vecteur $\overrightarrow{NJ_2}$. On a:

$$\overrightarrow{NJ_2} = h(1) \overrightarrow{OA} + h(2) \overrightarrow{OB} + h(3) \overrightarrow{OC}$$

avec

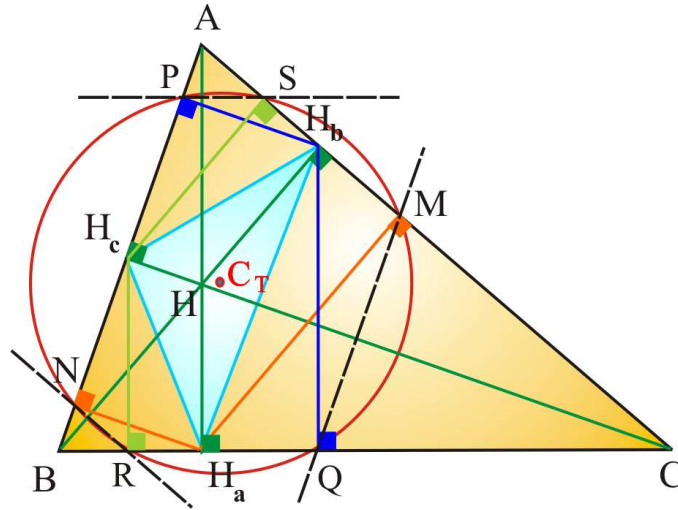
$$h(1) = \frac{(b-c)(b+c)(a^2-b^2+c^2)}{4a^2c^2}$$

$$h(2) = \frac{b^2(-a^2+b^2-c^2)}{4a^2c^2}$$

$$h(3) = \frac{a^2-b^2+c^2}{4a^2}$$

On a ainsi

$$\overrightarrow{J_2J_3} = \frac{a^2(-a^2+b^2+c^2)}{b^2(a^2-b^2+c^2)} \overrightarrow{NJ_2}$$



Dessin = Dessin $\cup \{P, Q, R, S\} = \{A, B, C, H, H_a, H_b, H_c, I_1, I_2, J_1, J_2, J_3, M, N, P, Q, R, S\}$
 Les points composés sont P, R, S, Q .

La projection du point H_b sur la droite (AB) est le point P de coordonnées barycentriques

$$P = \left\{ \frac{(a+b-c)(a-b+c)(-a+b+c)(a+b+c)}{4b^2c^2}, \frac{(-a^2+b^2+c^2)^2}{4b^2c^2}, 0 \right\}$$

La projection du point H_b sur la droite (BC) est le point Q de coordonnées barycentriques

$$Q = \left\{ 0, \frac{(a^2+b^2-c^2)^2}{4a^2b^2}, \frac{(-a+b+c)(a+b-c)(a-b+c)(a+b+c)}{4a^2b^2} \right\}$$

La projection du point H_c sur la droite (AC) est le point S de coordonnées barycentriques

$$S = \left\{ \frac{(a-b+c)(a+b-c)(-a+b+c)(a+b+c)}{4b^2c^2}, 0, \frac{(-a^2+b^2+c^2)^2}{4b^2c^2} \right\}$$

La projection du point H_c sur la droite (BC) est le point R de coordonnées barycentriques

$$R = \left\{ 0, \frac{(-a+b+c)(a+b-c)(a-b+c)(a+b+c)}{4a^2c^2}, \frac{(a^2-b^2+c^2)^2}{4a^2c^2} \right\}$$

Calculons le vecteur $\overrightarrow{PS}$. On a:

$$\overrightarrow{PS} = i(1) \overrightarrow{OA} + i(2) \overrightarrow{OB} + i(3) \overrightarrow{OC}$$

avec

$$i(1) = 0$$

$$i(2) = \frac{-(-a^2+b^2+c^2)^2}{4b^2c^2}$$

$$i(3) = \frac{(-a^2+b^2+c^2)^2}{4b^2c^2}$$

Calculons le vecteur $\overrightarrow{BC}$. On a:

$$\overrightarrow{BC} = j(1) \overrightarrow{OA} + j(2) \overrightarrow{OB} + j(3) \overrightarrow{OC}$$

avec

$$j(1) = 0$$

$$j(2) = -1$$

$$j(3) = 1$$

On a ainsi

$$\overrightarrow{PS} = \frac{(-a^2+b^2+c^2)^2}{4b^2c^2} \overrightarrow{BC}$$

Calculons le vecteur $\overrightarrow{NR}$. On a:

$$\overrightarrow{NR} = k(1) \overrightarrow{OA} + k(2) \overrightarrow{OB} + k(3) \overrightarrow{OC}$$

avec

$$k(1) = \frac{-(a^2-b^2+c^2)^2}{4a^2c^2}$$

$$k(2) = 0$$

$$k(3) = \frac{(a^2-b^2+c^2)^2}{4a^2c^2}$$

Calculons le vecteur $\overrightarrow{AC}$. On a:

$$\overrightarrow{AC} = l(1) \overrightarrow{OA} + l(2) \overrightarrow{OB} + l(3) \overrightarrow{OC}$$

avec

$$l(1) = -1$$

$$l(2) = 0$$

$$l(3) = 1$$

On a ainsi

$$\overrightarrow{NR} = \frac{(a^2 - b^2 + c^2)^2}{4a^2c^2} \overrightarrow{AC}$$

Calculons le vecteur $\overrightarrow{MQ}$. On a:

$$\overrightarrow{MQ} = m(1) \overrightarrow{OA} + m(2) \overrightarrow{OB} + m(3) \overrightarrow{OC}$$

avec

$$\begin{aligned} m(1) &= \frac{-(a^2 + b^2 - c^2)^2}{4a^2b^2} \\ m(2) &= \frac{(a^2 + b^2 - c^2)^2}{4a^2b^2} \\ m(3) &= 0 \end{aligned}$$

Calculons le vecteur $\overrightarrow{AB}$. On a:

$$\overrightarrow{AB} = n(1) \overrightarrow{OA} + n(2) \overrightarrow{OB} + n(3) \overrightarrow{OC}$$

avec

$$\begin{aligned} n(1) &= -1 \\ n(2) &= 1 \\ n(3) &= 0 \end{aligned}$$

On a ainsi

$$\overrightarrow{MQ} = \frac{(a^2 + b^2 - c^2)^2}{4a^2b^2} \overrightarrow{AB}$$

La distance PS^2 est égale à

$$PS^2 = \frac{a^2(a^2 - b^2 - c^2)^4}{16b^4c^4}$$

La distance NR^2 est égale à

$$NR^2 = \frac{b^2(a^2 - b^2 + c^2)^4}{16a^4c^4}$$

La distance MQ^2 est égale à

$$MQ^2 = \frac{c^2(a^2 + b^2 - c^2)^4}{16a^4b^4}$$

La distance H_aR^2 est égale à

$$H_aR^2 = \frac{(a^2 - b^2 - c^2)^2(a^2 - b^2 + c^2)^2}{16a^2c^4}$$

La distance H_aQ^2 est égale à

$$H_aQ^2 = \frac{(a^2 - b^2 - c^2)^2(a^2 + b^2 - c^2)^2}{16a^2b^4}$$

La distance $H_b S^2$ est égale à

$$H_b S^2 = \frac{(-a^2 + b^2 - c^2)^2 (-a^2 + b^2 + c^2)^2}{16 b^2 c^4}$$

La distance $H_b M^2$ est égale à

$$H_b M^2 = \frac{(a^2 + b^2 - c^2)^2 (a^2 - b^2 + c^2)^2}{16 a^4 b^2}$$

La distance $H_c P^2$ est égale à

$$H_c P^2 = \frac{(a^2 + b^2 - c^2)^2 (-a^2 + b^2 + c^2)^2}{16 b^4 c^2}$$

La distance $H_c N^2$ est égale à

$$H_c N^2 = \frac{(a^2 + b^2 - c^2)^2 (a^2 - b^2 + c^2)^2}{16 a^4 c^2}$$

Equation du cercle passant par les points RNP

Le centre $C_T = \{x, y, 1 - x, y\}$ de ce cercle doit vérifier $C_T R^2 - C_T N^2 = 0$ et $C_T R^2 - C_T P^2 = 0$, soit

$$0 = a^6 - 2a^4 b^2 + a^2 b^4 - 3a^4 c^2 - 4a^2 b^2 c^2 - b^4 c^2 + 3a^2 c^4 + 2b^2 c^4 - c^6 \\ + 8a^2 b^2 c^2 x + (4a^4 c^2 + 4a^2 b^2 c^2 - 4a^2 c^4) y$$

$$0 = a^8 b^4 - 4a^6 b^6 + 6a^4 b^8 - 4a^2 b^{10} + b^{12} - a^{10} c^2 + 2a^6 b^4 c^2 - 4a^4 b^6 c^2 + 7a^2 b^8 c^2 - 4b^{10} c^2 \\ + 4a^8 c^4 - 6a^4 b^4 c^4 - 4a^2 b^6 c^4 + 6b^8 c^4 - 6a^6 c^6 + 2a^2 b^4 c^6 - 4b^6 c^6 + 4a^4 c^8 + b^4 c^8 - a^2 c^{10} \\ + (4a^8 b^2 c^2 - 8a^6 b^4 c^2 + 8a^4 b^6 c^2 - 8a^2 b^8 c^2 + 4b^{10} c^2 - 12a^6 b^2 c^4 + 12a^4 b^4 c^4 \\ + 12a^2 b^6 c^4 - 12b^8 c^4 + 12a^4 b^2 c^6 + 12b^6 c^6 - 4a^2 b^2 c^8 - 4b^4 c^8) x \\ + (4a^8 b^2 c^2 - 4a^6 b^4 c^2 - 4a^4 b^6 c^2 + 4a^2 b^8 c^2 - 4a^6 b^2 c^4 \\ + 8a^4 b^4 c^4 - 4a^2 b^6 c^4 - 4a^4 b^2 c^6 - 4a^2 b^4 c^6 + 4a^2 b^2 c^8) y$$

La résolution de ce système linéaire donne

$$x = \frac{(a^6 b^2 - 3a^4 b^4 + 3a^2 b^6 - b^8 + a^6 c^2 - 3a^2 b^4 c^2 + 2b^6 c^2 - 3a^4 c^4 - 3a^2 b^2 c^4 - 2b^4 c^4 + 3a^2 c^6 + 2b^2 c^6 - c^8)}{4b^2 (-a + b - c) (a + b - c) c^2 (-a + b + c) (a + b + c)}$$

$$y = \frac{(-a^8 + 3a^6 b^2 - 3a^4 b^4 + a^2 b^6 + 2a^6 c^2 - 3a^4 b^2 c^2 + b^6 c^2 - 2a^4 c^4 - 3a^2 b^2 c^4 - 3b^4 c^4 + 2a^2 c^6 + 3b^2 c^6 - c^8)}{4a^2 (a - b - c) (a + b - c) c^2 (a - b + c) (a + b + c)}$$

Les coordonnées du centre sont ainsi

$$C_T = \left\{ \frac{(a^6 b^2 - 3a^4 b^4 + 3a^2 b^6 - b^8 + a^6 c^2 - 3a^2 b^4 c^2 + 2b^6 c^2 - 3a^4 c^4 - 3a^2 b^2 c^4 - 2b^4 c^4 + 3a^2 c^6 + 2b^2 c^6 - c^8)}{4b^2 (-a + b - c) (a + b - c) c^2 (-a + b + c) (a + b + c)} \right. \\ \left. \frac{(-a^8 + 3a^6 b^2 - 3a^4 b^4 + a^2 b^6 + 2a^6 c^2 - 3a^4 b^2 c^2 + b^6 c^2 - 2a^4 c^4 - 3a^2 b^2 c^4 - 3b^4 c^4 + 2a^2 c^6 + 3b^2 c^6 - c^8)}{4a^2 (a - b - c) (a + b - c) c^2 (a - b + c) (a + b + c)} \right\} \\ \frac{(-a^8 + 2a^6 b^2 - 2a^4 b^4 + 2a^2 b^6 - b^8 + 3a^6 c^2 - 3a^4 b^2 c^2 - 3a^2 b^4 c^2 + 3b^6 c^2 - 3a^4 c^4 - 3b^4 c^4 + a^2 c^6 + b^2 c^6)}{4a^2 b^2 (-a + b - c) (a + b - c) (-a + b + c) (a + b + c)}$$

Le rayon R_T au carré de ce cercle a pour valeur

$$R_T^2 = \frac{Num(R_T^2)}{16 a^2 b^2 (-a + b + c) (a + b - c) c^2 (a - b + c) (a + b + c)}$$

avec

$$\begin{aligned} Num(R_T^2) = & a^{10} b^2 - 4 a^8 b^4 + 6 a^6 b^6 - 4 a^4 b^8 + a^2 b^{10} + a^{10} c^2 - 3 a^8 b^2 c^2 + 2 a^6 b^4 c^2 + 2 a^4 b^6 c^2 \\ & - 3 a^2 b^8 c^2 + b^{10} c^2 - 4 a^8 c^4 + 2 a^6 b^2 c^4 + 4 a^4 b^4 c^4 + 2 a^2 b^6 c^4 - 4 b^8 c^4 + 6 a^6 c^6 + 2 a^4 b^2 c^6 \\ & + 2 a^2 b^4 c^6 + 6 b^6 c^6 - 4 a^4 c^8 - 3 a^2 b^2 c^8 - 4 b^4 c^8 + a^2 c^{10} + b^2 c^{10} \end{aligned}$$

Un point $M^* = \{X, Y, Z\}$ appartient à ce cercle si et seulement si sa distance (au carré) au centre est égale à cette valeur, soit

$$\begin{aligned} 0 = & a^8 X^2 - 4 a^6 b^2 X^2 + 6 a^4 b^4 X^2 - 4 a^2 b^6 X^2 + b^8 X^2 - 4 a^6 c^2 X^2 + 8 a^4 b^2 c^2 X^2 - 4 a^2 b^4 c^2 X^2 \\ & + 6 a^4 c^4 X^2 - 4 a^2 b^2 c^4 X^2 - 2 b^4 c^4 X^2 - 4 a^2 c^6 X^2 + c^8 X^2 + 2 a^8 X Y - 8 a^6 b^2 X Y + 12 a^4 b^4 X Y \\ & - 8 a^2 b^6 X Y + 2 b^8 X Y - 4 a^6 c^2 X Y + 4 a^4 b^2 c^2 X Y + 4 a^2 b^4 c^2 X Y - 4 b^6 c^2 X Y + 4 a^4 c^4 X Y \\ & + 8 a^2 b^2 c^4 X Y + 4 b^4 c^4 X Y - 4 a^2 c^6 X Y - 4 b^2 c^6 X Y + 2 c^8 X Y + a^8 Y^2 - 4 a^6 b^2 Y^2 + 6 a^4 b^4 Y^2 \\ & - 4 a^2 b^6 Y^2 + b^8 Y^2 - 4 a^4 b^2 c^2 Y^2 + 8 a^2 b^4 c^2 Y^2 - 4 b^6 c^2 Y^2 - 2 a^4 c^4 Y^2 - 4 a^2 b^2 c^4 Y^2 + 6 b^4 c^4 Y^2 \\ & - 4 b^2 c^6 Y^2 + c^8 Y^2 + 2 a^8 X Z - 4 a^6 b^2 X Z + 4 a^4 b^4 X Z - 4 a^2 b^6 X Z + 2 b^8 X Z - 8 a^6 c^2 X Z \\ & + 4 a^4 b^2 c^2 X Z + 8 a^2 b^4 c^2 X Z - 4 b^6 c^2 X Z + 12 a^4 c^4 X Z + 4 a^2 b^2 c^4 X Z + 4 b^4 c^4 X Z - 8 a^2 c^6 X Z \\ & + 2 c^8 X Z + 2 a^8 Y Z - 4 a^6 b^2 Y Z + 4 a^4 b^4 Y Z - 4 a^2 b^6 Y Z + 2 b^8 Y Z - 4 a^6 c^2 Y Z + 8 a^4 b^2 c^2 Y Z \\ & + 4 a^2 b^4 c^2 Y Z - 8 b^6 c^2 Y Z + 4 a^4 c^4 Y Z + 4 a^2 b^2 c^4 Y Z + 12 b^4 c^4 Y Z - 4 a^2 c^6 Y Z - 8 b^2 c^6 Y Z \\ & - 2 a^4 b^4 Z^2 + b^8 Z^2 - 4 a^6 c^2 Z^2 - 4 a^4 b^2 c^2 Z^2 - 4 a^2 b^4 c^2 Z^2 - 4 b^6 c^2 Z^2 + 6 a^4 c^4 Z^2 + 8 a^2 b^2 c^4 Z^2 \\ & + 6 b^4 c^4 Z^2 - 4 a^2 c^6 Z^2 - 4 b^2 c^6 Z^2 + c^8 Z^2 - 4 b^2 c^6 X Z + 2 c^8 Y Z + a^8 Z^2 \end{aligned}$$

On vérifie directement que

$$C_T S^2 = C_T M^2 = C_T Q^2 = R_T^2$$

donc les points M, N, P, Q, R, S sont cocycliques.

CHAPITRE

14

Points de Nagel et de Gergonne

14 Points de Nagel et de Gergonne

14.1 Points de Nagel et de Gergonne

Exercice 14.1.1

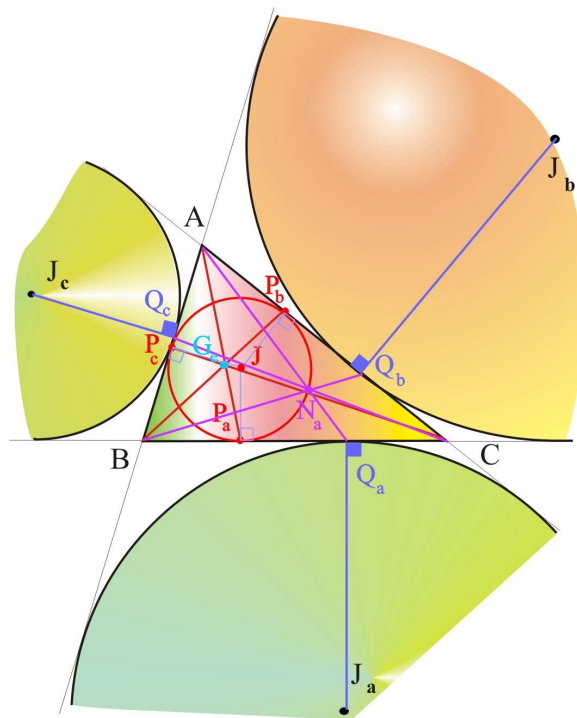
Soit ABC un triangle, J le centre du cercle inscrit au triangle ABC , J_a (resp. J_b , J_c) le centre du cercle ex-inscrit tangent extérieurement à BC (resp à AC , à AB), K le centre du cercle circonscrit, H l'orthocentre, G le centre de gravité du triangle ABC .

1. Le point J se projette sur la droite (BC) (resp. (AC) , (AB)) en P_a (resp. P_b , P_c). Montrer que les droites (AP_a) , (BP_b) , (CP_c) se coupent en un même point G_e (appelé point de Gergonne).
2. Le point J_a se projette sur la droite (BC) en Q_a , le point J_b sur la droite (AC) en Q_b , le point J_c sur la droite (AB) en Q_c . Montrer que les droites (AQ_a) , (BQ_b) , (CQ_c) se coupent en un même point N_a (appelé point de Nagel).
3. Montrer que

$$\overrightarrow{GN_a} + 2 \overrightarrow{GJ} = 0$$

$$\overrightarrow{HN_a} + 2 \overrightarrow{KJ} = 0$$

4. Calculer les distances AP_c^2 , BP_a^2 , CP_b^2 . En déduire que G_e est le barycentre de $\{A, \frac{1}{AP_c}\}$, $(B, \frac{1}{BP_a})$, $(C, \frac{1}{CP_b})$ et que N_a est le barycentre de $\{A, AP_c\}$, (B, BP_a) , (C, CP_b) .
5. Déterminer le point isogonal de N_a (resp. G_e) relativement au triangle ABC .
6. Déterminer les coordonnées barycentriques des points d'intersection W_a, W_b, W_c de la droite $N_a G_e$ avec les côtés du triangle ABC et les points $Z_b = (AJ_a) \cap (N_a G_e)$, $Z_a = (BJ_b) \cap (N_a G_e)$.

**Solution:**

Dessin = $\{A, B, C, G, H, J, J_a, J_b, J_c, K\}$

Le repère barycentrique choisi est A, B, C .

Les points composés sont $J, J_a, J_b, J_c, K, G, H$.

On déduit les coordonnées barycentriques des points composés:

$$\begin{aligned}
 J &= \left\{ \frac{a}{a+b+c}, \frac{b}{a+b+c}, \frac{c}{a+b+c} \right\} \\
 J_a &= \left\{ \frac{-a}{-a+b+c}, \frac{b}{-a+b+c}, \frac{c}{-a+b+c} \right\} \\
 J_b &= \left\{ \frac{a}{a-b+c}, \frac{-b}{a-b+c}, \frac{c}{a-b+c} \right\} \\
 J_c &= \left\{ \frac{a}{a+b-c}, \frac{b}{a+b-c}, \frac{-c}{a+b-c} \right\} \\
 H &= \left\{ \frac{(a^2+b^2-c^2)(a^2-b^2+c^2)}{(-a+b+c)(a+b-c)(a-b+c)(a+b+c)}, \right. \\
 &\quad \frac{(-a^2+b^2+c^2)(a^2+b^2-c^2)}{(-a+b+c)(a+b-c)(a-b+c)(a+b+c)}, \\
 &\quad \left. \frac{(-a^2+b^2+c^2)(a^2-b^2+c^2)}{(-a+b+c)(a+b-c)(a-b+c)(a+b+c)} \right\}
 \end{aligned}$$

$$K = \left\{ \frac{a^2 (a^2 - b^2 - c^2)}{(a - b - c)(a + b - c)(a - b + c)(a + b + c)}, \right. \\ \frac{b^2 (-a^2 + b^2 - c^2)}{(-a + b - c)(a + b - c)(-a + b + c)(a + b + c)}, \\ \left. \frac{c^2 (a^2 + b^2 - c^2)}{(-a + b + c)(a + b - c)(a - b + c)(a + b + c)} \right\}$$

$$G = \left\{ \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3} \right\}$$

Dessin = Dessin $\cup \{P_a, P_b, P_c, Q_a, Q_b, Q_c\} = \{A, B, C, G, H, J, J_a, J_b, J_c, K, P_a, P_b, P_c, Q_a, Q_b, Q_c\}$

Le repère barycentrique choisi est A, B, C .

Les points composés sont $P_a, P_b, P_c, Q_a, Q_b, Q_c$.

On déduit les coordonnées barycentriques des points composés:

La projection du point J sur la droite (BC) est le point P_a de coordonnées barycentriques

$$P_a = \left\{ 0, \frac{a + b - c}{2a}, \frac{a - b + c}{2a} \right\}$$

La projection du point J sur la droite (AC) est le point P_b de coordonnées barycentriques

$$P_b = \left\{ \frac{a + b - c}{2b}, 0, \frac{-a + b + c}{2b} \right\}$$

La projection du point J sur la droite (AB) est le point P_c de coordonnées barycentriques

$$P_c = \left\{ \frac{a - b + c}{2c}, \frac{-a + b + c}{2c}, 0 \right\}$$

La projection du point J_a sur la droite (BC) est le point Q_a de coordonnées barycentriques

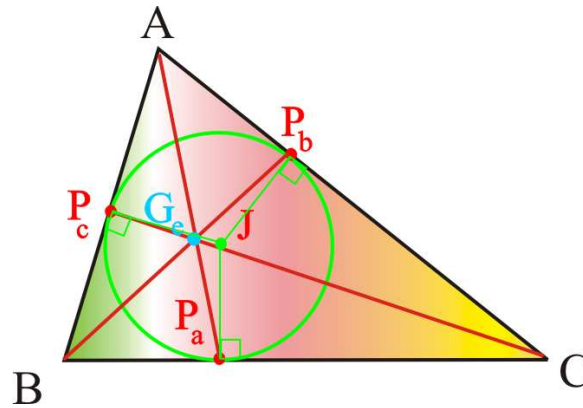
$$Q_a = \left\{ 0, \frac{a - b + c}{2a}, \frac{a + b - c}{2a} \right\}$$

La projection du point J_b sur la droite (AC) est le point Q_b de coordonnées barycentriques

$$Q_b = \left\{ \frac{-a + b + c}{2b}, 0, \frac{a + b - c}{2b} \right\}$$

La projection du point J_c sur la droite (AB) est le point Q_c de coordonnées barycentriques

$$Q_c = \left\{ \frac{-a + b + c}{2c}, \frac{a - b + c}{2c}, 0 \right\}$$



Dessin = Dessin $\cup \{G_e\} = \{A, B, C, G, G_e, H, J, J_a, J_b, J_c, K, P_a, P_b, P_c, Q_a, Q_b, Q_c\}$

Détermination du point G_e :

Soit G_e le point $(AP_a) \cap (BP_b)$. Le point G_e est composé.

Comme $G_e \in (AP_a)$, on a, en choisissant l'inconnue ν_1

$$\overrightarrow{OG_e} = \nu_1 \overrightarrow{OA} + (1 - \nu_1) \overrightarrow{OP_a}$$

On déduit:

$$\overrightarrow{OG_e} = a(1) \overrightarrow{OA} + a(2) \overrightarrow{OB} + a(3) \overrightarrow{OC}$$

avec

$$\begin{aligned} a(1) &= \nu_1 \\ a(2) &= \frac{(a + b - c)(1 - \nu_1)}{2a} \\ a(3) &= \frac{(a - b + c)(1 - \nu_1)}{2a} \end{aligned}$$

Comme $G_e \in (BP_b)$, on a, en choisissant l'inconnue μ_1

$$\overrightarrow{OG_e} = \mu_1 \overrightarrow{OB} + (1 - \mu_1) \overrightarrow{OP_b}$$

On déduit:

$$\overrightarrow{OG_e} = b(1) \overrightarrow{OA} + b(2) \overrightarrow{OB} + b(3) \overrightarrow{OC}$$

avec

$$\begin{aligned} b(1) &= \frac{(a + b - c)(1 - \mu_1)}{2b} \\ b(2) &= \mu_1 \\ b(3) &= \frac{(-a + b + c)(1 - \mu_1)}{2b} \end{aligned}$$

La résolution du système linéaire d'inconnues ν_1, μ_1 donne

$$\nu_1 = \frac{-(a + b - c)(a - b + c)}{a^2 - 2ab + b^2 - 2ac - 2bc + c^2} \quad \mu_1 = \frac{(a - b - c)(a + b - c)}{a^2 - 2ab + b^2 - 2ac - 2bc + c^2}$$

On déduit que:

$$G_e = \left\{ \frac{-(a + b - c)(a - b + c)}{a^2 - 2ab + b^2 - 2ac - 2bc + c^2}, \frac{(a - b - c)(a + b - c)}{a^2 - 2ab + b^2 - 2ac - 2bc + c^2}, \frac{(a - b - c)(a - b + c)}{a^2 - 2ab + b^2 - 2ac - 2bc + c^2} \right\}$$

Dessin = Dessin $\cup \{G_{e1}\} = \{A, B, C, G, G_e, G_{e1}, H, J, J_a, J_b, J_c, K, P_a, P_b, P_c, Q_a, Q_b, Q_c\}$

Détermination du point G_{e1} :

Soit G_{e1} le point $(AP_a) \cap (CP_c)$. Le point G_{e1} est composé.

Comme $G_{e1} \in (AP_a)$, on a, en choisissant l'inconnue ν_1

$$\overrightarrow{OG_{e1}} = \nu_1 \overrightarrow{OA} + (1 - \nu_1) \overrightarrow{OP_a}$$

On déduit:

$$\overrightarrow{OG_{e1}} = c(1) \overrightarrow{OA} + c(2) \overrightarrow{OB} + c(3) \overrightarrow{OC}$$

avec

$$\begin{aligned} c(1) &= \nu_1 \\ c(2) &= \frac{(a+b-c)(1-\nu_1)}{2a} \\ c(3) &= \frac{(a-b+c)(1-\nu_1)}{2a} \end{aligned}$$

Comme $G_{e_1} \in (CP_c)$, on a, en choisissant l'inconnue μ_1

$$\overrightarrow{OG_{e_1}} = \mu_1 \overrightarrow{OC} + (1 - \mu_1) \overrightarrow{OP_c}$$

On déduit:

$$\overrightarrow{OG_{e_1}} = d(1) \overrightarrow{OA} + d(2) \overrightarrow{OB} + d(3) \overrightarrow{OC}$$

avec

$$\begin{aligned} d(1) &= \frac{(a-b+c)(1-\mu_1)}{2c} \\ d(2) &= \frac{(-a+b+c)(1-\mu_1)}{2c} \\ d(3) &= \mu_1 \end{aligned}$$

La résolution du système linéaire d'inconnues ν_1, μ_1 donne

$$\nu_1 = \frac{-(a+b-c)(a-b+c)}{a^2 - 2ab + b^2 - 2ac - 2bc + c^2} \quad \mu_1 = \frac{(a-b-c)(a-b+c)}{a^2 - 2ab + b^2 - 2ac - 2bc + c^2}$$

On déduit que:

$$G_{e_1} = \left\{ \frac{-(a+b-c)(a-b+c)}{a^2 - 2ab + b^2 - 2ac - 2bc + c^2}, \frac{(a-b-c)(a+b-c)}{a^2 - 2ab + b^2 - 2ac - 2bc + c^2}, \frac{(a-b-c)(a-b+c)}{a^2 - 2ab + b^2 - 2ac - 2bc + c^2} \right\}$$

Ainsi, les points G_e et G_{e_1} coïncident, les droites (AP_a) , (BP_b) , (CP_c) se coupent en un même point.

Dessin = Dessin $\cup \{N_a\} = \{A, B, C, G, G_e, G_{e_1}, H, J, J_a, J_b, J_c, K, N_a, P_a, P_b, P_c, Q_a, Q_b, Q_c\}$

Détermination du point N_a :

Soit N_a le point $(AQ_a) \cap (BQ_b)$. Le point N_a est composé.

Comme $N_a \in (AQ_a)$, on a, en choisissant l'inconnue ν_1

$$\overrightarrow{ON_a} = \nu_1 \overrightarrow{OA} + (1 - \nu_1) \overrightarrow{OQ_a}$$

On déduit:

$$\overrightarrow{ON_a} = e(1) \overrightarrow{OA} + e(2) \overrightarrow{OB} + e(3) \overrightarrow{OC}$$

avec

$$\begin{aligned} e(1) &= \nu_1 \\ e(2) &= \frac{(a-b+c)(1-\nu_1)}{2a} \\ e(3) &= \frac{(a+b-c)(1-\nu_1)}{2a} \end{aligned}$$

Comme $N_a \in (BQ_b)$, on a, en choisissant l'inconnue μ_1

$$\overrightarrow{ON_a} = \mu_1 \overrightarrow{OB} + (1 - \mu_1) \overrightarrow{OQ_b}$$

On déduit:

$$\overrightarrow{ON_a} = f(1) \overrightarrow{OA} + f(2) \overrightarrow{OB} + f(3) \overrightarrow{OC}$$

avec

$$f(1) = \frac{(-a + b + c)(1 - \mu_1)}{2b}$$

$$f(2) = \mu_1$$

$$f(3) = \frac{(a + b - c)(1 - \mu_1)}{2b}$$

La résolution du système linéaire d'inconnues ν_1, μ_1 donne

$$\nu_1 = \frac{-a + b + c}{a + b + c} \quad \mu_1 = \frac{a - b + c}{a + b + c}$$

On déduit que:

$$N_a = \left\{ \frac{-a + b + c}{a + b + c}, \frac{a - b + c}{a + b + c}, \frac{a + b - c}{a + b + c} \right\}$$

Dessin = Dessin $\cup \{N_{a_1}\} = \{A, B, C, G, G_e, G_{e_1}, H, J, J_a, J_b, J_c, K, N_a, N_{a_1}, P_a, P_b, P_c, Q_a, Q_b, Q_c\}$

Détermination du point N_{a_1} :

Soit N_{a_1} le point $(AQ_a) \cap (CQ_c)$. Le point N_{a_1} est composé.

Comme $N_{a_1} \in (AQ_a)$, on a, en choisissant l'inconnue ν_1

$$\overrightarrow{ON_{a_1}} = \nu_1 \overrightarrow{OA} + (1 - \nu_1) \overrightarrow{OQ_a}$$

On déduit:

$$\overrightarrow{ON_{a_1}} = g(1) \overrightarrow{OA} + g(2) \overrightarrow{OB} + g(3) \overrightarrow{OC}$$

avec

$$g(1) = \nu_1$$

$$g(2) = \frac{(a - b + c)(1 - \nu_1)}{2a}$$

$$g(3) = \frac{(a + b - c)(1 - \nu_1)}{2a}$$

Comme $N_{a_1} \in (CQ_c)$, on a, en choisissant l'inconnue μ_1

$$\overrightarrow{ON_{a_1}} = \mu_1 \overrightarrow{OC} + (1 - \mu_1) \overrightarrow{OQ_c}$$

On déduit:

$$\overrightarrow{ON_{a_1}} = h(1) \overrightarrow{OA} + h(2) \overrightarrow{OB} + h(3) \overrightarrow{OC}$$

avec

$$h(1) = \frac{(-a + b + c)(1 - \mu_1)}{2c}$$

$$h(2) = \frac{(a - b + c)(1 - \mu_1)}{2c}$$

$$h(3) = \mu_1$$

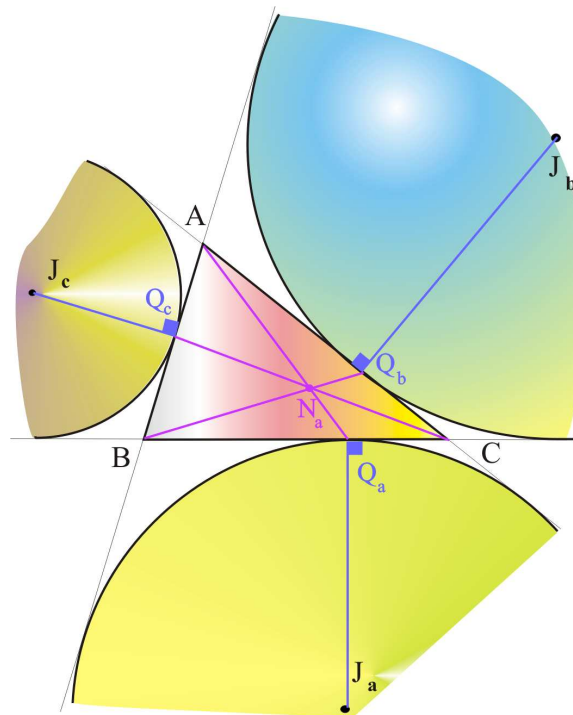
La résolution du système linéaire d'inconnues ν_1, μ_1 donne

$$\nu_1 = \frac{-a+b+c}{a+b+c} \quad \mu_1 = \frac{a+b-c}{a+b+c}$$

On déduit que:

$$N_{a_1} = \left\{ \frac{-a+b+c}{a+b+c}, \frac{a-b+c}{a+b+c}, \frac{a+b-c}{a+b+c} \right\}$$

Ainsi, les points N_a et N_{a_1} coïncident, les droites (AQ_a) , (BQ_b) , (CQ_c) se coupent en un même point.



Calculons le vecteur $\overrightarrow{GN_a}$. On a:

$$\overrightarrow{GN_a} = i(1) \overrightarrow{OA} + i(2) \overrightarrow{OB} + i(3) \overrightarrow{OC}$$

avec

$$i(1) = \frac{2(-2a+b+c)}{3(a+b+c)}$$

$$i(2) = \frac{2(a-2b+c)}{3(a+b+c)}$$

$$i(3) = \frac{2(a+b-2c)}{3(a+b+c)}$$

Calculons le vecteur $\overrightarrow{GJ}$. On a:

$$\overrightarrow{GJ} = j(1) \overrightarrow{OA} + j(2) \overrightarrow{OB} + j(3) \overrightarrow{OC}$$

avec

$$\begin{aligned} j(1) &= \frac{2a - b - c}{3(a + b + c)} \\ j(2) &= \frac{-a + 2b - c}{3(a + b + c)} \\ j(3) &= \frac{(-a - b + 2c)}{3(a + b + c)} \end{aligned}$$

On a ainsi

$$\overrightarrow{GN_a} = -2 \overrightarrow{GJ}$$

Calculons le vecteur $\overrightarrow{HN_a}$. On a:

$$\overrightarrow{HN_a} = k(1) \overrightarrow{OA} + k(2) \overrightarrow{OB} + k(3) \overrightarrow{OC}$$

avec

$$\begin{aligned} k(1) &= \frac{2a(a^2b - b^3 + a^2c - 2abc + b^2c + bc^2 - c^3)}{(a - b - c)(a + b - c)(a - b + c)(a + b + c)} \\ k(2) &= \frac{2b(a^3 - ab^2 - a^2c + 2abc - b^2c - ac^2 + c^3)}{(-a + b + c)(a + b - c)(a - b + c)(a + b + c)} \\ k(3) &= \frac{2c(a^3 - a^2b - ab^2 + b^3 + 2abc - ac^2 - bc^2)}{(-a + b + c)(a + b - c)(a - b + c)(a + b + c)} \end{aligned}$$

Calculons le vecteur $\overrightarrow{KJ}$. On a:

$$\overrightarrow{KJ} = l(1) \overrightarrow{OA} + l(2) \overrightarrow{OB} + l(3) \overrightarrow{OC}$$

avec

$$\begin{aligned} l(1) &= \frac{a(a^2b - b^3 + a^2c - 2abc + b^2c + bc^2 - c^3)}{(-a + b + c)(a + b - c)(a - b + c)(a + b + c)} \\ l(2) &= \frac{b(a^3 - ab^2 - a^2c + 2abc - b^2c - ac^2 + c^3)}{(a - b - c)(a + b - c)(a - b + c)(a + b + c)} \\ l(3) &= \frac{c(a^3 - a^2b - ab^2 + b^3 + 2abc - ac^2 - bc^2)}{(a - b - c)(a + b - c)(a - b + c)(a + b + c)} \end{aligned}$$

On a ainsi

$$\overrightarrow{HN_a} = -2 \overrightarrow{KJ}$$

La distance AP_c^2 est égale à

$$AP_c^2 = \frac{AB^2(-a + b + c)^2}{4c^2} = \frac{(a - b - c)^2}{4}$$

La distance BP_a^2 est égale à

$$BP_a^2 = \frac{BC^2(a - b + c)^2}{4a^2} = \frac{(a - b + c)^2}{4}$$

La distance CP_b^2 est égale à

$$CP_b^2 = \frac{AC^2 (a+b-c)^2}{4b^2} = \frac{(a+b-c)^2}{4}$$

donc

$$\begin{aligned} AP_c &= \frac{(-a+b+c)}{2} \\ BP_a &= \frac{(a-b+c)}{2} \\ CP_b &= \frac{(a+b-c)}{2} \end{aligned}$$

Les coordonnées barycentriques de G_e divisées par

$$\frac{(a-b-c)(a+b-c)(a-b+c)}{a^2-2ab+b^2-2ac-2bc+c^2}$$

deviennent

$$\left\{ \frac{1}{-a+b+c}, \frac{1}{a-b+c}, \frac{1}{a+b-c} \right\}$$

donc G_e est le barycentre de $\{A, \frac{1}{AP_c}\}, (B, \frac{1}{BP_a}), (C, \frac{1}{CP_b})\}$. On procède de même pour N_a par division par $a+b+c$.

5). Le point isogonal d'un point $M = \{X_1, X_2, X_3\}$ relativement au triangle ABC est le point

$$M^* = \left\{ \frac{a^2 X_2 X_3}{c^2 X_1 X_2 + b^2 X_1 X_3 + a^2 X_2 X_3}, \frac{b^2 X_1 X_3}{c^2 X_1 X_2 + b^2 X_1 X_3 + a^2 X_2 X_3}, \frac{c^2 X_1 X_2}{c^2 X_1 X_2 + b^2 X_1 X_3 + a^2 X_2 X_3} \right\}$$

En appliquant cette formule à N_a et à G_e , nous obtenons

$$\begin{aligned} N_a^* &= \left\{ \frac{a^2 (a+b-c)(a-b+c)}{(a+b+c)(a^3-a^2b-ab^2+b^3-a^2c+4abc-b^2c-ac^2-bc^2+c^3)}, \right. \\ &\quad \frac{b^2 (a+b-c)(-a+b+c)}{(a+b+c)(a^3-a^2b-ab^2+b^3-a^2c+4abc-b^2c-ac^2-bc^2+c^3)}, \\ &\quad \left. \frac{(-a+b+c)c^2(a-b+c)}{(a+b+c)(a^3-a^2b-ab^2+b^3-a^2c+4abc-b^2c-ac^2-bc^2+c^3)} \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} G_e^* &= \left\{ \frac{a^2 (a-b-c)}{a^3-a^2b-ab^2+b^3-a^2c-b^2c-ac^2-bc^2+c^3}, \right. \\ &\quad \frac{b^2 (-a+b-c)}{a^3-a^2b-ab^2+b^3-a^2c-b^2c-ac^2-bc^2+c^3}, \\ &\quad \left. \frac{-(a+b-c)c^2}{a^3-a^2b-ab^2+b^3-a^2c-b^2c-ac^2-bc^2+c^3} \right\} \end{aligned}$$

6). **Dessin** = Dessin $\cup \{W_c\} = \{A, B, C, G, G_e, G_{e1}, H, J, J_a, J_b, J_c, K, N_a, N_{a1}, P_a, P_b, P_c, Q_a, Q_b, Q_c, W_c\}$

Détermination du point W_c :

Soit W_c le point $(AB) \cap (N_a G_e)$. Le point W_c est composé.

On obtient après calculs

$$W_c = \left\{ \frac{b(a-c)(a-b+c)}{c(a^2+b^2-ac-bc)}, \frac{a(-a+b+c)(b-c)}{c(a^2+b^2-ac-bc)}, 0 \right\}$$

Dessin = Dessin $\cup \{W_b\} = \{A, B, C, G, G_e, G_{e1}, H, J, J_a, J_b, J_c, K, N_a, N_{a1}, P_a, P_b, P_c, Q_a, Q_b, Q_c, W_b, W_c\}$

Détermination du point W_b :

Soit W_b le point $(AC) \cap (N_a G_e)$. Le point W_b est composé.

On obtient après calculs

$$W_b = \left\{ \frac{(a-b)(a+b-c)c}{b(a^2-ab-bc+c^2)}, 0, \frac{a(a-b-c)(b-c)}{b(a^2-ab-bc+c^2)} \right\}$$

Dessin = Dessin $\cup \{W_a\} = \{A, B, C, G, G_e, G_{e1}, H, J, J_a, J_b, J_c, K, N_a, N_{a1}, P_a, P_b, P_c, Q_a, Q_b, Q_c, W_a, W_b, W_c\}$

Détermination du point W_a :

Soit W_a le point $(BC) \cap (N_a G_e)$. Le point W_a est composé.

On obtient après calculs

$$W_a = \left\{ 0, \frac{(a-b)(a+b-c)c}{a(ab-b^2+ac-c^2)}, \frac{b(a-c)(a-b+c)}{a(ab-b^2+ac-c^2)} \right\}$$

Dessin = Dessin $\cup \{Z_a\} = \{A, B, C, G, G_e, G_{e1}, H, J, J_a, J_b, J_c, K, N_a, N_{a1}, P_a, P_b, P_c, Q_a, Q_b, Q_c, W_a, W_b, W_c, Z_a\}$

Détermination du point Z_a :

Soit Z_a le point $(BJ_b) \cap (N_a G_e)$. Le point Z_a est composé.

On obtient après calculs

$$Z_a = \left\{ \frac{b(a-b+c)}{c(a+b+c)}, \frac{-a^2b+ab^2+a^2c-abcb+b^2c+ac^2-bc^2}{ac(a+b+c)}, \frac{b(a-b+c)}{a(a+b+c)} \right\}$$

Dessin = Dessin $\cup \{Z_b\} = \{A, B, C, G, G_e, G_{e1}, H, J, J_a, J_b, J_c, K, N_a, N_{a1}, P_a, P_b, P_c, Q_a, Q_b, Q_c, W_a, W_b, W_c, Z_a, Z_b\}$

Détermination du point Z_b :

Soit Z_b le point $(AJ_a) \cap (N_a G_e)$. Le point Z_b est composé.

On obtient après calculs

$$Z_b = \left\{ \frac{a^2b-ab^2+a^2c-abcb+b^2c-ac^2+bc^2}{bc(a+b+c)}, \frac{a(-a+b+c)}{c(a+b+c)}, \frac{a(-a+b+c)}{b(a+b+c)} \right\}$$

CHAPITRE

15

Théorèmes du papillon

15 Théorèmes du papillon

15.1 Théorème du papillon simple

Exercice 15.1.1 *Papillon classique*

Soient A, C, B, D quatre points distincts d'un cercle tels que les droites (AB) et (CD) se coupent en W . Designant par PQ une corde du cercle passant par W (W non nécessairement le milieu de PQ), on note M (resp. N) le point d'intersection de la corde (PQ) avec le segment (AD) (resp. avec le segment (BC)).

Etablir la formule

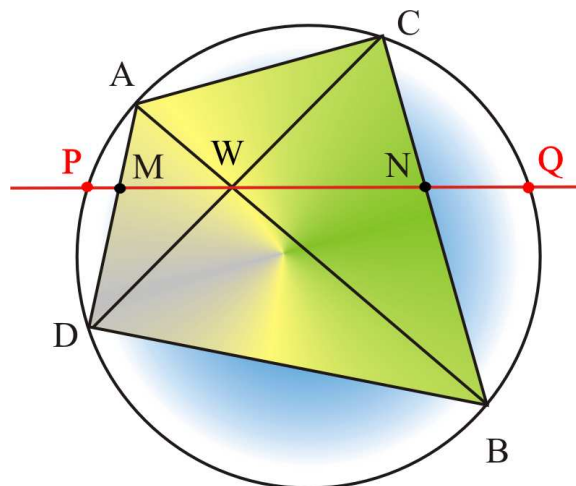
$$\overline{NW} \cdot \overline{MP} \cdot \overline{QW} = \overline{MW} \cdot \overline{NQ} \cdot \overline{WP}$$

En déduire que l'égalité des distances $PW = WQ$ implique $MW = WN$.

Le multirapport

$$r(P, M, W, N, Q, W) = \frac{\overline{PM}}{\overline{MW}} \cdot \frac{\overline{WN}}{\overline{NQ}} \cdot \frac{\overline{QW}}{\overline{WP}}$$

a donc pour valeur 1.

**Solution:**

Le repère barycentrique choisi est A, B, C .

On pose $AB = c$, $BC = a$, $AC = b$.

Il existe X, Y (resp. X_1, Y_1) tel que l'on ait

$$D = \left\{ X, Y, -\frac{c^2 XY}{b^2 X + a^2 Y} \right\}$$

$$P = \left\{ X_1, Y_1, -\frac{c^2 X_1 Y_1}{b^2 X_1 + a^2 Y_1} \right\}$$

On notera que ces coordonnées barycentriques ne sont pas normalisées. Pour éviter les calculs volumineux, on pose $Y = tX$ et $Y_1 = t_1 X_1$.

Dessin = $\{A, B, C, D, P\}$

Le repère barycentrique choisi est A, B, C .

Les points composés sont D, P .

On déduit les coordonnées barycentriques des points composés:

$$P = \left\{ \frac{b^2 + a^2 t_1}{b^2 + a^2 t_1 + b^2 t_1 - c^2 t_1 + a^2 t_1^2}, \frac{t_1 (b^2 + a^2 t_1)}{b^2 + a^2 t_1 + b^2 t_1 - c^2 t_1 + a^2 t_1^2}, \frac{c^2 t_1}{-b^2 - a^2 t_1 - b^2 t_1 + c^2 t_1 - a^2 t_1^2} \right\}$$

$$D = \left\{ \frac{b^2 + a^2 t}{b^2 + a^2 t + b^2 t - c^2 t + a^2 t^2}, \frac{t (b^2 + a^2 t)}{b^2 + a^2 t + b^2 t - c^2 t + a^2 t^2}, \frac{c^2 t}{-b^2 - a^2 t - b^2 t + c^2 t - a^2 t^2} \right\}$$

Dessin = $\text{Dessin} \cup \{W\} = \{A, B, C, D, P, W\}$

Détermination du point W :

Soit W le point $(AB) \cap (CD)$. Le point W est composé.

Comme $W \in (AB)$, on a, en choisissant les inconnues ν_1

$$\overrightarrow{OW} = \nu_1 \overrightarrow{OA} + (1 - \nu_1) \overrightarrow{OB}$$

Comme $W \in (CD)$, on a, en choisissant les inconnues μ_1

$$\overrightarrow{OW} = \mu_1 \overrightarrow{OC} + (1 - \mu_1) \overrightarrow{OD}$$

On déduit:

$$\overrightarrow{OW} = b(1) \overrightarrow{OA} + b(2) \overrightarrow{OB} + b(3) \overrightarrow{OC}$$

avec

$$b(1) = \frac{(1 - \mu_1) (b^2 + a^2 t)}{b^2 + a^2 t + b^2 t - c^2 t + a^2 t^2}$$

$$b(2) = \frac{(1 - \mu_1) t (b^2 + a^2 t)}{b^2 + a^2 t + b^2 t - c^2 t + a^2 t^2}$$

$$b(3) = \frac{b^2 \mu_1 - c^2 t + a^2 \mu_1 t + b^2 \mu_1 t + a^2 \mu_1 t^2}{b^2 + a^2 t + b^2 t - c^2 t + a^2 t^2}$$

La résolution du système linéaire d'inconnues ν_1, μ_1 donne

$$\nu_1 = \frac{1}{1+t} \quad \mu_1 = \frac{c^2 t}{(1+t) (b^2 + a^2 t)}$$

On déduit que:

$$W = \left\{ \frac{1}{1+t}, \frac{t}{1+t}, 0 \right\}$$

Dessin = Dessin $\cup \{Q\} = \{A, B, C, D, P, Q, W\}$

On construit un point Q temporaire égal au barycentre de $\{(P, 1 - k), (W, k)\}$ donc

$$\overrightarrow{OQ} = (1 - k) \overrightarrow{OP} + k \overrightarrow{OW}$$

On déduit les coordonnées barycentriques du point composé temporaire Q :

$$Q = \left\{ \frac{b^2 + b^2 t - b^2 k t + a^2 t_1 + b^2 k t_1 - c^2 k t_1 + a^2 t t_1 - a^2 k t t_1 + a^2 k t_1^2}{(1 + t) (b^2 + a^2 t_1 + b^2 t_1 - c^2 t_1 + a^2 t_1^2)}, \right. \\ \frac{b^2 k t + b^2 t_1 - b^2 k t_1 + b^2 t t_1 + a^2 k t t_1 - c^2 k t t_1 + a^2 t_1^2 - a^2 k t_1^2 + a^2 t t_1^2}{(1 + t) (b^2 + a^2 t_1 + b^2 t_1 - c^2 t_1 + a^2 t_1^2)}, \\ \left. \frac{c^2 (1 - k) t_1}{-b^2 - a^2 t_1 - b^2 t_1 + c^2 t_1 - a^2 t_1^2} \right\}$$

Les coordonnées $\{X, Y, Z\}$ de Q satisfont $c^2 X Y + b^2 X Z + a^2 Y Z = 0$ puisque Q appartient au cercle, soit

$$b^2 t + b^2 t^2 - b^2 k t^2 + a^2 k t t_1 + b^2 k t t_1 - c^2 k t t_1 + a^2 t_1^2 - a^2 k t_1^2 + a^2 t t_1^2 = 0$$

ce qui donne la valeur

$$k = \frac{b^2 t + b^2 t^2 + a^2 t_1^2 + a^2 t t_1^2}{b^2 t^2 - a^2 t t_1 - b^2 t t_1 + c^2 t t_1 + a^2 t_1^2}$$

En revenant à la description temporaire de Q , on obtient ainsi

$$Q = \left\{ \frac{a^2 (t_1 - t) t_1}{b^2 t^2 - a^2 t t_1 - b^2 t t_1 + c^2 t t_1 + a^2 t_1^2}, \right. \\ \frac{b^2 t (t - t_1)}{b^2 t^2 - a^2 t t_1 - b^2 t t_1 + c^2 t t_1 + a^2 t_1^2}, \\ \left. \frac{-c^2 t t_1}{b^2 t^2 - a^2 t t_1 - b^2 t t_1 + c^2 t t_1 + a^2 t_1^2} \right\}$$

Calculons le vecteur $\overrightarrow{WP}$. On a:

$$\overrightarrow{WP} = c(1) \overrightarrow{OA} + c(2) \overrightarrow{OB} + c(3) \overrightarrow{OC}$$

avec

$$c(1) = \frac{b^2 t - b^2 t_1 + c^2 t_1 + a^2 t t_1 - a^2 t_1^2}{(1 + t) (b^2 + a^2 t_1 + b^2 t_1 - c^2 t_1 + a^2 t_1^2)} \\ c(2) = \frac{-b^2 t + b^2 t_1 - a^2 t t_1 + c^2 t t_1 + a^2 t_1^2}{(1 + t) (b^2 + a^2 t_1 + b^2 t_1 - c^2 t_1 + a^2 t_1^2)} \\ c(3) = \frac{-c^2 t_1}{(b^2 + a^2 t_1 + b^2 t_1 - c^2 t_1 + a^2 t_1^2)}$$

Calculons le vecteur $\overrightarrow{QW}$. On a:

$$\overrightarrow{QW} = d(1) \overrightarrow{OA} + d(2) \overrightarrow{OB} + d(3) \overrightarrow{OC}$$

avec

$$d(1) = \frac{t (b^2 t - b^2 t_1 + c^2 t_1 + a^2 t t_1 - a^2 t_1^2)}{(1 + t) (b^2 t^2 - a^2 t t_1 - b^2 t t_1 + c^2 t t_1 + a^2 t_1^2)}$$

$$d(2) = \frac{-t (b^2 t - b^2 t_1 + a^2 t t_1 - c^2 t t_1 - a^2 t_1^2)}{(1+t) (b^2 t^2 - a^2 t t_1 - b^2 t t_1 + c^2 t t_1 + a^2 t_1^2)}$$

$$d(3) = \frac{-c^2 t t_1}{b^2 t^2 - a^2 t t_1 - b^2 t t_1 + c^2 t t_1 + a^2 t_1^2}$$

On a ainsi

$$\overrightarrow{WP} = \frac{b^2 t^2 - a^2 t t_1 - b^2 t t_1 + c^2 t t_1 + a^2 t_1^2}{t (b^2 + a^2 t_1 + b^2 t_1 - c^2 t_1 + a^2 t_1^2)} \overrightarrow{QW}$$

Dessin = Dessin $\cup N = \{A, B, C, D, N, P, Q, W\}$

Détermination du point N :

Soit N le point $(WQ) \cap (BC)$. Le point N est composé.

Comme $N \in (WQ)$, on a, en choisissant les inconnues ν_1

$$\overrightarrow{ON} = (1 - \nu_1) \overrightarrow{OQ} + \nu_1 \overrightarrow{OW}$$

On déduit:

$$\overrightarrow{ON} = e(1) \overrightarrow{OA} + e(2) \overrightarrow{OB} + e(3) \overrightarrow{OC}$$

avec

$$e(1) = \frac{b^2 \nu_1 t^2 - a^2 t t_1 - b^2 \nu_1 t t_1 + c^2 \nu_1 t t_1 - a^2 t^2 t_1 + a^2 \nu_1 t^2 t_1 + a^2 t_1^2 + a^2 t t_1^2 - a^2 \nu_1 t t_1^2}{(1+t) (b^2 t^2 - a^2 t t_1 - b^2 t t_1 + c^2 t t_1 + a^2 t_1^2)}$$

$$e(2) = \frac{t (b^2 t - b^2 \nu_1 t + b^2 t^2 - b^2 t_1 + b^2 \nu_1 t_1 - b^2 t t_1 - a^2 \nu_1 t t_1 + c^2 \nu_1 t t_1 + a^2 \nu_1 t_1^2)}{(1+t) (b^2 t^2 - a^2 t t_1 - b^2 t t_1 + c^2 t t_1 + a^2 t_1^2)}$$

$$e(3) = \frac{c^2 (1 - \nu_1) t t_1}{b^2 t^2 - a^2 t t_1 - b^2 t t_1 + c^2 t t_1 + a^2 t_1^2}$$

Comme $N \in (BC)$, on a, en choisissant les inconnues μ_1

$$\overrightarrow{ON} = \mu_1 \overrightarrow{OB} + (1 - \mu_1) \overrightarrow{OC}$$

La résolution du système linéaire d'inconnues ν_1, μ_1 donne

$$\nu_1 = \frac{(t - t_1) (b^2 + a^2 t_1)}{b^2 t - b^2 t_1 + c^2 t_1 + a^2 t t_1 - a^2 t_1^2}$$

$$\mu_1 = \frac{a^2 (1+t) (t - t_1) t_1}{t (b^2 t - b^2 t_1 + c^2 t_1 + a^2 t t_1 - a^2 t_1^2)}$$

On déduit que:

$$N = \{0, \frac{(t - t_1) (b^2 + a^2 t_1)}{b^2 t - b^2 t_1 + c^2 t_1 + a^2 t t_1 - a^2 t_1^2}, \frac{c^2 t_1}{b^2 t - b^2 t_1 + c^2 t_1 + a^2 t t_1 - a^2 t_1^2}\}$$

Calculons le vecteur $\overrightarrow{NW}$. On a:

$$\overrightarrow{NW} = g(1) \overrightarrow{OA} + g(2) \overrightarrow{OB} + g(3) \overrightarrow{OC}$$

avec

$$g(1) = \frac{1}{1+t}$$

$$g(2) = \frac{-b^2 t + b^2 t_1 - a^2 t t_1 + c^2 t t_1 + a^2 t_1^2}{(1+t)(b^2 t - b^2 t_1 + c^2 t_1 + a^2 t t_1 - a^2 t_1^2)}$$

$$g(3) = \frac{-c^2 t_1}{b^2 t - b^2 t_1 + c^2 t_1 + a^2 t t_1 - a^2 t_1^2}$$

Calculons le vecteur $\overrightarrow{NQ}$. On a:

$$\overrightarrow{NQ} = h(1) \overrightarrow{OA} + h(2) \overrightarrow{OB} + h(3) \overrightarrow{OC}$$

avec

$$h(1) = \frac{a^2 t_1 (-t + t_1)}{b^2 t^2 - a^2 t t_1 - b^2 t t_1 + c^2 t t_1 + a^2 t_1^2}$$

$$h(2) = \frac{a^2 (t - t_1) t_1 (b^2 t - b^2 t_1 + a^2 t t_1 - c^2 t t_1 - a^2 t_1^2)}{(b^2 t - b^2 t_1 + c^2 t_1 + a^2 t t_1 - a^2 t_1^2) (b^2 t^2 - a^2 t t_1 - b^2 t t_1 + c^2 t t_1 + a^2 t_1^2)}$$

$$h(3) = \frac{a^2 c^2 (1+t) (t - t_1) t_1^2}{(b^2 t - b^2 t_1 + c^2 t_1 + a^2 t t_1 - a^2 t_1^2) (b^2 t^2 - a^2 t t_1 - b^2 t t_1 + c^2 t t_1 + a^2 t_1^2)}$$

On a ainsi

$$\overrightarrow{NW} = \frac{-b^2 t^2 + a^2 t t_1 + b^2 t t_1 - c^2 t t_1 - a^2 t_1^2}{a^2 (1+t) (t - t_1) t_1} \overrightarrow{NQ}$$

Dessin = Dessin $\cup M = \{A, B, C, D, M, N, P, Q, W\}$

Détermination du point M :

Soit M le point $(WQ) \cap (AD)$. Le point M est composé.

Comme $M \in (WQ)$, on a, en choisissant les inconnues ν_1

$$\overrightarrow{OM} = (1 - \nu_1) \overrightarrow{OQ} + \nu_1 \overrightarrow{OW}$$

On déduit:

$$\overrightarrow{OM} = i(1) \overrightarrow{OA} + i(2) \overrightarrow{OB} + i(3) \overrightarrow{OC}$$

avec

$$i(1) = \frac{b^2 \nu_1 t^2 - a^2 t t_1 - b^2 \nu_1 t t_1 + c^2 \nu_1 t t_1 - a^2 t^2 t_1 + a^2 \nu_1 t^2 t_1 + a^2 t_1^2 + a^2 t t_1^2 - a^2 \nu_1 t t_1^2}{(1+t)(b^2 t^2 - a^2 t t_1 - b^2 t t_1 + c^2 t t_1 + a^2 t_1^2)}$$

$$i(2) = \frac{t (b^2 t - b^2 \nu_1 t + b^2 t^2 - b^2 t_1 + b^2 \nu_1 t_1 - b^2 t t_1 - a^2 \nu_1 t t_1 + c^2 \nu_1 t t_1 + a^2 \nu_1 t_1^2)}{(1+t)(b^2 t^2 - a^2 t t_1 - b^2 t t_1 + c^2 t t_1 + a^2 t_1^2)}$$

$$i(3) = \frac{c^2 (1 - \nu_1) t t_1}{b^2 t^2 - a^2 t t_1 - b^2 t t_1 + c^2 t t_1 + a^2 t_1^2}$$

Comme $M \in (AD)$, on a, en choisissant les inconnues μ_1

$$\overrightarrow{OM} = \mu_1 \overrightarrow{OA} + (1 - \mu_1) \overrightarrow{OD}$$

On déduit:

$$\overrightarrow{OM} = j(1) \overrightarrow{OA} + j(2) \overrightarrow{OB} + j(3) \overrightarrow{OC}$$

avec

$$j(1) = \frac{b^2 + a^2 t + b^2 \mu_1 t - c^2 \mu_1 t + a^2 \mu_1 t^2}{b^2 + a^2 t + b^2 t - c^2 t + a^2 t^2}$$

$$j(2) = \frac{(1 - \mu_1) t (b^2 + a^2 t)}{b^2 + a^2 t + b^2 t - c^2 t + a^2 t^2}$$

$$j(3) = \frac{c^2 (1 - \mu_1) t}{-b^2 - a^2 t - b^2 t + c^2 t - a^2 t^2}$$

La résolution du système linéaire d'inconnues ν_1, μ_1 donne

$$\nu_1 = \frac{(t - t_1) (b^2 + a^2 t_1)}{b^2 t + 2 a^2 t t_1 + b^2 t t_1 - c^2 t t_1 + a^2 t^2 t_1 - a^2 t_1^2}$$

$$\mu_1 = \frac{t (1 + t) (b^2 + a^2 t_1)}{b^2 t + 2 a^2 t t_1 + b^2 t t_1 - c^2 t t_1 + a^2 t^2 t_1 - a^2 t_1^2}$$

On déduit que:

$$M = \left\{ \frac{b^2 t + 2 a^2 t t_1 - a^2 t_1^2}{b^2 t + 2 a^2 t t_1 + b^2 t t_1 - c^2 t t_1 + a^2 t^2 t_1 - a^2 t_1^2}, \right. \\ \frac{t (b^2 + a^2 t) t_1}{b^2 t + 2 a^2 t t_1 + b^2 t t_1 - c^2 t t_1 + a^2 t^2 t_1 - a^2 t_1^2}, \\ \left. \frac{c^2 t t_1}{-b^2 t - 2 a^2 t t_1 - b^2 t t_1 + c^2 t t_1 - a^2 t^2 t_1 + a^2 t_1^2} \right\}$$

Calculons le vecteur $\overrightarrow{MW}$. On a:

$$\overrightarrow{MW} = k(1) \overrightarrow{OA} + k(2) \overrightarrow{OB} + k(3) \overrightarrow{OC}$$

avec

$$k(1) = \frac{-t (b^2 t - b^2 t_1 + c^2 t_1 + a^2 t t_1 - a^2 t_1^2)}{(1 + t) (b^2 t + 2 a^2 t t_1 + b^2 t t_1 - c^2 t t_1 + a^2 t^2 t_1 - a^2 t_1^2)}$$

$$k(2) = \frac{t (b^2 t - b^2 t_1 + a^2 t t_1 - c^2 t t_1 - a^2 t_1^2)}{(1 + t) (b^2 t + 2 a^2 t t_1 + b^2 t t_1 - c^2 t t_1 + a^2 t^2 t_1 - a^2 t_1^2)}$$

$$k(3) = \frac{-c^2 t t_1}{-b^2 t - 2 a^2 t t_1 - b^2 t t_1 + c^2 t t_1 - a^2 t^2 t_1 + a^2 t_1^2}$$

Calculons le vecteur $\overrightarrow{MP}$. On a:

$$\overrightarrow{MP} = l(1) \overrightarrow{OA} + l(2) \overrightarrow{OB} + l(3) \overrightarrow{OC}$$

avec

$$l(1) = \frac{a^2 t_1 (-t + t_1) (- (b^2 t) + b^2 t_1 - c^2 t_1 - a^2 t t_1 + a^2 t_1^2)}{(b^2 t + 2 a^2 t t_1 + b^2 t t_1 - c^2 t t_1 + a^2 t^2 t_1 - a^2 t_1^2) (b^2 + a^2 t_1 + b^2 t_1 - c^2 t_1 + a^2 t_1^2)}$$

$$l(2) = \frac{a^2 (-t + t_1) t_1 (b^2 t - b^2 t_1 + a^2 t t_1 - c^2 t t_1 - a^2 t_1^2)}{(b^2 t + 2 a^2 t t_1 + b^2 t t_1 - c^2 t t_1 + a^2 t^2 t_1 - a^2 t_1^2) (b^2 + a^2 t_1 + b^2 t_1 - c^2 t_1 + a^2 t_1^2)}$$

$$l(3) = \frac{a^2 c^2 (1 + t) t_1^2 (-t + t_1)}{(b^2 t + 2 a^2 t t_1 + b^2 t t_1 - c^2 t t_1 + a^2 t^2 t_1 - a^2 t_1^2) (b^2 + a^2 t_1 + b^2 t_1 - c^2 t_1 + a^2 t_1^2)}$$

On a ainsi

$$\overrightarrow{MW} = \frac{t (b^2 + a^2 t_1 + b^2 t_1 - c^2 t_1 + a^2 t_1^2)}{a^2 (1 + t) (t_1 - t) t_1} \overrightarrow{MP}$$

Posons

$$k_1 = \frac{b^2 t^2 - a^2 t t_1 - b^2 t t_1 + c^2 t t_1 + a^2 t_1^2}{t (b^2 + a^2 t_1 + b^2 t_1 - c^2 t_1 + a^2 t_1^2)}$$

$$k_2 = \frac{-b^2 t^2 + a^2 t t_1 + b^2 t t_1 - c^2 t t_1 - a^2 t_1^2}{a^2 (1+t) (t-t_1) t_1}$$

$$k_3 = \frac{t (b^2 + a^2 t_1 + b^2 t_1 - c^2 t_1 + a^2 t_1^2)}{a^2 (1+t) (t_1-t) t_1}$$

On a $\frac{k_2}{k_1 k_3} = 1$. Il résulte que

$$NW \cdot MP \cdot QW = MW \cdot NQ \cdot WP$$

2). Posons $\overline{PW} = \overline{QW} = K$ avec K fixé. L'égalité se simplifie en $\overline{NW} \overline{MP} = \overline{MW} \overline{NQ}$, soit

$$\overline{NW} (\overline{MW} + \overline{WP}) = \overline{MW} (\overline{NW} + \overline{WQ})$$

donc $\overline{NW} \overline{WP} = \overline{MW} \overline{WQ}$. Ainsi, $(-K) \overline{NW} = (-K) \overline{MW}$ équivaut à W milieu de $[MP]$.

15.2 Théorème du papillon simple pour une conique

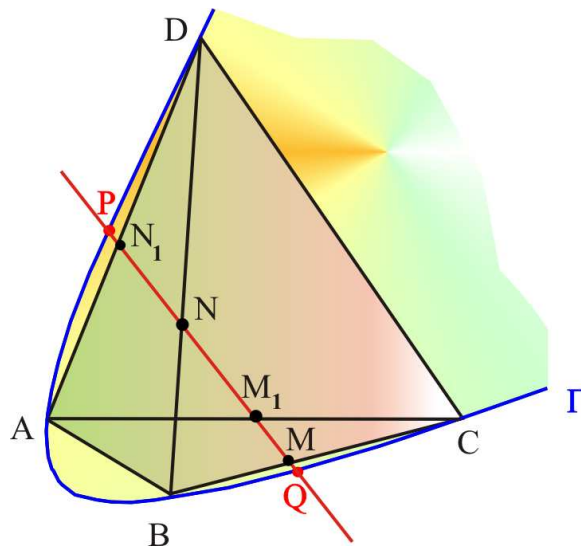
Exercice 15.2.1

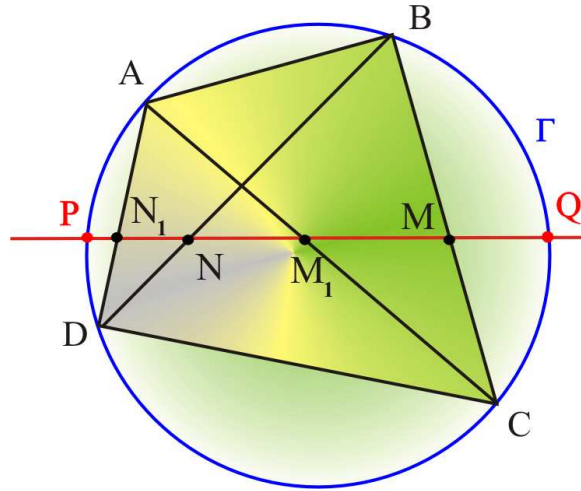
Soient Γ une conique par quatre points distincts A, B, C, D et P, Q deux points de Γ distincts des points précédents. On considère les points M, N, M_1, N_1 de la droite (PQ) définis par

$$M = (BC) \cap (PQ) \quad M_1 = (AC) \cap (PQ) \quad N = (BD) \cap (PQ) \quad N_1 = (AD) \cap (PQ)$$

Montrer que

$$\overline{MP} \overline{NQ} \overline{M_1 N_1} = \overline{N_1 Q} \overline{M_1 P} \overline{MN}$$





L'égalité est identique à

$$\frac{\overline{PM}}{\overline{MN}} \frac{\overline{NQ}}{\overline{QN_1}} \frac{\overline{N_1M_1}}{\overline{M_1P}} = -1$$

soit $r(P, M, N, Q, N_1, M_1) = -1$, r désignant le multi-rapport.

Solution:

Nous abrégeons les calculs des diverses intersections. L'équation de la conique est de la forme

$$c^2 X Y + b^2 \beta_1 X Z + a^2 \beta_2 Y Z = 0$$

Comme dans le théorème du papillon simple, on a supprimé les variables naturelles X, Y, X_1, Y_1, X_2, Y_2 en posant $Y = t X, Y_1 = t_1 X_1, Y_2 = t_2 X_2$.

Dessin = $\{A, B, C, D, P, Q\}$

Le repère barycentrique choisi est A, B, C .

Les points composés sont D, P, Q .

Les coordonnées barycentriques des points composés sont:

$$D = \left\{ \frac{b^2 \beta_1 + a^2 \beta_2 t}{b^2 \beta_1 + b^2 \beta_1 t + a^2 \beta_2 t - c^2 t + a^2 \beta_2 t^2}, \frac{t (b^2 \beta_1 + a^2 \beta_2 t)}{b^2 \beta_1 + b^2 \beta_1 t + a^2 \beta_2 t - c^2 t + a^2 \beta_2 t^2}, \frac{c^2 t}{-b^2 \beta_1 - b^2 \beta_1 t - a^2 \beta_2 t + c^2 t - a^2 \beta_2 t^2} \right\}$$

$$P = \left\{ \frac{b^2 \beta_1 + a^2 \beta_2 t_1}{b^2 \beta_1 + b^2 \beta_1 t_1 + a^2 \beta_2 t_1 - c^2 t_1 + a^2 \beta_2 t_1^2}, \frac{t_1 (b^2 \beta_1 + a^2 \beta_2 t_1)}{b^2 \beta_1 + b^2 \beta_1 t_1 + a^2 \beta_2 t_1 - c^2 t_1 + a^2 \beta_2 t_1^2}, \frac{c^2 t_1}{-b^2 \beta_1 - b^2 \beta_1 t_1 - a^2 \beta_2 t_1 + c^2 t_1 - a^2 \beta_2 t_1^2} \right\}$$

$$Q = \left\{ \frac{b^2 \beta_1 + a^2 \beta_2 t_2}{b^2 \beta_1 + b^2 \beta_1 t_2 + a^2 \beta_2 t_2 - c^2 t_2 + a^2 \beta_2 t_2^2}, \right. \\ \frac{t_2 (b^2 \beta_1 + a^2 \beta_2 t_2)}{b^2 \beta_1 + b^2 \beta_1 t_2 + a^2 \beta_2 t_2 - c^2 t_2 + a^2 \beta_2 t_2^2}, \\ \left. \frac{c^2 t_2}{-b^2 \beta_1 - b^2 \beta_1 t_2 - a^2 \beta_2 t_2 + c^2 t_2 - a^2 \beta_2 t_2^2} \right\}$$

Dessin = Dessin $\cup \{M\} = \{A, B, C, D, M, P, Q\}$

Détermination du point M :

Soit M le point $(BC) \cap (PQ)$. Le point M est composé.

Comme $M \in (BC)$, on a, en choisissant l'inconnue ν_1

$$\overrightarrow{OM} = \nu_1 \overrightarrow{OB} + (1 - \nu_1) \overrightarrow{OC}$$

Comme $M \in (PQ)$, on a, en choisissant l'inconnue μ_1

$$\overrightarrow{OM} = \mu_1 \overrightarrow{OP} + (1 - \mu_1) \overrightarrow{OQ}$$

Nous obtenons

$$\nu_1 = \frac{(b^2 \beta_1 + a^2 \beta_2 t_1) (b^2 \beta_1 + a^2 \beta_2 t_2)}{b^4 \beta_1^2 - b^2 \beta_1 c^2 + a^2 b^2 \beta_1 \beta_2 t_1 + a^2 b^2 \beta_1 \beta_2 t_2 + a^4 \beta_2^2 t_1 t_2}$$

$$\mu_1 = \frac{(b^2 \beta_1 + b^2 \beta_1 t_1 + a^2 \beta_2 t_1 - c^2 t_1 + a^2 \beta_2 t_1^2) (b^2 \beta_1 + a^2 \beta_2 t_2)}{(t_1 - t_2) (b^4 \beta_1^2 - b^2 \beta_1 c^2 + a^2 b^2 \beta_1 \beta_2 t_1 + a^2 b^2 \beta_1 \beta_2 t_2 + a^4 \beta_2^2 t_1 t_2)}$$

et

$$M = \left\{ 0, \frac{(b^2 \beta_1 + a^2 \beta_2 t_1) (b^2 \beta_1 + a^2 \beta_2 t_2)}{b^4 \beta_1^2 - b^2 \beta_1 c^2 + a^2 b^2 \beta_1 \beta_2 t_1 + a^2 b^2 \beta_1 \beta_2 t_2 + a^4 \beta_2^2 t_1 t_2}, \right. \\ \left. \frac{-b^2 \beta_1 c^2}{b^4 \beta_1^2 - b^2 \beta_1 c^2 + a^2 b^2 \beta_1 \beta_2 t_1 + a^2 b^2 \beta_1 \beta_2 t_2 + a^4 \beta_2^2 t_1 t_2} \right\}$$

Dessin = Dessin $\cup \{M_1\} = \{A, B, C, D, M, M_1, P, Q\}$

Détermination du point M_1 :

Soit M_1 le point $(AC) \cap (PQ)$. Le point M_1 est composé.

Comme $M_1 \in (AC)$, on a, en choisissant l'inconnue ν_1

$$\overrightarrow{OM_1} = \nu_1 \overrightarrow{OA} + (1 - \nu_1) \overrightarrow{OC}$$

Comme $M_1 \in (PQ)$, on a, en choisissant l'inconnue μ_1

$$\overrightarrow{OM_1} = \mu_1 \overrightarrow{OP} + (1 - \mu_1) \overrightarrow{OQ}$$

Nous obtenons

$$\nu_1 = \frac{(b^2 \beta_1 + a^2 \beta_2 t_1) (b^2 \beta_1 + a^2 \beta_2 t_2)}{b^4 \beta_1^2 + a^2 b^2 \beta_1 \beta_2 t_1 + a^2 b^2 \beta_1 \beta_2 t_2 + a^4 \beta_2^2 t_1 t_2 - a^2 \beta_2 c^2 t_1 t_2}$$

$$\mu_1 = \frac{(b^2 \beta_1 + b^2 \beta_1 t_1 + a^2 \beta_2 t_1 - c^2 t_1 + a^2 \beta_2 t_1^2) t_2 (b^2 \beta_1 + a^2 \beta_2 t_2)}{(t_2 - t_1) (b^4 \beta_1^2 + a^2 b^2 \beta_1 \beta_2 t_1 + a^2 b^2 \beta_1 \beta_2 t_2 + a^4 \beta_2^2 t_1 t_2 - a^2 \beta_2 c^2 t_1 t_2)}$$

$$M_1 = \left\{ \frac{(b^2 \beta_1 + a^2 \beta_2 t_1) (b^2 \beta_1 + a^2 \beta_2 t_2)}{b^4 \beta_1^2 + a^2 b^2 \beta_1 \beta_2 t_1 + a^2 b^2 \beta_1 \beta_2 t_2 + a^4 \beta_2^2 t_1 t_2 - a^2 \beta_2 c^2 t_1 t_2} - a^2 \beta_2 c^2 t_1 t_2, 0, \frac{-a^2 \beta_2 c^2 t_1 t_2}{b^4 \beta_1^2 + a^2 b^2 \beta_1 \beta_2 t_1 + a^2 b^2 \beta_1 \beta_2 t_2 + a^4 \beta_2^2 t_1 t_2 - a^2 \beta_2 c^2 t_1 t_2} \right\}$$

Dessin = Dessin $\cup \{N\} = \{A, B, C, D, M, M_1, N, P, Q\}$

Détermination du point N :

Soit N le point $(BD) \cap (PQ)$. Le point N est composé.

Comme $N \in (BD)$, on a, en choisissant l'inconnue ν_1

$$\overrightarrow{ON} = \nu_1 \overrightarrow{OB} + (1 - \nu_1) \overrightarrow{OD}$$

Comme $N \in (PQ)$, on a, en choisissant l'inconnue μ_1

$$\overrightarrow{ON} = \mu_1 \overrightarrow{OP} + (1 - \mu_1) \overrightarrow{OQ}$$

Nous obtenons

$$\begin{aligned} \nu_1 &= \frac{a^2 \beta_2 (t_1 - t) (t - t_2)}{b^2 \beta_1 + b^2 \beta_1 t + a^2 \beta_2 t - c^2 t + a^2 \beta_2 t t_1 + a^2 \beta_2 t t_2 - a^2 \beta_2 t_1 t_2} \\ \mu_1 &= \frac{(b^2 \beta_1 + b^2 \beta_1 t_1 + a^2 \beta_2 t_1 - c^2 t_1 + a^2 \beta_2 t_1^2) (t - t_2)}{(t_1 - t_2) (b^2 \beta_1 + b^2 \beta_1 t + a^2 \beta_2 t - c^2 t + a^2 \beta_2 t t_1 + a^2 \beta_2 t t_2 - a^2 \beta_2 t_1 t_2)} \\ N &= \left\{ \frac{b^2 \beta_1 + a^2 \beta_2 t}{b^2 \beta_1 + b^2 \beta_1 t + a^2 \beta_2 t - c^2 t + a^2 \beta_2 t t_1 + a^2 \beta_2 t t_2 - a^2 \beta_2 t_1 t_2}, \right. \\ &\quad \frac{b^2 \beta_1 t + a^2 \beta_2 t t_1 + a^2 \beta_2 t t_2 - a^2 \beta_2 t_1 t_2}{b^2 \beta_1 + b^2 \beta_1 t + a^2 \beta_2 t - c^2 t + a^2 \beta_2 t t_1 + a^2 \beta_2 t t_2 - a^2 \beta_2 t_1 t_2}, \\ &\quad \left. \frac{c^2 t}{-b^2 \beta_1 - b^2 \beta_1 t - a^2 \beta_2 t + c^2 t - a^2 \beta_2 t t_1 - a^2 \beta_2 t t_2 + a^2 \beta_2 t_1 t_2} \right\} \end{aligned}$$

Dessin = Dessin $\cup \{N_1\} = \{A, B, C, D, M, M_1, N, N_1, P, Q\}$

Détermination du point N_1 :

Soit N_1 le point $(AD) \cap (PQ)$. Le point N_1 est composé.

Comme $N_1 \in (AD)$, on a, en choisissant l'inconnue ν_1

$$\overrightarrow{ON_1} = \nu_1 \overrightarrow{OA} + (1 - \nu_1) \overrightarrow{OD}$$

Comme $N_1 \in (PQ)$, on a, en choisissant l'inconnue μ_1

$$\overrightarrow{ON_1} = \mu_1 \overrightarrow{OP} + (1 - \mu_1) \overrightarrow{OQ}$$

Nous obtenons

$$\begin{aligned} \nu_1 &= \frac{b^2 \beta_1 (t - t_1) (t - t_2)}{t (b^2 \beta_1 t - b^2 \beta_1 t_1 - b^2 \beta_1 t_2 - b^2 \beta_1 t_1 t_2 - a^2 \beta_2 t_1 t_2 + c^2 t_1 t_2 - a^2 \beta_2 t t_1 t_2)} \\ \mu_1 &= \frac{(b^2 \beta_1 + b^2 \beta_1 t_1 + a^2 \beta_2 t_1 - c^2 t_1 + a^2 \beta_2 t_1^2) t_2 (t - t_2)}{(t_1 - t_2) (-b^2 \beta_1 t + b^2 \beta_1 t_1 + b^2 \beta_1 t_2 + b^2 \beta_1 t_1 t_2 + a^2 \beta_2 t_1 t_2 - c^2 t_1 t_2 + a^2 \beta_2 t t_1 t_2)} \end{aligned}$$

$$N_1 = \left\{ \frac{-b^2 \beta_1 t + b^2 \beta_1 t_1 + b^2 \beta_1 t_2 + a^2 \beta_2 t_1 t_2}{-b^2 \beta_1 t + b^2 \beta_1 t_1 + b^2 \beta_1 t_2 + b^2 \beta_1 t_1 t_2 + a^2 \beta_2 t_1 t_2 - c^2 t_1 t_2 + a^2 \beta_2 t t_1 t_2}, \right. \\ \left. \frac{(-b^2 \beta_1 + a^2 \beta_2 t) t_1 t_2}{b^2 \beta_1 t - b^2 \beta_1 t_1 - b^2 \beta_1 t_2 - b^2 \beta_1 t_1 t_2 - a^2 \beta_2 t_1 t_2 + c^2 t_1 t_2 - a^2 \beta_2 t t_1 t_2}, \right. \\ \left. \frac{c^2 t_1 t_2}{b^2 \beta_1 t - b^2 \beta_1 t_1 - b^2 \beta_1 t_2 - b^2 \beta_1 t_1 t_2 - a^2 \beta_2 t_1 t_2 + c^2 t_1 t_2 - a^2 \beta_2 t t_1 t_2} \right\}$$

Calculons le vecteur $\overrightarrow{MP}$. On a:

$$\overrightarrow{MP} = i(1) \overrightarrow{OA} + i(2) \overrightarrow{OB} + i(3) \overrightarrow{OC}$$

avec

$$i(1) = \frac{b^2 \beta_1 + a^2 \beta_2 t_1}{b^2 \beta_1 + b^2 \beta_1 t_1 + a^2 \beta_2 t_1 - c^2 t_1 + a^2 \beta_2 t_1^2} \\ i(2) = \frac{- (b^2 \beta_1 + a^2 \beta_2 t_1) (b^4 \beta_1^2 + a^2 b^2 \beta_1 \beta_2 t_1 + a^2 b^2 \beta_1 \beta_2 t_2 + a^4 \beta_2^2 t_1 t_2 - a^2 \beta_2 c^2 t_1 t_2)}{(b^2 \beta_1 + b^2 \beta_1 t_1 + a^2 \beta_2 t_1 - c^2 t_1 + a^2 \beta_2 t_1^2) (b^4 \beta_1^2 - b^2 \beta_1 c^2 + a^2 b^2 \beta_1 \beta_2 t_1 + a^2 b^2 \beta_1 \beta_2 t_2 + a^4 \beta_2^2 t_1 t_2)} \\ i(3) = \frac{c^2 (b^2 \beta_1 + a^2 \beta_2 t_1) (b^2 \beta_1 - a^2 \beta_2 t_1 t_2)}{(b^2 \beta_1 + b^2 \beta_1 t_1 + a^2 \beta_2 t_1 - c^2 t_1 + a^2 \beta_2 t_1^2) (b^4 \beta_1^2 - b^2 \beta_1 c^2 + a^2 b^2 \beta_1 \beta_2 t_1 + a^2 b^2 \beta_1 \beta_2 t_2 + a^4 \beta_2^2 t_1 t_2)}$$

Calculons le vecteur $\overrightarrow{N_1Q}$. On a:

$$\overrightarrow{N_1Q} = j(1) \overrightarrow{OA} + j(2) \overrightarrow{OB} + j(3) \overrightarrow{OC}$$

avec

$$j(1) = \frac{(t_2 - t) t_2 (b^4 \beta_1^2 - b^2 \beta_1 c^2 + a^2 b^2 \beta_1 \beta_2 t_1 + a^2 b^2 \beta_1 \beta_2 t_2 + a^4 \beta_2^2 t_1 t_2)}{j_*} \\ j(2) = \frac{(t - t_2) t_2 (b^4 \beta_1^2 + a^2 b^2 \beta_1 \beta_2 t_1 + a^2 b^2 \beta_1 \beta_2 t_2 + a^4 \beta_2^2 t_1 t_2 - a^2 \beta_2 c^2 t_1 t_2)}{j_*} \\ j(3) = \frac{c^2 (t_2 - t) t_2 (b^2 \beta_1 - a^2 \beta_2 t_1 t_2)}{j_*}$$

avec

$$j_* = (b^2 \beta_1 t - b^2 \beta_1 t_1 - b^2 \beta_1 t_2 - b^2 \beta_1 t_1 t_2 - a^2 \beta_2 t_1 t_2 + c^2 t_1 t_2 - a^2 \beta_2 t t_1 t_2) \\ (b^2 \beta_1 + b^2 \beta_1 t_2 + a^2 \beta_2 t_2 - c^2 t_2 + a^2 \beta_2 t_2^2)$$

On a ainsi $\overrightarrow{MP} = \frac{Num}{Den} \overrightarrow{N_1Q}$ avec

$$Num = (-b^2 \beta_1 t + b^2 \beta_1 t_1 + b^2 \beta_1 t_2 + b^2 \beta_1 t_1 t_2 + a^2 \beta_2 t_1 t_2 - c^2 t_1 t_2 + a^2 \beta_2 t t_1 t_2) \\ (b^2 \beta_1 + b^2 \beta_1 t_2 + a^2 \beta_2 t_2 - c^2 t_2 + a^2 \beta_2 t_2^2) (b^2 \beta_1 + a^2 \beta_2 t_1)$$

$$Den = (t - t_2) t_2 (b^6 \beta_1^3 - b^4 \beta_1^2 c^2 + b^6 \beta_1^3 t_1 + 2 a^2 b^4 \beta_1^2 \beta_2 t_1 - 2 b^4 \beta_1^2 c^2 t_1 - a^2 b^2 \beta_1 \beta_2 c^2 t_1 + b^2 \beta_1 c^4 t_1 \\ + 2 a^2 b^4 \beta_1^2 \beta_2 t_1^2 + a^4 b^2 \beta_1 \beta_2^2 t_1^2 - 2 a^2 b^2 \beta_1 \beta_2 c^2 t_1^2 + a^4 b^2 \beta_1 \beta_2^2 t_1^3 + a^2 b^4 \beta_1^2 \beta_2 t_2 + a^2 b^4 \beta_1^2 \beta_2 t_1 t_2 \\ + 2 a^4 b^2 \beta_1 \beta_2^2 t_1 t_2 - a^2 b^2 \beta_1 \beta_2 c^2 t_1 t_2 + 2 a^4 b^2 \beta_1 \beta_2^2 t_1^2 t_2 + a^6 \beta_2^3 t_1^2 t_2 - a^4 \beta_2^2 c^2 t_1^2 t_2 + a^6 \beta_2^3 t_1^3 t_2)$$

Calculons le vecteur $\overrightarrow{M_1P}$. On a:

$$\overrightarrow{M_1P} = k(1) \overrightarrow{OA} + k(2) \overrightarrow{OB} + k(3) \overrightarrow{OC}$$

avec

$$k(1) = \frac{-t_1 (b^2 \beta_1 + a^2 \beta_2 t_1) (b^4 \beta_1^2 - b^2 \beta_1 c^2 + a^2 b^2 \beta_1 \beta_2 t_1 + a^2 b^2 \beta_1 \beta_2 t_2 + a^4 \beta_2^2 t_1 t_2)}{k_* (b^4 \beta_1^2 + a^2 b^2 \beta_1 \beta_2 t_1 + a^2 b^2 \beta_1 \beta_2 t_2 + a^4 \beta_2^2 t_1 t_2 - a^2 \beta_2 c^2 t_1 t_2)}$$

$$k(2) = \frac{t_1 (b^2 \beta_1 + a^2 \beta_2 t_1)}{k_*}$$

$$k(3) = \frac{-c^2 t_1 (b^2 \beta_1 + a^2 \beta_2 t_1) (b^2 \beta_1 - a^2 \beta_2 t_1 t_2)}{k_* (b^4 \beta_1^2 + a^2 b^2 \beta_1 \beta_2 t_1 + a^2 b^2 \beta_1 \beta_2 t_2 + a^4 \beta_2^2 t_1 t_2 - a^2 \beta_2 c^2 t_1 t_2)}$$

avec

$$k_* = (b^2 \beta_1 + b^2 \beta_1 t_1 + a^2 \beta_2 t_1 - c^2 t_1 + a^2 \beta_2 t_1^2)$$

Calculons le vecteur $\overrightarrow{NQ}$. On a:

$$\overrightarrow{NQ} = l(1) \overrightarrow{OA} + l(2) \overrightarrow{OB} + l(3) \overrightarrow{OC}$$

avec

$$l(1) = \frac{(t - t_2) (b^4 \beta_1^2 - b^2 \beta_1 c^2 + a^2 b^2 \beta_1 \beta_2 t_1 + a^2 b^2 \beta_1 \beta_2 t_2 + a^4 \beta_2^2 t_1 t_2)}{l_* (b^2 \beta_1 + b^2 \beta_1 t_2 + a^2 \beta_2 t_2 - c^2 t_2 + a^2 \beta_2 t_2^2)}$$

$$l(2) = \frac{(t_2 - t) (b^4 \beta_1^2 + a^2 b^2 \beta_1 \beta_2 t_1 + a^2 b^2 \beta_1 \beta_2 t_2 + a^4 \beta_2^2 t_1 t_2 - a^2 \beta_2 c^2 t_1 t_2)}{l_* (b^2 \beta_1 + b^2 \beta_1 t_2 + a^2 \beta_2 t_2 - c^2 t_2 + a^2 \beta_2 t_2^2)}$$

$$l(3) = \frac{c^2 (t - t_2) (b^2 \beta_1 - a^2 \beta_2 t_1 t_2)}{l_* (b^2 \beta_1 + b^2 \beta_1 t_2 + a^2 \beta_2 t_2 - c^2 t_2 + a^2 \beta_2 t_2^2)}$$

avec

$$l_* = (b^2 \beta_1 + b^2 \beta_1 t + a^2 \beta_2 t - c^2 t + a^2 \beta_2 t t_1 + a^2 \beta_2 t t_2 - a^2 \beta_2 t_1 t_2)$$

On a ainsi $\overrightarrow{M_1 P} = \frac{Num}{Den} \overrightarrow{NQ}$ avec

$$Num = -t_1 (b^2 \beta_1 + a^2 \beta_2 t_1) \\ (b^2 \beta_1 + b^2 \beta_1 t + a^2 \beta_2 t - c^2 t + a^2 \beta_2 t t_1 + a^2 \beta_2 t t_2 - a^2 \beta_2 t_1 t_2) \\ (b^2 \beta_1 + b^2 \beta_1 t_2 + a^2 \beta_2 t_2 - c^2 t_2 + a^2 \beta_2 t_2^2)$$

$$Den = (t - t_2) (b^6 \beta_1^3 + b^6 \beta_1^3 t_1 + 2 a^2 b^4 \beta_1^2 \beta_2 t_1 - b^4 \beta_1^2 c^2 t_1 + 2 a^2 b^4 \beta_1^2 \beta_2 t_1^2 + a^4 b^2 \beta_1 \beta_2^2 t_1^2 \\ - a^2 b^2 \beta_1 \beta_2 c^2 t_1^2 + a^4 b^2 \beta_1 \beta_2^2 t_1^3 + a^2 b^4 \beta_1^2 \beta_2 t_2 + a^2 b^4 \beta_1^2 \beta_2 t_1 t_2 + 2 a^4 b^2 \beta_1 \beta_2^2 t_1 t_2 \\ - 2 a^2 b^2 \beta_1 \beta_2 c^2 t_1 t_2 + 2 a^4 b^2 \beta_1 \beta_2^2 t_1^2 t_2 + a^6 \beta_2^3 t_1^2 t_2 - a^2 b^2 \beta_1 \beta_2 c^2 t_1^2 t_2 - 2 a^4 \beta_2^2 c^2 t_1^2 t_2 \\ + a^2 \beta_2 c^4 t_1^2 t_2 + a^6 \beta_2^3 t_1^3 t_2 - a^4 \beta_2^2 c^2 t_1^3 t_2)$$

Calculons le vecteur $\overrightarrow{MN}$. On a:

$$\overrightarrow{MN} = m(1) \overrightarrow{OA} + m(2) \overrightarrow{OB} + m(3) \overrightarrow{OC}$$

avec

$$m(1) = \frac{b^2 \beta_1 + a^2 \beta_2 t}{m_*}$$

$$m(2) = \frac{-(b^2 \beta_1 + a^2 \beta_2 t) (b^4 \beta_1^2 + a^2 b^2 \beta_1 \beta_2 t_1 + a^2 b^2 \beta_1 \beta_2 t_2 + a^4 \beta_2^2 t_1 t_2 - a^2 \beta_2 c^2 t_1 t_2)}{m_* (b^4 \beta_1^2 - b^2 \beta_1 c^2 + a^2 b^2 \beta_1 \beta_2 t_1 + a^2 b^2 \beta_1 \beta_2 t_2 + a^4 \beta_2^2 t_1 t_2)}$$

$$m(3) = \frac{c^2 (b^2 \beta_1 + a^2 \beta_2 t) (b^2 \beta_1 - a^2 \beta_2 t_1 t_2)}{m_* (b^4 \beta_1^2 - b^2 \beta_1 c^2 + a^2 b^2 \beta_1 \beta_2 t_1 + a^2 b^2 \beta_1 \beta_2 t_2 + a^4 \beta_2^2 t_1 t_2)}$$

avec

$$m_* = (b^2 \beta_1 + b^2 \beta_1 t + a^2 \beta_2 t - c^2 t + a^2 \beta_2 t t_1 + a^2 \beta_2 t t_2 - a^2 \beta_2 t_1 t_2)$$

Calculons le vecteur $\overrightarrow{M_1 N_1}$. On a:

$$\overrightarrow{M_1 N_1} = n(1) \overrightarrow{OA} + n(2) \overrightarrow{OB} + n(3) \overrightarrow{OC}$$

avec

$$n(1) = \frac{-(b^2 \beta_1 + a^2 \beta_2 t) t_1 t_2 (b^4 \beta_1^2 - b^2 \beta_1 c^2 + a^2 b^2 \beta_1 \beta_2 t_1 + a^2 b^2 \beta_1 \beta_2 t_2 + a^4 \beta_2^2 t_1 t_2)}{(b^4 \beta_1^2 + a^2 b^2 \beta_1 \beta_2 t_1 + a^2 b^2 \beta_1 \beta_2 t_2 + a^4 \beta_2^2 t_1 t_2 - a^2 \beta_2 c^2 t_1 t_2) n_*}$$

$$n(2) = \frac{(b^2 \beta_1 + a^2 \beta_2 t) t_1 t_2}{n_*}$$

$$n(3) = \frac{-c^2 (b^2 \beta_1 + a^2 \beta_2 t) t_1 t_2 (b^2 \beta_1 - a^2 \beta_2 t_1 t_2)}{(b^4 \beta_1^2 + a^2 b^2 \beta_1 \beta_2 t_1 + a^2 b^2 \beta_1 \beta_2 t_2 + a^4 \beta_2^2 t_1 t_2 - a^2 \beta_2 c^2 t_1 t_2) n_*}$$

avec

$$n_* = (-b^2 \beta_1 t + b^2 \beta_1 t_1 + b^2 \beta_1 t_2 + b^2 \beta_1 t_1 t_2 + a^2 \beta_2 t_1 t_2 - c^2 t_1 t_2 + a^2 \beta_2 t t_1 t_2)$$

On a ainsi $\overrightarrow{MN} = \frac{Num}{Den} \overrightarrow{M_1 N_1}$ avec

$$Num = (b^4 \beta_1^2 + a^2 b^2 \beta_1 \beta_2 t_1 + a^2 b^2 \beta_1 \beta_2 t_2 + a^4 \beta_2^2 t_1 t_2 - a^2 \beta_2 c^2 t_1 t_2) \\ (-b^2 \beta_1 t + b^2 \beta_1 t_1 + b^2 \beta_1 t_2 + b^2 \beta_1 t_1 t_2 + a^2 \beta_2 t_1 t_2 - c^2 t_1 t_2 + a^2 \beta_2 t t_1 t_2)$$

$$Den = t_1 t_2 (-b^2 \beta_1 - b^2 \beta_1 t - a^2 \beta_2 t + c^2 t - a^2 \beta_2 t t_1 - a^2 \beta_2 t t_2 + a^2 \beta_2 t_1 t_2) \\ (b^4 \beta_1^2 - b^2 \beta_1 c^2 + a^2 b^2 \beta_1 \beta_2 t_1 + a^2 b^2 \beta_1 \beta_2 t_2 + a^4 \beta_2^2 t_1 t_2)$$

On a ainsi

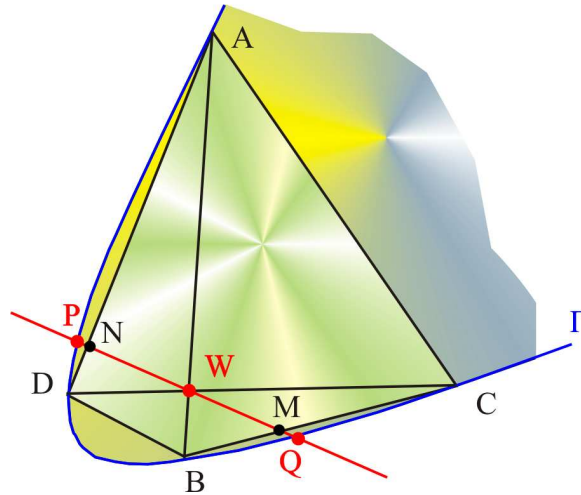
$$\frac{\overline{MP}}{\overline{N_1 Q}} = \frac{\overline{M_1 P}}{\overline{N Q}} \frac{\overline{MN}}{\overline{M_1 N_1}}$$

identique à

$$\overline{MP} \overline{N Q} \overline{M_1 N_1} = \overline{N_1 Q} \overline{M_1 P} \overline{MN}$$

Exercice 15.2.2

Soient A, C, B, D quatre points distincts d'une conique tels que les droites (AB) et (CD) se coupent en W . Soient P et Q deux points de la conique tels que la droite (PQ) passe par W , N_1 (resp. M) le point d'intersection de (PQ) avec le segment (AD) (resp. avec le segment (BC)). Montrer que $\overline{PW} = \overline{WQ}$ implique $\overline{N_1 W} = \overline{WM}$.

**Solution:**

Le raisonnement est identique à celui du cercle. En posant $W = N = M_1$, l'égalité de l'exercice précédent devient

$$\overline{MP} \overline{WQ} \overline{WN_1} = \overline{N_1Q} \overline{WP} \overline{MW}$$

L'égalité $\overline{QW} = \overline{WP}$ implique $\overline{MP} \overline{N_1W} = \overline{N_1Q} \overline{MW}$, soit

$$(\overline{MW} + \overline{WP}) \overline{N_1W} = (\overline{N_1W} + \overline{WQ}) \overline{MW}$$

Il suit $\overline{WP} \overline{N_1W} = \overline{WQ} \overline{MW}$ qui implique $\overline{WN_1} = \overline{MW}$.

15.3 Théorème du papillon double pour une conique**Exercice 15.3.1**

Soient Γ une conique passant par quatre points distincts A, B, C, D et P, Q deux points de Γ distincts des points précédents. Soient A^*, B^*, C^*, D^* quatre points distincts de la conique. On considère les points $M, N, M_1, N_1, M^*, N^*, M_1^*, N_1^*$ de la droite (PQ) définis par

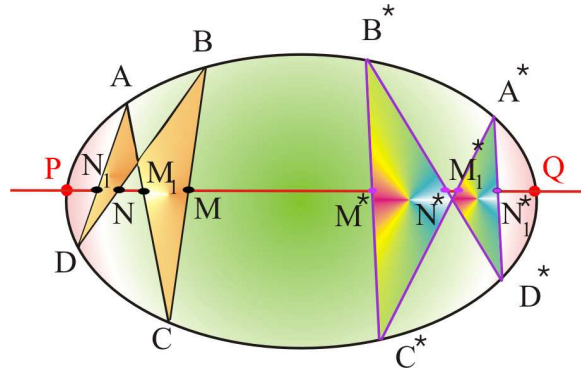
$$M = (BC) \cap (PQ) \quad M_1 = (AC) \cap (PQ) \quad N = (BD) \cap (PQ) \quad N_1 = (AD) \cap (PQ)$$

$$M^* = (B^*C^*) \cap (PQ) \quad M_1^* = (A^*C^*) \cap (PQ) \quad N^* = (B^*D^*) \cap (PQ) \quad N_1^* = (A^*D^*) \cap (PQ)$$

On suppose que

$$\overline{PN_1} = \overline{N_1^*Q} \quad \overline{PM} = \overline{M^*Q} \quad \overline{PN} = \overline{N^*Q}$$

Montrer que $\overline{PM_1} = \overline{M_1^*Q}$.

**Solution:**

On a les égalités

$$\overline{M^*P} \overline{N^*Q} \overline{M_1N_1^*} = \overline{N_1^*Q} \overline{M_1^*P} \overline{M^*N^*}$$

et

$$\overline{MP} \overline{NQ} \overline{M_1N_1} = \overline{N_1Q} \overline{M_1P} \overline{MN}$$

Les points sont tous situés sur une même droite. Orientons cette droite (PQ) et désignons par

$$m, n, m_1, n_1, m^*, n^*, m_1^*, n_1^*$$

les coordonnées des points $M, N, M_1, N_1, M^*, N^*, M_1^*, N_1^*$, en ayant fait choix d'un point origine O sur cette droite. Le descriptif des points N_1^*, M^*, N^* est alors

$$n_1^* = q + p - n_1 \quad m^* = q + p - m \quad n^* = q + p - n$$

et les deux égalités multiplicatives deviennent

$$(p - m^*)(q - n^*)(n_1^* - m_1^*) - (q - n_1^*)(p - m_1^*)(n^* - m^*) = 0$$

$$(p - m)(q - n)(n_1 - m_1) - (q - n_1)(p - m_1)(n - m) = 0$$

en notant que la première équation se développe selon

$$0 = mn n_1 - m n_1 p - m n_1 q + m p q - n p q + n_1 p q + m_1 (-m n + m n_1 - n n_1 + n p + n q - p q)$$

Leur somme fournit l'identité

$$(-m_1 - m_1^* + p + q)(m n - m n_1 + n n_1 - n p - n q + p q) = 0$$

d'où suit

$$m_1 + m_1^* - p - q = 0$$

identique à $PM_1 = M_1^*Q$.

En effet, lorsque $N \neq N_1$, la condition $(m n - m n_1 + n n_1 - n p - n q + p q) = 0$ impliquerait

$$m n n_1 - m n_1 p - m n_1 q + m p q - n p q + n_1 p q = 0$$

d'où suivrait $n = n_1$ (en prenant pour origine le point M sur la droite (PQ) , soit $m = 0$, il reste $-n p q + n_1 p q = 0$), exclu. Lorsque $N = N_1$, la condition $(m n - m n_1 + n n_1 - n p - n q + p q) = 0$ s'écrit $n^2 - n p - n q + p q = 0$ donc $p q = 0$ absurde (en prenant cette fois pour origine le point N sur la droite (PQ)).

CHAPITRE

16

Théorèmes de Napoléon et théorèmes semblables

16 Théorèmes de Napoléon et théorèmes semblables

16.1 Exercice préliminaire

Exercice 16.1.1

Soit ABC un triangle, m_a et m_b deux réels. Déterminer les coordonnées barycentriques des points M_{ab} et M_{ab}^* assujettis aux conditions de distances $AM_{ab} = m_a AB$ et $BM_{ab} = m_b AB$. Même question pour les points $M_{bc}, M_{bc}^*, M_{ca}, M_{ca}^*$ (avec les conditions $BM_{bc} = m_b BC$, $CM_{bc} = m_c BC$ et $CM_{ca} = p_c CA$, $AM_{ca} = p_a CA$).

Solution:

Dessin $= \{A, B, C, M_{ab}\}$

On choisit les coordonnées barycentriques de M_{ab} de la forme $M_{ab} = \{x, y, 1 - x - y\}$, x et y devant être calculés en fonction de m_a , m_b et des longueurs a, b, c des côtés du triangle ABC .

La distance AM_{ab}^2 est égale à

$$\begin{aligned} AM_{ab}^2 &= -AB^2 (-1 + x) y + AC^2 (-1 + x) (-1 + x + y) + BC^2 y (-1 + x + y) \\ &= b^2 - 2b^2 x + b^2 x^2 - a^2 y - b^2 y + c^2 y + a^2 x y + b^2 x y - c^2 x y + a^2 y^2 \end{aligned}$$

La distance BM_{ab}^2 est égale à

$$\begin{aligned} BM_{ab}^2 &= AB^2 x (1 - y) + AC^2 x (-1 + x + y) + BC^2 (-1 + y) (-1 + x + y) \\ &= a^2 - a^2 x - b^2 x + c^2 x + b^2 x^2 - 2a^2 y + a^2 x y + b^2 x y - c^2 x y + a^2 y^2 \end{aligned}$$

Donc

$$AM_{ab}^2 - BM_{ab}^2 = -a^2 + b^2 + a^2 x - b^2 x - c^2 x + a^2 y - b^2 y + c^2 y$$

En égalant cette quantité avec $c^2 (m_a^2 - m_b^2)$ et en résolvant l'équation correspondante d'inconnue x , on obtient

$$x = \frac{a^2 - b^2 + c^2 m_a^2 - c^2 m_b^2 - a^2 y + b^2 y - c^2 y}{a^2 - b^2 - c^2}$$

Il suit

$$BM_{ab}^2 = c^2 \frac{(b^2 c^2 (-1 + m_a^2 - m_b^2))^2 + \lambda (m_a^2 - m_b^2) + \lambda (-1 - m_a^2 + m_b^2) y + \lambda y^2}{(-a^2 + b^2 + c^2)^2}$$

en posant

$$\lambda = -a^4 + 2a^2b^2 - b^4 + 2a^2c^2 + 2b^2c^2 - c^4 = (-a + b + c)(a + b - c)(a - b + c)(a + b + c)$$

Posons

$$\begin{aligned}\alpha_{ab} &= -1 + 2m_a^2 - m_a^4 + 2m_b^2 + 2m_a^2m_b^2 - m_b^4 \\ &= (1 - m_a + m_b)(1 + m_a - m_b)(-1 + m_a + m_b)(1 + m_a + m_b)\end{aligned}$$

En égalant cette expression avec $m_b^2c^2$, on déduit que y prend au plus deux valeurs

$$y = \frac{1 + m_a^2 - m_b^2}{2} \pm \frac{(a^2 - b^2 - c^2) \sqrt{\lambda \alpha_{ab}}}{2\lambda}$$

En prenant

$$y = \frac{1 + m_a^2 - m_b^2}{2} + \frac{(a^2 - b^2 - c^2) \sqrt{\lambda \alpha_{ab}}}{2\lambda}$$

on déduit

$$x = \frac{1 - m_a^2 + m_b^2}{2} + \frac{(-a^2 + b^2 - c^2) \sqrt{\lambda \alpha_{ab}}}{2\lambda}$$

puis

$$M_{ab} = \left\{ \frac{1 - m_a^2 + m_b^2}{2} + \frac{(-a^2 + b^2 - c^2) \sqrt{\lambda \alpha_{ab}}}{2\lambda}, \frac{1 + m_a^2 - m_b^2}{2} + \frac{(a^2 - b^2 - c^2) \sqrt{\lambda \alpha_{ab}}}{2\lambda}, \frac{c^2 \sqrt{\lambda \alpha_{ab}}}{\lambda} \right\}$$

En prenant

$$y = \frac{1 + m_a^2 - m_b^2}{2} - \frac{(a^2 - b^2 - c^2) \sqrt{\lambda \alpha_{ab}}}{2\lambda}$$

on déduit

$$M_{ab}^* = \left\{ \frac{1 - m_a^2 + m_b^2}{2} + \frac{(a^2 - b^2 + c^2) \sqrt{\lambda \alpha_{ab}}}{2\lambda}, \frac{1 + m_a^2 - m_b^2}{2} + \frac{(-a^2 + b^2 + c^2) \sqrt{\lambda \alpha_{ab}}}{2\lambda}, -\frac{c^2 \sqrt{\lambda \alpha_{ab}}}{\lambda} \right\}$$

De même, en posant

$$\begin{aligned}\alpha_{bc} &= -1 + 2n_b^2 - n_b^4 + 2n_c^2 + 2n_b^2n_c^2 - n_c^4 \\ &= (1 - n_b + n_c)(1 + n_b - n_c)(-1 + n_b + n_c)(1 + n_b + n_c)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}M_{bc} &= \left\{ \frac{a^2 \sqrt{\lambda \alpha_{bc}}}{\lambda}, -\frac{(a^2 + b^2 - c^2) \sqrt{\lambda \alpha_{bc}}}{2\lambda} + \frac{1}{2}(1 - n_b^2 + n_c^2), \right. \\ &\quad \left. \frac{(-a^2 + b^2 - c^2) \sqrt{\lambda \alpha_{bc}}}{2\lambda} + \frac{1}{2}(1 + n_b^2 - n_c^2) \right\}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}M_{bc}^* &= \left\{ -\frac{a^2 \sqrt{\lambda \alpha_{bc}}}{\lambda}, -\frac{(-a^2 - b^2 + c^2) \sqrt{\lambda \alpha_{bc}}}{2\lambda} + \frac{1}{2}(1 - n_b^2 + n_c^2), \right. \\ &\quad \left. \frac{(a^2 - b^2 + c^2) \sqrt{\lambda \alpha_{bc}}}{2\lambda} + \frac{1}{2}(1 + n_b^2 - n_c^2) \right\}\end{aligned}$$

et, en posant

$$\begin{aligned}\alpha_{ca} &= -1 + 2p_a^2 - p_a^4 + 2p_c^2 + 2p_a^2p_c^2 - p_c^4 \\ &= (1 - p_a + p_c)(1 + p_a - p_c)(-1 + p_a + p_c)(1 + p_a + p_c)\end{aligned}$$

$$M_{ca} = \left\{ \frac{1}{2} (1 - p_a^2 + p_c^2) + \frac{(-a^2 - b^2 + c^2) \sqrt{\lambda \alpha_{ca}}}{2\lambda}, \frac{b^2 \sqrt{\lambda \alpha_{ca}}}{\lambda}, \frac{1}{2} (1 + p_a^2 - p_c^2) + \frac{(a^2 - b^2 - c^2) \sqrt{\lambda \alpha_{ca}}}{2\lambda} \right\}$$

$$M_{ca}^* = \left\{ \frac{1}{2} (1 - p_a^2 + p_c^2) + \frac{(a^2 + b^2 - c^2) \sqrt{\lambda \alpha_{ca}}}{2\lambda}, -\frac{b^2 \sqrt{\lambda \alpha_{ca}}}{\lambda}, \frac{1}{2} (1 + p_a^2 - p_c^2) + \frac{(-a^2 + b^2 + c^2) \sqrt{\lambda \alpha_{ca}}}{2\lambda} \right\}$$

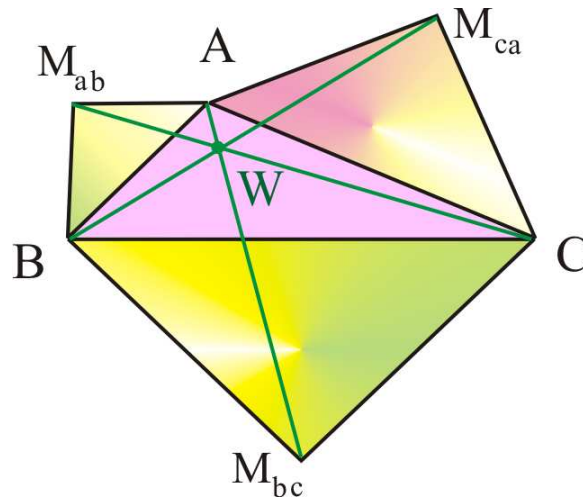
16.2 Théorème de Napoléon

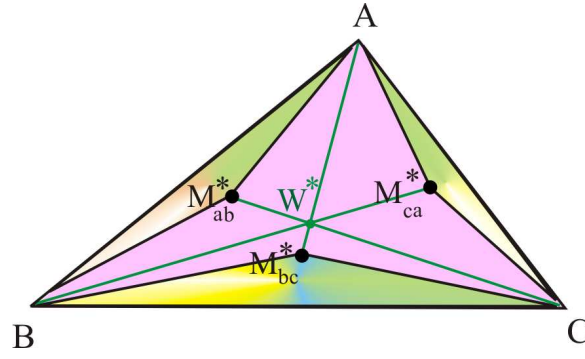
Exercice 16.2.1

Soit ABC un triangle, M_{ab}, M_{bc}, M_{ca} des points tels que les triangles $M_{ab}AB$, $M_{bc}BC$, $M_{ca}CA$ soient isocèles et semblables, de sommets respectifs M_{ab}, M_{bc}, M_{ca} et tous disposés extérieurement au triangle (resp. tournés vers l'intérieur du triangle). On posera

$$m_a = m_b = n_b = n_c = p_c = p_a = k$$

1. Montrer que les trois droites (A, M_{bc}) , (B, M_{ca}) , (C, M_{ab}) se coupent en un même point W (resp. W^* pour les droites (A, M_{bc}^*) , (B, M_{ca}^*) , (C, M_{ab}^*)).
2. Montrer que le triangle $M_{ab}M_{bc}M_{ca}$ est équilatéral si et seulement si il est isocèle (lorsque $a \neq b$, $a \neq c$, $b \neq c$). Montrer que M_{ab}, M_{bc}, M_{ca} sont alors les centres de gravité des triangles équilatéraux s'appuyant respectivement sur chaque côté du triangle).





La question 1) est un résultat classique de M.Paterson.

Solution:

Dessin = $\{A, B, C, M_{ab}, M_{bc}, M_{ca}\}$

On conserve les notations de l'exercice précédent. Il existe k tel que l'on ait

$$m_a = m_b = n_b = n_c = p_c = p_a = k$$

On a alors

$$M_{ab} = \left\{ \frac{1}{2} + \frac{(-a^2 + b^2 - c^2) \sqrt{\lambda(-1 + 4k^2)}}{2\lambda}, \frac{1}{2} + \frac{(a^2 - b^2 - c^2) \sqrt{\lambda(-1 + 4k^2)}}{2\lambda}, \frac{c^2 \sqrt{\lambda(-1 + 4k^2)}}{\lambda} \right\}$$

$$M_{bc} = \left\{ \frac{a^2 \sqrt{\lambda(-1 + 4k^2)}}{\lambda}, \frac{1}{2} - \frac{(a^2 + b^2 - c^2) \sqrt{\lambda(-1 + 4k^2)}}{2\lambda}, \frac{1}{2} + \frac{(-a^2 + b^2 - c^2) \sqrt{\lambda(-1 + 4k^2)}}{2\lambda} \right\}$$

$$M_{ca} = \left\{ \frac{1}{2} + \frac{(-a^2 - b^2 + c^2) \sqrt{\lambda(-1 + 4k^2)}}{2\lambda}, \frac{b^2 \sqrt{\lambda(-1 + 4k^2)}}{\lambda}, \frac{1}{2} + \frac{(a^2 - b^2 - c^2) \sqrt{\lambda(-1 + 4k^2)}}{2\lambda} \right\}$$

Dessin = $\text{Dessin} \cup \{W_1\} = \{A, B, C, M_{ab}, M_{bc}, M_{ca}, W_1\}$

Détermination du point W_1 :

Soit W_1 le point $(AM_{bc}) \cap (BM_{ca})$. Le point W_1 est composé.

Comme $W_1 \in (AM_{bc})$, on a, en choisissant les inconnues ν_1

$$\overrightarrow{OW_1} = \nu_1 \overrightarrow{OA} + (1 - \nu_1) \overrightarrow{OM_{bc}}$$

On déduit:

$$\overrightarrow{OW_1} = a(1) \overrightarrow{OA} + a(2) \overrightarrow{OB} + a(3) \overrightarrow{OC}$$

avec

$$\begin{aligned} a(1) &= \nu_1 + \frac{\sqrt{\lambda(-1 + 4k^2)} (a^2 - a^2 \nu_1)}{\lambda} \\ a(2) &= \frac{1 - \nu_1}{2} - \frac{(-a^2 - b^2 + c^2) \sqrt{\lambda(-1 + 4k^2)} (-1 + \nu_1)}{2\lambda} \\ a(3) &= \frac{1 - \nu_1}{2} - \frac{(-a^2 + b^2 - c^2) \sqrt{\lambda(-1 + 4k^2)} (-1 + \nu_1)}{2\lambda} \end{aligned}$$

Comme $W_1 \in (BM_{ca})$, on a, en choisissant les inconnues μ_1

$$\overrightarrow{OW_1} = \mu_1 \overrightarrow{OB} + (1 - \mu_1) \overrightarrow{OM_{ca}}$$

On déduit:

$$\overrightarrow{OW_1} = b(1) \overrightarrow{OA} + b(2) \overrightarrow{OB} + b(3) \overrightarrow{OC}$$

avec

$$\begin{aligned} b(1) &= \frac{1 - \mu_1}{2} - \frac{(-a^2 - b^2 + c^2) \sqrt{\lambda(-1 + 4k^2)} (-1 + \mu_1)}{2\lambda} \\ b(2) &= \mu_1 + \frac{\sqrt{\lambda(-1 + 4k^2)} (b^2 - b^2 \mu_1)}{\lambda} \\ b(3) &= \frac{1 - \mu_1}{2} - \frac{(a^2 - b^2 - c^2) \sqrt{\lambda(-1 + 4k^2)} (-1 + \mu_1)}{2\lambda} \end{aligned}$$

La résolution du système linéaire d'inconnues ν_1, μ_1 donne

$$\begin{aligned} \nu_1 &= \frac{2\lambda k^2 - 2a^2 \sqrt{\lambda(-1 + 4k^2)}}{\lambda(1 + 2k^2) + (-a^2 - b^2 - c^2) \sqrt{\lambda(-1 + 4k^2)}} \\ \mu_1 &= \frac{-4\lambda k^2 + 4b^2 \sqrt{\lambda(-1 + 4k^2)}}{\lambda(-2 - 4k^2) + (2a^2 + 2b^2 + 2c^2) \sqrt{\lambda(-1 + 4k^2)}} \end{aligned}$$

On déduit que:

$$\begin{aligned} W_1 &= \left\{ \frac{2a^2(a^2 - b^2 - c^2) - 4(a^2 + b^2 - c^2)(a^2 - b^2 + c^2)k^2 + 2a^2\sqrt{\lambda(-1 + 4k^2)}}{\lambda(-2 - 4k^2) + (2a^2 + 2b^2 + 2c^2)\sqrt{\lambda(-1 + 4k^2)}}, \right. \\ &\quad \frac{-2b^2(a^2 - b^2 + c^2) + 4(a^2 - b^2 - c^2)(a^2 + b^2 - c^2)k^2 + 2b^2\sqrt{\lambda(-1 + 4k^2)}}{\lambda(-2 - 4k^2) + (2a^2 + 2b^2 + 2c^2)\sqrt{\lambda(-1 + 4k^2)}}, \\ &\quad \left. \frac{-2c^2(a^2 + b^2 - c^2) + 4(a^2 - b^2 - c^2)(a^2 - b^2 + c^2)k^2 + 2c^2\sqrt{\lambda(-1 + 4k^2)}}{\lambda(-2 - 4k^2) + (2a^2 + 2b^2 + 2c^2)\sqrt{\lambda(-1 + 4k^2)}} \right\} \end{aligned}$$

Dessin = Dessin $\cup \{W_2\} = \{A, B, C, M_{ab}, M_{bc}, M_{ca}, W_1, W_2\}$

Détermination du point W_2 :

Soit W_2 le point $(BM_{ca}) \cap (CM_{ab})$. Le point W_2 est composé.

Comme $W_2 \in (BM_{ca})$, on a, en choisissant les inconnues ν_1

$$\overrightarrow{OW_2} = \nu_1 \overrightarrow{OB} + (1 - \nu_1) \overrightarrow{OM_{ca}}$$

On déduit:

$$\overrightarrow{OW_2} = c(1) \overrightarrow{OA} + c(2) \overrightarrow{OB} + c(3) \overrightarrow{OC}$$

avec

$$\begin{aligned} c(1) &= \frac{1 - \nu_1}{2} - \frac{(-a^2 - b^2 + c^2) \sqrt{\lambda(-1 + 4k^2)} (-1 + \nu_1)}{2\lambda} \\ c(2) &= \nu_1 + \frac{\sqrt{\lambda(-1 + 4k^2)} (b^2 - b^2 \nu_1)}{\lambda} \\ c(3) &= \frac{1 - \nu_1}{2} - \frac{(a^2 - b^2 - c^2) \sqrt{\lambda(-1 + 4k^2)} (-1 + \nu_1)}{2\lambda} \end{aligned}$$

Comme $W_2 \in (CM_{ab})$, on a, en choisissant les inconnues μ_1

$$\overrightarrow{OW_2} = \mu_1 \overrightarrow{OC} + (1 - \mu_1) \overrightarrow{OM_{ab}}$$

On déduit:

$$\overrightarrow{OW_2} = d(1) \overrightarrow{OA} + d(2) \overrightarrow{OB} + d(3) \overrightarrow{OC}$$

avec

$$\begin{aligned} d(1) &= \frac{1 - \mu_1}{2} - \frac{(-a^2 + b^2 - c^2) \sqrt{\lambda(-1 + 4k^2)} (-1 + \mu_1)}{2\lambda} \\ d(2) &= \frac{1 - \mu_1}{2} - \frac{(a^2 - b^2 - c^2) \sqrt{\lambda(-1 + 4k^2)} (-1 + \mu_1)}{2\lambda} \\ d(3) &= \mu_1 + \frac{\sqrt{\lambda(-1 + 4k^2)} (c^2 - c^2 \mu_1)}{\lambda} \end{aligned}$$

La résolution du système linéaire d'inconnues ν_1, μ_1 donne

$$\begin{aligned} \nu_1 &= \frac{2\lambda k^2 - 2b^2 \sqrt{\lambda(-1 + 4k^2)}}{\lambda(1 + 2k^2) + (-a^2 - b^2 - c^2) \sqrt{\lambda(-1 + 4k^2)}} \\ \mu_1 &= \frac{2\lambda k^2 - 2c^2 \sqrt{\lambda(-1 + 4k^2)}}{\lambda(1 + 2k^2) + (-a^2 - b^2 - c^2) \sqrt{\lambda(-1 + 4k^2)}} \end{aligned}$$

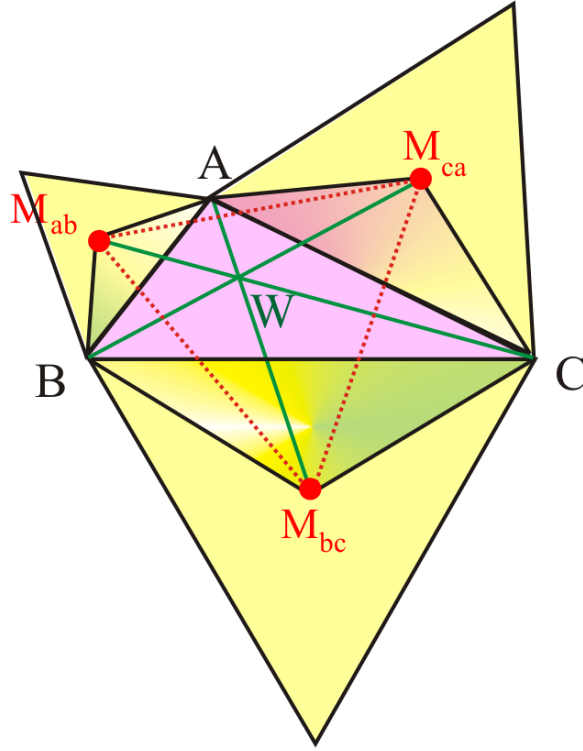
On déduit que

$$\begin{aligned} W_2 = \{ & \frac{2a^2(a^2 - b^2 - c^2) - 4(a^2 + b^2 - c^2)(a^2 - b^2 + c^2)k^2 + 2a^2\sqrt{\lambda(-1 + 4k^2)}}{\lambda(-2 - 4k^2) + (2a^2 + 2b^2 + 2c^2)\sqrt{\lambda(-1 + 4k^2)}}, \\ & \frac{-2b^2(a^2 - b^2 + c^2) + 4(a^2 - b^2 - c^2)(a^2 + b^2 - c^2)k^2 + 2b^2\sqrt{\lambda(-1 + 4k^2)}}{\lambda(-2 - 4k^2) + (2a^2 + 2b^2 + 2c^2)\sqrt{\lambda(-1 + 4k^2)}}, \\ & \frac{-2c^2(a^2 + b^2 - c^2) + 4(a^2 - b^2 - c^2)(a^2 - b^2 + c^2)k^2 + 2c^2\sqrt{\lambda(-1 + 4k^2)}}{\lambda(-2 - 4k^2) + (2a^2 + 2b^2 + 2c^2)\sqrt{\lambda(-1 + 4k^2)}} \} \end{aligned}$$

donc $W_1 = W_2 = W$.

L'intersection des droites (AM_{bc}^*) , (BM_{ca}^*) , (CM_{ab}^*) est le point

$$\begin{aligned} W^* = \{ & \frac{2\left(-(a^2(a^2 - b^2 - c^2)) + 2(a^2 + b^2 - c^2)(a^2 - b^2 + c^2)k^2 + a^2\sqrt{\lambda(-1 + 4k^2)}\right)}{2\lambda(1 + 2k^2) + 2(a^2 + b^2 + c^2)\sqrt{\lambda(-1 + 4k^2)}}, \\ & \frac{-2\left(-(b^2(a^2 - b^2 + c^2)) + 2(a^2 - b^2 - c^2)(a^2 + b^2 - c^2)k^2 - b^2\sqrt{\lambda(-1 + 4k^2)}\right)}{2\lambda(1 + 2k^2) + 2(a^2 + b^2 + c^2)\sqrt{\lambda(-1 + 4k^2)}}, \\ & \frac{-2\left(-(c^2(a^2 + b^2 - c^2)) + 2(a^2 - b^2 - c^2)(a^2 - b^2 + c^2)k^2 - c^2\sqrt{\lambda(-1 + 4k^2)}\right)}{2\lambda(1 + 2k^2) + 2(a^2 + b^2 + c^2)\sqrt{\lambda(-1 + 4k^2)}} \} \end{aligned}$$



2). On a alors

$$M_{ab}M_{bc}^2 = \frac{-a^2 + b^2 - c^2 + 4a^2k^2 - 2b^2k^2 + 4c^2k^2 - \sqrt{\lambda(-1 + 4k^2)}}{2}$$

$$M_{ab}M_{ca}^2 = \frac{a^2 - b^2 - c^2 - 2a^2k^2 + 4b^2k^2 + 4c^2k^2 - \sqrt{\lambda(-1 + 4k^2)}}{2}$$

$$M_{bc}M_{ca}^2 = \frac{-a^2 - b^2 + c^2 + 4a^2k^2 + 4b^2k^2 - 2c^2k^2 - \sqrt{\lambda(-1 + 4k^2)}}{2}$$

donc

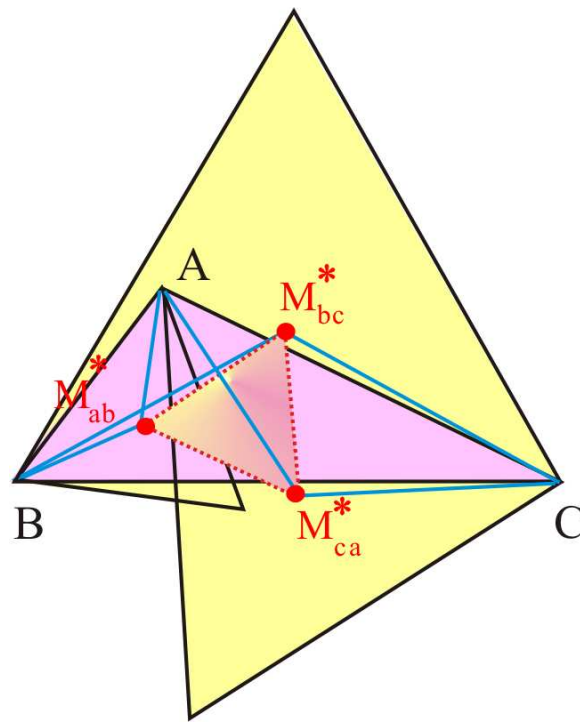
$$M_{ab}M_{bc}^2 - M_{ab}M_{ca}^2 = (a - b)(a + b)(-1 + 3k^2)$$

$$M_{ab}M_{ca}^2 - M_{bc}M_{ca}^2 = (-a + c)(a + c)(-1 + 3k^2)$$

$$M_{ab}M_{bc}^2 - M_{bc}M_{ca}^2 = (-b + c)(b + c)(-1 + 3k^2)$$

Le triangle est isocèle lorsque $(-1 + 3k^2) = 0$, soit $k = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$: ce qui implique l'égalité des trois distances. Il est clair que les conditions $AM_{ab} = \frac{1}{\sqrt{3}}AB$ et $BM_{ab} = \frac{1}{\sqrt{3}}AB$ signifient que M_{ab} est le centre de gravité du triangle équilatéral mentionné.

Les calculs sont identiques avec les points $M_{ab}^*, M_{bc}^*, M_{ca}^*$.



16.3 Triangle orné de figures

Exercice 16.3.1 *triangle orné de deux carrés*

On choisit M_{ab} sur la médiatrice du segment $[AB]$, M_{bc} sur la médiatrice du segment $[BC]$ (on posera $m_a = m_b = k$ et $n_b = n_c = k_1$).

1. Préciser les coordonnées barycentriques des points $M_{ab}, M_{bc}, M_{ab}^*, M_{bc}^*$.
2. Soit I le milieu de $[AC]$. A quelle condition les segments $M_{ab}I$ et $M_{bc}I$ sont-ils orthogonaux (resp. égaux)? Préciser le cas $k = k_1$ et $k = k_1 = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Solution:

Dessin $= \{A, B, C, I, M_{ab}, M_{bc}\}$

1). On a directement:

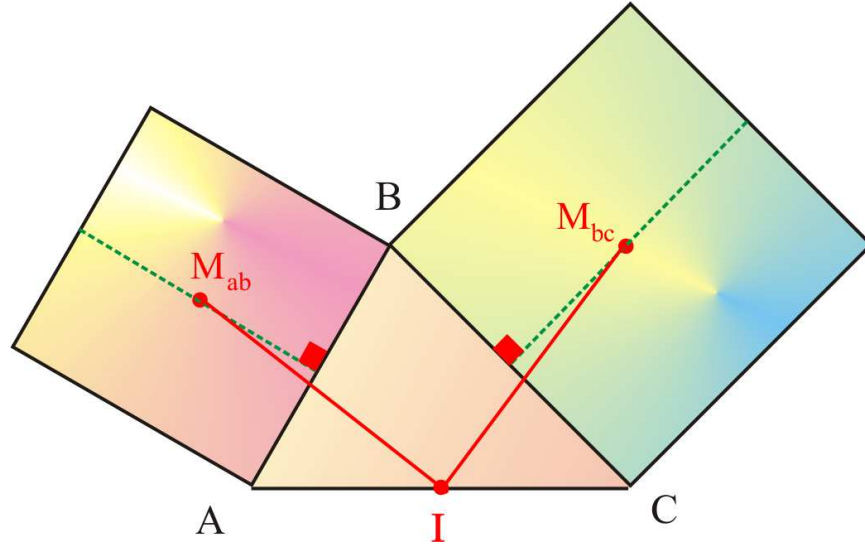
$$I = \{1, 0, 1\}$$

$$M_{ab} = \left\{ \frac{1}{2} + \frac{(-a^2 + b^2 - c^2) \sqrt{\lambda(-1 + 4k^2)}}{2\lambda}, \frac{1}{2} + \frac{(a^2 - b^2 - c^2) \sqrt{\lambda(-1 + 4k^2)}}{2\lambda}, \frac{c^2 \sqrt{\lambda(-1 + 4k^2)}}{\lambda} \right\}$$

$$M_{bc} = \left\{ \frac{a^2 \sqrt{\lambda(-1 + 4k_1^2)}}{\lambda}, \frac{1}{2} - \frac{(a^2 + b^2 - c^2) \sqrt{\lambda(-1 + 4k_1^2)}}{2\lambda}, \frac{1}{2} + \frac{(-a^2 + b^2 - c^2) \sqrt{\lambda(-1 + 4k_1^2)}}{2\lambda} \right\}$$

$$M_{ab}^* = \left\{ \frac{1}{2} + \frac{(a^2 - b^2 + c^2) \sqrt{\lambda(-1 + 4k_1^2)}}{2\lambda}, \frac{1}{2} + \frac{(-a^2 + b^2 + c^2) \sqrt{\lambda(-1 + 4k_1^2)}}{2\lambda}, -\frac{c^2 \sqrt{\lambda(-1 + 4k_1^2)}}{\lambda} \right\}$$

$$M_{bc}^* = \left\{ -\frac{a^2 \sqrt{\lambda (-1 + 4k_1^2)}}{\lambda}, \frac{1}{2} - \frac{(-a^2 - b^2 + c^2) \sqrt{\lambda (-1 + 4k_1^2)}}{2\lambda}, \frac{1}{2} + \frac{(a^2 - b^2 + c^2) \sqrt{\lambda (-1 + 4k_1^2)}}{2\lambda} \right\}$$



2). Le produit scalaire $\overrightarrow{IM_{ab}} \cdot \overrightarrow{IM_{bc}}$ a pour valeur

$$\overrightarrow{IM_{ab}} \cdot \overrightarrow{IM_{bc}} = \frac{(-a^2 + b^2 - c^2) (-1 + \sqrt{-1 + 4k^2} \sqrt{-1 + 4k_1^2})}{8}$$

donc la condition d'orthogonalité cherchée est

$$\sqrt{-1 + 4k^2} \sqrt{-1 + 4k_1^2} = 1$$

On a :

$$IM_{ab}^2 = \frac{a^2 + c^2 (-1 + 4k^2) - \sqrt{\lambda (-1 + 4k^2)}}{4}$$

$$IM_{bc}^2 = \frac{c^2 + a^2 (-1 + 4k_1^2) - \sqrt{\lambda (-1 + 4k_1^2)}}{4}$$

donc ces distances sont égales lorsque k et k_1 satisfont

$$2a^2 - 2c^2 + 4c^2k^2 - 4a^2k_1^2 = \sqrt{\lambda (-1 + 4k^2)} - \sqrt{\lambda (-1 + 4k_1^2)}$$

Lorsque $k = k_1$, on obtient

$$IM_{ab}^2 - IM_{bc}^2 = \frac{(a - c)(a + c)(1 - 2k^2)}{2}$$

et

$$\overrightarrow{IM_{ab}} \cdot \overrightarrow{IM_{bc}} = \frac{(-a^2 + b^2 - c^2)(-1 + 2k^2)}{4}$$

Pour $a \neq c$ et $a^2 + c^2 \neq b^2$, la nullité de la première expression équivaut à la nullité de la seconde expression. Lorsque $1 - 2k^2 = 0$, ces expressions sont nulles quel que soient les valeurs de a, b, c , donc $IM_{ab} = IM_{bc}$ et M_{ab} (resp. M_{bc}) est le centre de gravité du carré dont l'un des côtés est $[AB]$ (resp. $[BC]$), les deux

carrés étant positionnés, soient tous deux extérieurs au triangle, soient tous deux tournés vers l'intérieur du triangle.

On a de même

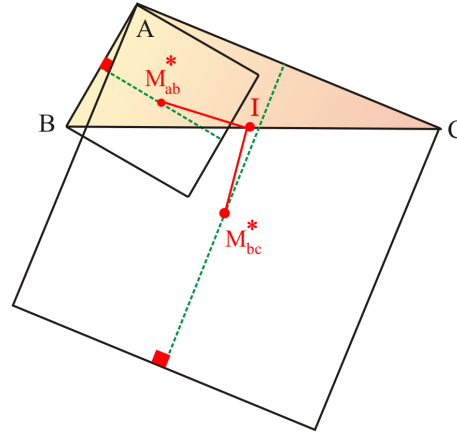
$$\overrightarrow{IM_{ab}^*} \cdot \overrightarrow{IM_{bc}^*} = \frac{(-a^2 + b^2 - c^2)(-1 + 2k_1^2)}{4}$$

et

$$IM_{ab}^{*2} = \frac{a^2 - c^2 + 4c^2k_1^2 + \sqrt{\lambda(-1 + 4k_1^2)}}{4}$$

$$IM_{bc}^{*2} = \frac{-a^2 + c^2 + 4a^2k_1^2 + \sqrt{\lambda(-1 + 4k_1^2)}}{4}$$

$$IM_{ab}^{*2} - IM_{bc}^{*2} = \frac{(a - c)(a + c)(1 - 2k_1^2)}{2}$$



Exercice 16.3.2 *triangle orné de trois carrés*

Soit ABC un triangle, M_{ab}, M_{bc}, M_{ca} des points tels que les triangles $M_{ab}AB$, $M_{bc}BC$, $M_{ca}CA$ soient isocèles et semblables, de sommets respectifs M_{ab}, M_{bc}, M_{ca} et tous disposés extérieurement au triangle (resp. tournés vers l'intérieur du triangle). On posera

$$m_a = m_b = n_b = n_c = p_c = p_a = k$$

1. Calculer $M_{ab}M_{bc}^2$, BM_{ca}^2 et $\overrightarrow{M_{ab}M_{bc}} \cdot \overrightarrow{BM_{ca}}$.
2. En déduire que $M_{ab}M_{bc} = BM_{ca}$ si et seulement si les droites $(M_{ab}M_{bc})$ et (BM_{ca}) sont orthogonales (lorsque $a \neq c$ et $a^2 + c^2 \neq b^2$). Montrer alors que M_{ab}, M_{bc}, M_{ca} sont alors les centres de gravité des carrés s'appuyant respectivement sur chacun des côtés du triangle).

Solution:

Dessin = { $A, B, C, M_{ab}, M_{bc}, M_{ca}$ }

1). On a directement

$$M_{ab} = \left\{ \frac{1}{2} + \frac{(-a^2 + b^2 - c^2) \sqrt{\lambda(-1 + 4k^2)}}{2\lambda}, \frac{1}{2} + \frac{(a^2 - b^2 - c^2) \sqrt{\lambda(-1 + 4k^2)}}{2\lambda}, \frac{c^2 \sqrt{\lambda(-1 + 4k^2)}}{\lambda} \right\}$$

$$M_{bc} = \left\{ \frac{a^2 \sqrt{\lambda(-1 + 4k^2)}}{\lambda}, \frac{1}{2} - \frac{(a^2 + b^2 - c^2) \sqrt{\lambda(-1 + 4k^2)}}{2\lambda}, \frac{1}{2} + \frac{(-a^2 + b^2 - c^2) \sqrt{\lambda(-1 + 4k^2)}}{2\lambda} \right\}$$

$$M_{ca} = \left\{ \frac{1}{2} + \frac{(-a^2 - b^2 + c^2) \sqrt{\lambda(-1 + 4k^2)}}{2\lambda}, \frac{b^2 \sqrt{\lambda(-1 + 4k^2)}}{\lambda}, \frac{1}{2} + \frac{(a^2 - b^2 - c^2) \sqrt{\lambda(-1 + 4k^2)}}{2\lambda} \right\}$$

et

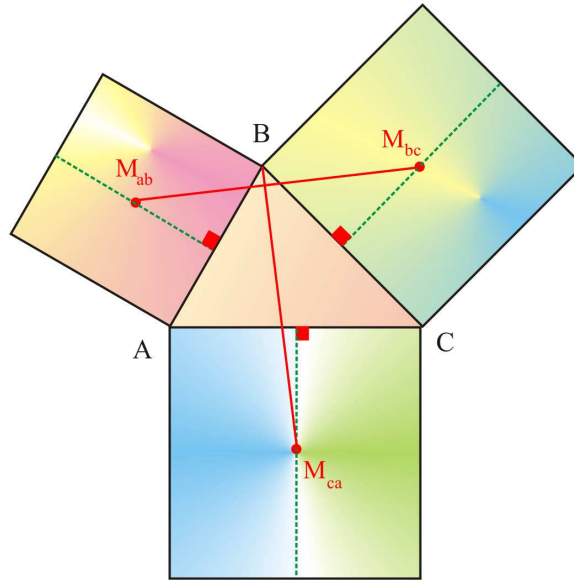
$$M_{ab}M_{bc}^2 = \frac{1}{2} \left(a^2(-1 + 4k^2) + b^2(1 - 2k^2) + c^2(-1 + 4k^2) - \sqrt{\lambda(-1 + 4k^2)} \right)$$

$$BM_{ca}^2 = \frac{1}{2} \left(a^2 + c^2 + b^2(-1 + 2k^2) - \sqrt{\lambda(-1 + 4k^2)} \right)$$

donc

$$M_{ab}M_{bc}^2 - BM_{ca}^2 = (a^2 - b^2 + c^2)(-1 + 2k^2)$$

$$\overrightarrow{M_{ab}M_{bc}} \cdot \overrightarrow{BM_{ca}} = \frac{(a - c)(a + c)(1 - 2k^2)}{2}$$

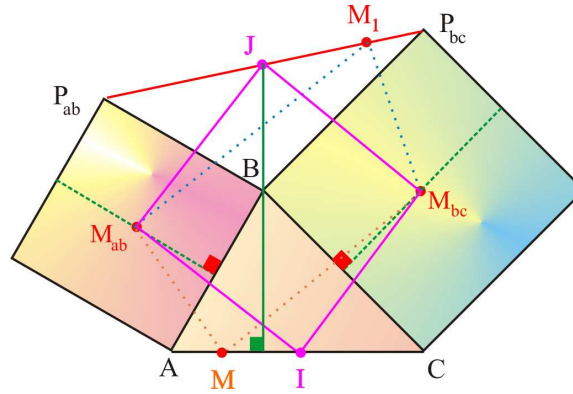


16.4 Théorème de Finsler Hadwiger

Exercice 16.4.1 *Carré issu d'un triangle orné de deux carrés*

Soit ABC un triangle, M_{ab} (resp. M_{bc}) le centre du carré dont l'un des côté s'appuie sur le segment $[AB]$ (resp. $[BC]$), les carrés étant tous disposés extérieurement au triangle (resp. tournés vers l'intérieur du triangle). Soient P_{ab} (resp. P_{bc}) le symétrique de A (resp. C) par rapport à M_{ab} (resp. M_{bc}) (les angles ABP_{ab} et CBP_{bc} sont donc droits).

1. Préciser les coordonnées barycentriques des points M_{ab} , M_{bc} , P_{ab} , P_{bc} .
2. Soit $M \in (AC)$, de coordonnées barycentriques $M = \{w, 0, 1-w\}$. Calculer $\overrightarrow{MM_{ab}} \cdot \overrightarrow{MM_{bc}}$, MM_{ab}^2 , MM_{bc}^2 .
3. Soit $M_1 \in (P_{ab}P_{bc})$, barycentre de $\{P_{ab}, w_1\}, (P_{bc}, 1-w_1)\}$. Calculer $\overrightarrow{M_1M_{ab}} \cdot \overrightarrow{M_1M_{bc}}$, $M_1M_{ab}^2$, $M_1M_{bc}^2$.
4. Soit I le milieu de AC et J le milieu de $P_{ab}P_{bc}$. Conclure que la figure $IM_{ab}JM_{bc}$ est un carré (théorème de Finsler Hadwiger).
5. Montrer que JB est orthogonal à AC et que $JB = \frac{AC}{2}$.


Solution:

1). On a ici

$$m_a = m_b = n_b = n_c = k = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$M_{ab} = \left\{ \frac{1}{2} + \frac{-a^2 + b^2 - c^2}{2\sqrt{\lambda}}, \frac{1}{2} + \frac{a^2 - b^2 - c^2}{2\sqrt{\lambda}}, \frac{c^2}{\sqrt{\lambda}} \right\}$$

$$M_{bc} = \left\{ \frac{a^2}{\sqrt{\lambda}}, \frac{1}{2} - \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2\sqrt{\lambda}}, \frac{1}{2} + \frac{-a^2 + b^2 - c^2}{2\sqrt{\lambda}} \right\}$$

En prenant $ma = \sqrt{2}$, $mb = 1$, $nb = 1$, $nc = \sqrt{2}$, on obtient

$$P_{ab} = \left\{ \frac{-a^2 + b^2 - c^2}{\sqrt{\lambda}}, 1 + \frac{a^2 - b^2 - c^2}{\sqrt{\lambda}}, \frac{2c^2}{\sqrt{\lambda}} \right\}$$

$$P_{bc} = \left\{ \frac{2a^2}{\sqrt{\lambda}}, 1 - \frac{a^2 + b^2 - c^2}{\sqrt{\lambda}}, \frac{-a^2 + b^2 - c^2}{\sqrt{\lambda}} \right\}$$

2). Pour un point $M = \{w, 0, 1 - w\}$ de la droite (AC) , on a

$$\begin{aligned}\overrightarrow{MM_{ab}} \cdot \overrightarrow{MM_{bc}} &= \frac{(1 - 2w)(a^2 + b^2 - c^2 - 2b^2w)}{4} \\ MM_{ab}^2 &= \frac{\sqrt{\lambda}(1 - w)}{2} + \frac{a^2 + b^2 - a^2w - 3b^2w + c^2w + 2b^2w^2}{2} \\ MM_{bc}^2 &= \frac{\sqrt{\lambda}w}{2} + \frac{a^2 - a^2w - b^2w + c^2w + 2b^2w^2}{2}\end{aligned}$$

donc

$$MM_{ab}^2 - MM_{bc}^2 = \frac{(\sqrt{\lambda} + b^2)(1 - 2w)}{2}$$

3). Le point M_1 , barycentre de $\{(P_{ab}, w_1), (P_{bc}, 1 - w_1)\}$ a pour coordonnées barycentriques

$$M_1 = \left\{ \frac{2a^2}{\sqrt{\lambda}} - \frac{(3a^2 - b^2 + c^2)w_1}{\sqrt{\lambda}}, \frac{-a^2 + \sqrt{\lambda} - b^2 + c^2}{\sqrt{\lambda}} + \frac{(2a^2 - 2c^2)w_1}{\sqrt{\lambda}}, \right. \\ \left. \frac{-a^2 + b^2 - c^2}{\sqrt{\lambda}} + \frac{(a^2 - b^2 + 3c^2)w_1}{\sqrt{\lambda}} \right\}$$

On a:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{M_1M_{ab}} \cdot \overrightarrow{M_1M_{bc}} &= \frac{(-1 + 2w_1)(-3a^2 + b^2 - c^2 + 4a^2w_1 - 2b^2w_1 + 4c^2w_1)}{4} \\ M_1M_{ab}^2 &= \frac{3a^2 - \sqrt{\lambda} - b^2 + 2c^2}{2} + \frac{(-7a^2 + \sqrt{\lambda} + 3b^2 - 5c^2)w_1}{2} + \frac{(4a^2 - 2b^2 + 4c^2)w_1^2}{2} \\ M_1M_{bc}^2 &= \frac{a^2}{2} + \frac{(-3a^2 - \sqrt{\lambda} + b^2 - c^2)w_1}{2} + \frac{(4a^2 - 2b^2 + 4c^2)w_1^2}{2}\end{aligned}$$

donc

$$M_1M_{ab}^2 - M_1M_{bc}^2 = \frac{(2a^2 - \sqrt{\lambda} - b^2 + 2c^2)(1 - 2w_1)}{2}$$

4). Ainsi, pour $w = w_1 = \frac{1}{2}$, on a $M = I = \{\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}\}$ milieu de $[AB]$ et $M_1 = J = \{(P_{ab}, \frac{1}{2}), (P_{bc}, \frac{1}{2})\}$ milieu de $[P_{ab}P_{bc}]$ avec

$$J = \left\{ \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2\sqrt{\lambda}}, \frac{\sqrt{\lambda} - b^2}{\sqrt{\lambda}}, \frac{(a^2 - b^2 - c^2)}{2\sqrt{\lambda}} \right\}$$

Il résulte immédiatement des calculs précédents que la figure $IM_{ab}JM_{bc}$ est un carré.

5). On a:

$$\overrightarrow{M_1B} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{(a - b - c)(a + b - c)(a - b + c)(a + b + c)(-1 + 2w_1)}{2\sqrt{\lambda}}$$

$$M_1B^2 = a^2 - 3a^2w_1 + b^2w_1 - c^2w_1 + 2a^2w_1^2 - b^2w_1^2 + 2c^2w_1^2$$

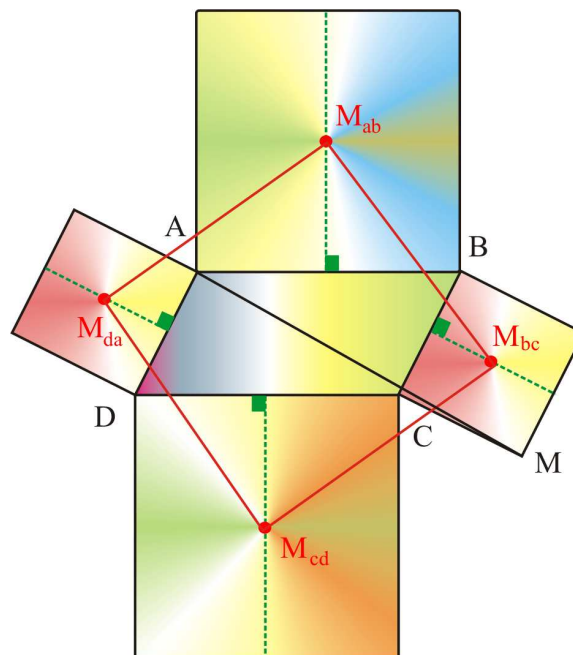
donc, pour $w_1 = \frac{1}{2}$, il vient $M_1B^2 = \frac{b^2}{4}$.

16.5 Théorème de Van Aubel

Exercice 16.5.1 *Parallélogramme orné de quatre carrés*

Soit $ABCD$ un parallélogramme et $M_{ab}, M_{bc}, M_{cd}, M_{da}$ des points extérieurs au quadrilatère et situés sur les médiatrices des segments $[AB]$, $[BC]$, $[CD]$, $[DA]$.

1. Préciser les coordonnées barycentriques des points $M_{ab}, M_{bc}, M_{cd}, M_{da}$.
2. Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{M_{ab}M_{cd}} \cdot \overrightarrow{M_{bc}M_{da}}$ et $\overrightarrow{M_{ab}M_{bc}}^2, \overrightarrow{M_{bc}M_{cd}}^2$.
3. Lorsque $ABCD$ n'est pas un rectangle, montrer que la figure $M_{ab}M_{bc}M_{cd}M_{da}$ est un carré si et seulement si les diagonales du quadrilatère $M_{ab}M_{bc}M_{cd}M_{da}$ sont orthogonales ou encore si et seulement si deux côtés de ce quadrilatère sont égaux.
4. On suppose que $M_{ab}, M_{bc}, M_{cd}, M_{da}$ sont les centres des carrés accolés extérieurement au parallélogramme $ABCD$. Montrer que la figure $M_{ab}M_{bc}M_{cd}M_{da}$ est alors un carré et l'égalité $M_{ab}M_{bc} = \frac{AM}{\sqrt{2}}$, M désignant le point du plan extérieur au triangle tel que $BM = BC$ et tel que l'angle CBM soit droit.
5. On désigne par $M_{ab}^*, M_{bc}^*, M_{cd}^*, M_{da}^*, M^*$ les symétriques orthogonaux des points $M_{ab}, M_{bc}, M_{cd}, M_{da}$ par rapport aux segments respectifs $[AB]$, $[BC]$, $[CD]$, $[DA]$. Montrer que les résultats précédents subsistent.



Solution:

Dessin = $\{A, B, C, D, M_{ab}, M_{bc}, M_{cd}, M_{da}\}$

1). On a

$$D = \{1, -1, 1\}$$

$$M_{ab} = \left\{ \frac{1}{2} + \frac{(-a^2 + b^2 - c^2) \sqrt{\lambda(-1 + 4k^2)}}{2\lambda}, \frac{1}{2} + \frac{(a^2 - b^2 - c^2) \sqrt{\lambda(-1 + 4k^2)}}{2\lambda}, \frac{c^2 \sqrt{\lambda(-1 + 4k^2)}}{\lambda} \right\}$$

$$M_{bc} = \left\{ \frac{a^2 \sqrt{\lambda(-1 + 4k^2)}}{\lambda}, \frac{1}{2} + \frac{(-a^2 - b^2 + c^2) \sqrt{\lambda(-1 + 4k^2)}}{2\lambda}, \frac{1}{2} + \frac{(-a^2 + b^2 - c^2) \sqrt{\lambda(-1 + 4k^2)}}{2\lambda} \right\}$$

Les coordonnées barycentriques de M_{cd} dans le repère $\{C, D, A\}$ sont

$$M_{cd} = \left\{ \frac{1}{2} - \frac{(a^2 - b^2 + c^2) \sqrt{\lambda(-1 + 4k^2)}}{2\lambda}, \frac{1}{2} - \frac{(-a^2 + b^2 + c^2) \sqrt{\lambda(-1 + 4k^2)}}{2\lambda}, \frac{c^2(-1 + 4k^2)}{\sqrt{\lambda(-1 + 4k^2)}} \right\}$$

Puisque $OD = \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$, on obtient

$$M_{cd} = \left\{ \frac{1}{2} - \frac{(-a^2 + b^2 - c^2) \sqrt{\lambda(-1 + 4k^2)}}{2\lambda}, -\frac{1}{2} + \frac{(-a^2 + b^2 + c^2) \sqrt{\lambda(-1 + 4k^2)}}{2\lambda}, 1 - \frac{c^2 \sqrt{\lambda(-1 + 4k^2)}}{\lambda} \right\}$$

On procède de même pour M_{da} et on obtient

$$M_{da} = \left\{ 1 - \frac{a^2 \sqrt{\lambda(-1 + 4k^2)}}{\lambda}, -\frac{1}{2} + \frac{(a^2 + b^2 - c^2) \sqrt{\lambda(-1 + 4k^2)}}{2\lambda}, \frac{1}{2} - \frac{(-a^2 + b^2 - c^2) \sqrt{\lambda(-1 + 4k^2)}}{2\lambda} \right\}$$

2). On a:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{M_{ab}M_{cd}} \cdot \overrightarrow{M_{bc}M_{da}} &= (-a^2 + b^2 - c^2)(-1 + 2k^2) \\ M_{ab}M_{bc}^2 &= \frac{-a^2 + b^2 - c^2 + 4a^2k^2 - 2b^2k^2 + 4c^2k^2 - \sqrt{\lambda(-1 + 4k^2)}}{2} \\ M_{bc}M_{cd}^2 &= \frac{a^2 - b^2 + c^2 + 2b^2k^2 - \sqrt{\lambda(-1 + 4k^2)}}{2} \\ M_{cd}M_{da}^2 &= \frac{-a^2 + b^2 - c^2 + 4a^2k^2 - 2b^2k^2 + 4c^2k^2 - \sqrt{\lambda(-1 + 4k^2)}}{2} \\ M_{ab}M_{da}^2 &= \frac{a^2 - b^2 + c^2 + 2b^2k^2 - \sqrt{\lambda(-1 + 4k^2)}}{2} \end{aligned}$$

3). On déduit que

$$\begin{aligned} M_{ab}M_{bc}^2 - M_{bc}M_{cd}^2 &= (a^2 - b^2 + c^2)(-1 + 2k^2) \\ M_{cd}M_{da}^2 - M_{bc}M_{cd}^2 &= (a^2 - b^2 + c^2)(-1 + 2k^2) \end{aligned}$$

et il résulte les équivalences énoncées.

4). On a $(-1 + 2k^2) = 0$, donc les égalités précédentes montrent que la figure $M_{ab}M_{bc}M_{cd}M_{da}$ est un carré. Les coordonnées barycentriques du point M sont

$$M = \left\{ \frac{2a^2}{\sqrt{\lambda}}, 1 + \frac{-a^2 - b^2 + c^2}{\sqrt{\lambda}}, -\left(\frac{a^2 - b^2 + c^2}{\sqrt{\lambda}}\right) \right\}$$

et on a

$$\frac{AM^2}{2} = \frac{a^2 - \sqrt{\lambda} + c^2}{2}$$

Ainsi

$$\frac{AM^2}{2} - M_{ab}M_{bc}^2 = \frac{2a^2 - \sqrt{\lambda} - b^2 + 2c^2 - 4a^2k^2 + 2b^2k^2 - 4c^2k^2 + \sqrt{\lambda(-1 + 4k^2)}}{2}$$

qui se réduit à

$$\frac{AM^2}{2} - M_{ab}M_{bc}^2 = 0$$

lorsque $k^2 = \frac{1}{2}$.

5). Cas des points $M_{ab}^*, M_{bc}^*, M_{cd}^*, M_{da}^*, M^*$

On a

$$\begin{aligned} M_{ab}^* &= \left\{ \frac{1}{2} + \frac{(a^2 - b^2 + c^2) \sqrt{\lambda(-1 + 4k^2)}}{2\lambda}, \frac{1}{2} - \frac{(a^2 - b^2 - c^2) \sqrt{\lambda(-1 + 4k^2)}}{2\lambda}, -\left(\frac{c^2 \sqrt{\lambda(-1 + 4k^2)}}{\lambda} \right) \right\} \\ M_{bc}^* &= \left\{ -\left(\frac{a^2 \sqrt{\lambda(-1 + 4k^2)}}{\lambda} \right), \frac{1}{2} + \frac{(a^2 + b^2 - c^2) \sqrt{\lambda(-1 + 4k^2)}}{2\lambda}, \frac{1}{2} + \frac{(a^2 - b^2 + c^2) \sqrt{\lambda(-1 + 4k^2)}}{2\lambda} \right\} \\ M_{cd}^* &= \left\{ \frac{1}{2} - \frac{(a^2 - b^2 + c^2) \sqrt{\lambda(-1 + 4k^2)}}{2\lambda}, -\frac{1}{2} + \frac{(a^2 - b^2 - c^2) \sqrt{\lambda(-1 + 4k^2)}}{2\lambda}, 1 + \frac{c^2 \sqrt{\lambda(-1 + 4k^2)}}{\lambda} \right\} \\ M_{da}^* &= \left\{ 1 + \frac{a^2 \sqrt{\lambda(-1 + 4k^2)}}{\lambda}, -\frac{1}{2} - \frac{(a^2 + b^2 - c^2) \sqrt{\lambda(-1 + 4k^2)}}{2\lambda}, \frac{1}{2} - \frac{(a^2 - b^2 + c^2) \sqrt{\lambda(-1 + 4k^2)}}{2\lambda} \right\} \\ \overrightarrow{M_{ab}^* M_{cd}^*} \cdot \overrightarrow{M_{bc}^* M_{da}^*} &= (-a^2 + b^2 - c^2) (-1 + 2k^2) \\ M_{ab}^* M_{bc}^{*2} &= \frac{-a^2 + b^2 - c^2 + 4a^2 k^2 - 2b^2 k^2 + 4c^2 k^2 + \sqrt{\lambda(-1 + 4k^2)}}{2} \\ M_{bc}^* M_{cd}^{*2} &= \frac{a^2 - b^2 + c^2 + 2b^2 k^2 + \sqrt{\lambda(-1 + 4k^2)}}{2} \\ M_{cd}^* M_{da}^{*2} &= \frac{-a^2 + b^2 - c^2 + 4a^2 k^2 - 2b^2 k^2 + 4c^2 k^2 + \sqrt{\lambda(-1 + 4k^2)}}{2} \\ M_{ab}^* M_{da}^{*2} &= \frac{a^2 - b^2 + c^2 + 2b^2 k^2 + \sqrt{\lambda(-1 + 4k^2)}}{2} \\ M_{ab}^* M_{bc}^{*2} - M_{bc}^* M_{cd}^{*2} &= (a^2 - b^2 + c^2) (-1 + 2k^2) \\ M_{cd}^* M_{da}^{*2} - M_{bc}^* M_{cd}^{*2} &= (a^2 - b^2 + c^2) (-1 + 2k^2) \\ M^* &= \left\{ \frac{-2a^2}{\sqrt{\lambda}}, \frac{a^2 + \sqrt{\lambda} + b^2 - c^2}{\sqrt{\lambda}}, \frac{a^2 - b^2 + c^2}{\sqrt{\lambda}} \right\} \\ \frac{AM^{*2}}{2} &= \frac{a^2 + \sqrt{\lambda} + c^2}{2} \end{aligned}$$

Ainsi

$$\frac{AM^{*2}}{2} - M_{ab}^* M_{bc}^{*2} = \frac{2a^2 + \sqrt{\lambda} - b^2 + 2c^2 - 4a^2 k^2 + 2b^2 k^2 - 4c^2 k^2 - \sqrt{\lambda(-1 + 4k^2)}}{2}$$

qui se réduit à

$$\frac{AM^{*2}}{2} - M_{ab}^* M_{bc}^{*2} = 0$$

lorsque $k^2 = \frac{1}{2}$.

16.6 Point de Torricelli

Exercice 16.6.1

Soit ABC un triangle, A_1, B_1, C_1 des points tels que les triangles ABC_1 , ACB_1 , BCA_1 soient isocèles de sommets A_1, B_1, C_1 et semblables. Montrer que les droites (AA_1) , (BB_1) , (CC_1) se coupent en un même point T . Evaluer les distances AA_1^2 , BB_1^2 , CC_1^2 .

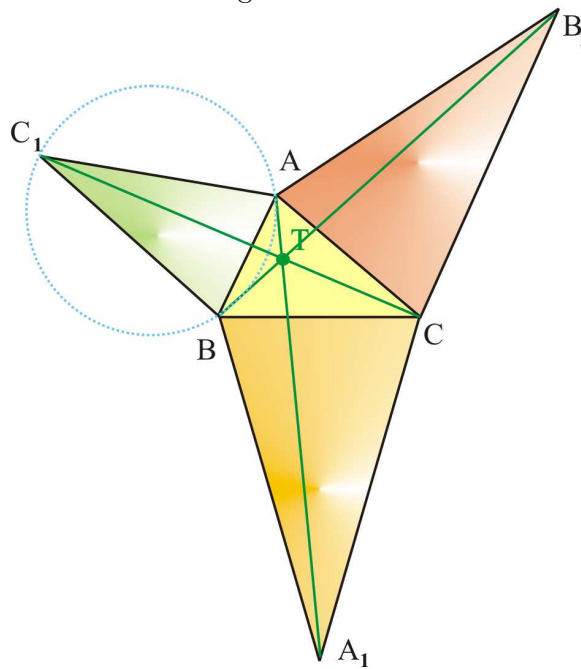
Montrer que les cercles circonscrits aux trois triangles ABC_1 , ACB_1 , BCA_1 passent par le point T (appelé point de Torricelli lorsque ces trois triangles sont extérieurs au triangle ABC) lorsque ces trois triangles sont équilatéraux. On a alors $AA_1^2 = BB_1^2 = CC_1^2$.

On étudiera deux cas selon que les trois triangles sont tous tournés vers l'intérieur, ou vers l'extérieur du triangle AB .

On désignera par k le réel fixe satisfaisant $AC_1 = BC_1 = k c$, $BA_1 = CA_1 = k a$ et $AB_1 = CB_1 = k b$.

Solution:

Etude avec triangles isocèles extérieurs au triangle ABC .



Dessin = $\{A, A_1, B, B_1, C, C_1\}$

Le repère barycentrique choisi est A, B, C .

Les points composés sont C_1, A_1, B_1 .

On déduit les coordonnées barycentriques des points composés:

$$\begin{aligned}
 A_1 &= \left\{ \frac{a^2 \sqrt{\lambda(-1+4k^2)}}{\lambda}, \frac{1}{2} + \frac{(-a^2 - b^2 + c^2) \sqrt{\lambda(-1+4k^2)}}{2\lambda}, \frac{1}{2} + \frac{(-a^2 + b^2 - c^2) \sqrt{\lambda(-1+4k^2)}}{2\lambda} \right\} \\
 B_1 &= \left\{ \frac{1}{2} + \frac{(-a^2 - b^2 + c^2) \sqrt{\lambda(-1+4k^2)}}{2\lambda}, \frac{b^2 \sqrt{\lambda(-1+4k^2)}}{\lambda}, \frac{1}{2} + \frac{(a^2 - b^2 - c^2) \sqrt{\lambda(-1+4k^2)}}{2\lambda} \right\} \\
 C_1 &= \left\{ \frac{1}{2} + \frac{(-a^2 + b^2 - c^2) \sqrt{\lambda(-1+4k^2)}}{2\lambda}, \frac{1}{2} + \frac{(a^2 - b^2 - c^2) \sqrt{\lambda(-1+4k^2)}}{2\lambda}, \frac{c^2 \sqrt{\lambda(-1+4k^2)}}{\lambda} \right\}
 \end{aligned}$$

Dessin = Dessin $\cup \{T\} = \{A, A_1, B, B_1, C, C_1, T\}$

Détermination du point T :

Soit T le point $(CC_1) \cap (BB_1)$. Le point T est composé.

Comme $T \in (CC_1)$, on a, en choisissant l'inconnue ν_1

$$\overrightarrow{OT} = \nu_1 \overrightarrow{OC} + (1 - \nu_1) \overrightarrow{OC_1}$$

On déduit:

$$\overrightarrow{OT} = a(1) \overrightarrow{OA} + a(2) \overrightarrow{OB} + a(3) \overrightarrow{OC}$$

avec

$$\begin{aligned} a(1) &= \frac{1 - \nu_1}{2} - \frac{(-a^2 + b^2 - c^2) \sqrt{\lambda(-1 + 4k^2)}(-1 + \nu_1)}{2\lambda} \\ a(2) &= \frac{1 - \nu_1}{2} - \frac{(a^2 - b^2 - c^2) \sqrt{\lambda(-1 + 4k^2)}(-1 + \nu_1)}{2\lambda} \\ a(3) &= \nu_1 + \frac{\sqrt{\lambda(-1 + 4k^2)}(c^2 - c^2 \nu_1)}{\lambda} \end{aligned}$$

Comme $T \in (BB_1)$, on a, en choisissant l'inconnue μ_1

$$\overrightarrow{OT} = \mu_1 \overrightarrow{OB} + (1 - \mu_1) \overrightarrow{OB_1}$$

On déduit:

$$\overrightarrow{OT} = b(1) \overrightarrow{OA} + b(2) \overrightarrow{OB} + b(3) \overrightarrow{OC}$$

avec

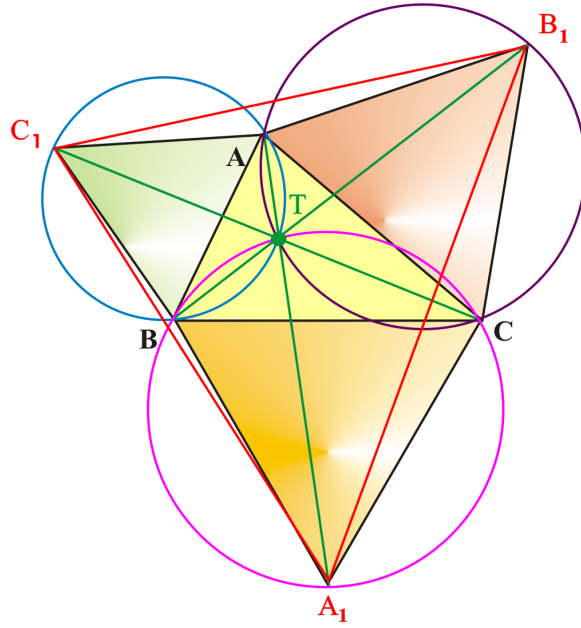
$$\begin{aligned} b(1) &= \frac{1 - \mu_1}{2} - \frac{(-a^2 - b^2 + c^2) \sqrt{\lambda(-1 + 4k^2)}(-1 + \mu_1)}{2\lambda} \\ b(2) &= \mu_1 + \frac{\sqrt{\lambda(-1 + 4k^2)}(b^2 - b^2 \mu_1)}{\lambda} \\ b(3) &= \frac{1 - \mu_1}{2} - \frac{(a^2 - b^2 - c^2) \sqrt{\lambda(-1 + 4k^2)}(-1 + \mu_1)}{2\lambda} \end{aligned}$$

La résolution du système linéaire d'inconnues ν_1, μ_1 donne

$$\begin{aligned} \nu_1 &= \frac{4\lambda k^2 - 4c^2 \sqrt{\lambda(-1 + 4k^2)}}{2\lambda(1 + 2k^2) - (2a^2 + 2b^2 + 2c^2) \sqrt{\lambda(-1 + 4k^2)}} \\ \mu_1 &= \frac{4\lambda k^2 - 4b^2 \sqrt{\lambda(-1 + 4k^2)}}{-2\lambda(1 + 2k^2) + (2a^2 + 2b^2 + 2c^2) \sqrt{\lambda(-1 + 4k^2)}} \end{aligned}$$

On déduit que:

$$\begin{aligned} T = \{ & \frac{2a^2 \sqrt{\lambda(-1 + 4k^2)} - 2(-a^4 + a^2 b^2 + a^2 c^2 + 2a^4 k^2 - 2b^4 k^2 + 4b^2 c^2 k^2 - 2c^4 k^2)}{-2\lambda - 4\lambda k^2 + (2a^2 + 2b^2 + 2c^2) \sqrt{\lambda(-1 + 4k^2)}}, \\ & \frac{2b^2 \sqrt{\lambda(-1 + 4k^2)} + 2(-a^2 b^2 + b^4 - b^2 c^2 + 2a^4 k^2 - 2b^4 k^2 - 4a^2 c^2 k^2 + 2c^4 k^2)}{-2\lambda - 4\lambda k^2 + (2a^2 + 2b^2 + 2c^2) \sqrt{\lambda(-1 + 4k^2)}}, \\ & \frac{2c^2 \sqrt{\lambda(-1 + 4k^2)} + 2(-a^2 c^2 - b^2 c^2 + c^4 + 2a^4 k^2 - 4a^2 b^2 k^2 + 2b^4 k^2 - 2c^4 k^2)}{-2\lambda - 4\lambda k^2 + (2a^2 + 2b^2 + 2c^2) \sqrt{\lambda(-1 + 4k^2)}} \} \end{aligned}$$



Dessin = Dessin $\cup \{T_1\} = \{A, A_1, B, B_1, C, C_1, T, T_1\}$

Détermination du point T_1 :

Soit T_1 le point $(CC_1) \cap (AA_1)$. Le point T_1 est composé.

Comme $T_1 \in (CC_1)$, on a, en choisissant l'inconnue ν_1

$$\overrightarrow{OT_1} = \nu_1 \overrightarrow{OC} + (1 - \nu_1) \overrightarrow{OC_1}$$

On déduit:

$$\overrightarrow{OT_1} = c(1) \overrightarrow{OA} + c(2) \overrightarrow{OB} + c(3) \overrightarrow{OC}$$

avec

$$\begin{aligned} c(1) &= \frac{1 - \nu_1}{2} - \frac{(-a^2 + b^2 - c^2) \sqrt{\lambda(-1 + 4k^2)} (-1 + \nu_1)}{2\lambda} \\ c(2) &= \frac{1 - \nu_1}{2} - \frac{(a^2 - b^2 - c^2) \sqrt{\lambda(-1 + 4k^2)} (-1 + \nu_1)}{2\lambda} \\ c(3) &= \nu_1 + \frac{\sqrt{\lambda(-1 + 4k^2)} (c^2 - c^2 \nu_1)}{\lambda} \end{aligned}$$

Comme $T_1 \in (AA_1)$, on a, en choisissant l'inconnue μ_1

$$\overrightarrow{OT_1} = \mu_1 \overrightarrow{OA} + (1 - \mu_1) \overrightarrow{OA_1}$$

On déduit:

$$\overrightarrow{OT_1} = d(1) \overrightarrow{OA} + d(2) \overrightarrow{OB} + d(3) \overrightarrow{OC}$$

avec

$$\begin{aligned} d(1) &= \mu_1 + \frac{\sqrt{\lambda(-1 + 4k^2)} (a^2 - a^2 \mu_1)}{\lambda} \\ d(2) &= \frac{1 - \mu_1}{2} - \frac{(-a^2 - b^2 + c^2) \sqrt{\lambda(-1 + 4k^2)} (-1 + \mu_1)}{2\lambda} \end{aligned}$$

$$d(3) = \frac{1 - \mu_1}{2} - \frac{(-a^2 + b^2 - c^2) \sqrt{\lambda(-1 + 4k^2)}(-1 + \mu_1)}{2\lambda}$$

La résolution du système linéaire d'inconnues ν_1, μ_1 donne

$$\nu_1 = \frac{2 \left(\lambda k^2 - c^2 \sqrt{\lambda(-1 + 4k^2)} \right)}{\lambda + 2\lambda k^2 - (a^2 + b^2 + c^2) \sqrt{\lambda(-1 + 4k^2)}}$$

$$\mu_1 = \frac{-2\lambda k^2 + \sqrt{\lambda(-1 + 4k^2)}}{a^2 + b^2 + c^2 - \lambda(1 + 2k^2)}$$

On déduit que:

$$T_1 = \left\{ \frac{2a^2 \sqrt{\lambda(-1 + 4k^2)} - 2(-a^4 + a^2 b^2 + a^2 c^2 + 2a^4 k^2 - 2b^4 k^2 + 4b^2 c^2 k^2 - 2c^4 k^2)}{-2\lambda - 4\lambda k^2 + (2a^2 + 2b^2 + 2c^2) \sqrt{\lambda(-1 + 4k^2)}}, \right.$$

$$\frac{2b^2 \sqrt{\lambda(-1 + 4k^2)} + 2(-a^2 b^2 + b^4 - b^2 c^2 + 2a^4 k^2 - 2b^4 k^2 - 4a^2 c^2 k^2 + 2c^4 k^2)}{-2\lambda - 4\lambda k^2 + (2a^2 + 2b^2 + 2c^2) \sqrt{\lambda(-1 + 4k^2)}},$$

$$\left. \frac{2c^2 \sqrt{\lambda(-1 + 4k^2)} + 2(-a^2 c^2 - b^2 c^2 + c^4 + 2a^4 k^2 - 4a^2 b^2 k^2 + 2b^4 k^2 - 2c^4 k^2)}{-2\lambda - 4\lambda k^2 + (2a^2 + 2b^2 + 2c^2) \sqrt{\lambda(-1 + 4k^2)}} \right\}$$

On a donc $T = T_1$.

Un point $M = \{x, y, 1 - x - y\}$ appartient au cercle passant par A, B, C_1 si et seulement si

$$0 = 2\lambda(-1 + 2k^2)(-1 + x + y) + 2\sqrt{\lambda(-1 + 4k^2)}H(a, b, c, x, y)$$

$$H(a, b, c, x, y) = a^2 + b^2 - c^2 - a^2 x - 3b^2 x + c^2 x + 2b^2 x^2 - 3a^2 y - b^2 y$$

$$+ c^2 y + 2a^2 x y + 2b^2 x y - 2c^2 x y + 2a^2 y^2$$

La condition devient, lorsque $M = T$,

$$0 = (1 - k)(1 + k)(c^2 \sqrt{\lambda(-1 + 4k^2)} F(a, b, c, k))$$

$$+ \lambda(c^4 - a^2 c^2 k^2 - b^2 c^2 k^2 - 3c^4 k^2 + 2a^4 k^4 - 4a^2 b^2 k^4 + 2b^4 k^4 - 2c^4 k^4)$$

avec

$$F(a, b, c, k) = (-a^2 c^2 - b^2 c^2 + c^4 + 3a^4 k^2 - 6a^2 b^2 k^2 + 3b^4 k^2 - 2a^2 c^2 k^2 - 2b^2 c^2 k^2 - c^4 k^2)$$

Lorsque $k = 1$, les triangles sont équilatéraux et T appartient au cercle circonscrit au triangle ABC_1 . La vérification est identique pour les cercles circonscrits aux triangles ACB_1, BCA_1 .

Formons

$$AA_1^2 = \frac{-a^2 + b^2 + c^2 + 2a^2 k^2 - \sqrt{\lambda(-1 + 4k^2)}}{2}$$

$$BB_1^2 = \frac{a^2 - b^2 + c^2 + 2b^2 k^2 - \sqrt{\lambda(-1 + 4k^2)}}{2}$$

$$CC_1^2 = \frac{a^2 + b^2 - c^2 + 2c^2 k^2 - \sqrt{\lambda(-1 + 4k^2)}}{2}$$

donc

$$AA_1^2 - BB_1^2 = (a - b)(a + b)(-1 + k)(1 + k)$$

$$AA_1^2 - CC_1^2 = (a - c) (a + c) (-1 + k) (1 + k)$$

$$BB_1^2 - CC_1^2 = (b - c) (b + c) (-1 + k) (1 + k)$$

Etude avec triangles isocèles tournés vers l'intérieur du triangle ABC .

Nous indiquons uniquement les résultats.

$$\begin{aligned} A_1 &= \left\{ \frac{-a^2 \sqrt{\lambda(-1+4k^2)}}{\lambda}, \frac{1}{2} + \frac{(a^2+b^2-c^2) \sqrt{\lambda(-1+4k^2)}}{2\lambda}, \frac{1}{2} + \frac{(a^2-b^2+c^2) \sqrt{\lambda(-1+4k^2)}}{2\lambda} \right\} \\ B_1 &= \left\{ \frac{1}{2} + \frac{(a^2+b^2-c^2) \sqrt{\lambda(-1+4k^2)}}{2\lambda}, \frac{-b^2 \sqrt{\lambda(-1+4k^2)}}{\lambda}, \frac{1}{2} + \frac{(-a^2+b^2+c^2) \sqrt{\lambda(-1+4k^2)}}{2\lambda} \right\} \\ C_1 &= \left\{ \frac{1}{2} + \frac{(a^2-b^2+c^2) \sqrt{\lambda(-1+4k^2)}}{2\lambda}, \frac{1}{2} + \frac{(-a^2+b^2+c^2) \sqrt{\lambda(-1+4k^2)}}{2\lambda}, \frac{-c^2 \sqrt{\lambda(-1+4k^2)}}{\lambda} \right\} \end{aligned}$$

Puis

$$AA_1^2 = \frac{-a^2 + b^2 + c^2 + 2a^2 k^2 + \sqrt{\lambda(-1+4k^2)}}{2}$$

et formules semblables pour BB_1^2 , CC_1^2 . Les différences sont toujours

$$AA_1^2 - BB_1^2 = (a - b) (a + b) (-1 + k) (1 + k)$$

$$AA_1^2 - CC_1^2 = (a - c) (a + c) (-1 + k) (1 + k)$$

$$BB_1^2 - CC_1^2 = (b - c) (b + c) (-1 + k) (1 + k)$$

On obtient

$$\begin{aligned} T^* &= \left\{ \frac{2a^2 \sqrt{\lambda(-1+4k^2)} - 2(-a^4 + a^2 b^2 + a^2 c^2 + 2a^4 k^2 - 2b^4 k^2 + 4b^2 c^2 k^2 - 2c^4 k^2)}{-2\lambda(1+2k^2) + (2a^2 + 2b^2 + 2c^2) \sqrt{\lambda(-1+4k^2)}}, \right. \\ &\quad \frac{2b^2 \sqrt{\lambda(-1+4k^2)} + 2(-a^2 b^2 + b^4 - b^2 c^2 + 2a^4 k^2 - 2b^4 k^2 - 4a^2 c^2 k^2 + 2c^4 k^2)}{-2\lambda(1+2k^2) + (2a^2 + 2b^2 + 2c^2) \sqrt{\lambda(-1+4k^2)}}, \\ &\quad \left. \frac{2c^2 \sqrt{\lambda(-1+4k^2)} + 2(-a^2 c^2 - b^2 c^2 + c^4 + 2a^4 k^2 - 4a^2 b^2 k^2 + 2b^4 k^2 - 2c^4 k^2)}{-2\lambda(1+2k^2) + (2a^2 + 2b^2 + 2c^2) \sqrt{\lambda(-1+4k^2)}} \right\} \end{aligned}$$

donc $T^* \neq T$. Le calcul (à l'ordinateur) montre que les cercles circonscrits aux trois triangles ABC_1 , ACB_1 , BCA_1 passent par le point T^* .

CHAPITRE

17

Point de Lemoine

17 Point de Lemoine

17.1 Résultats techniques

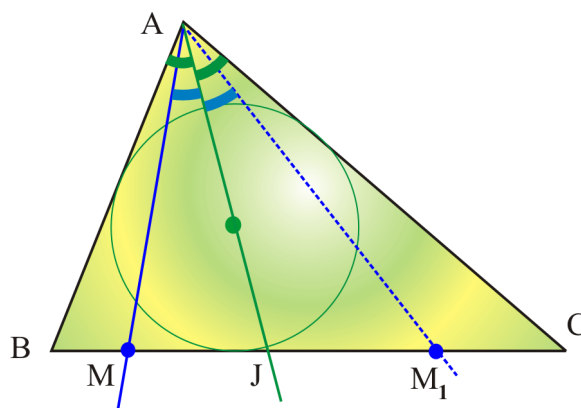
Exercice 17.1.1 *symédiane d'une droite*

La bissectrice intérieure d'un triangle ABC issue du sommet A coupe le côté (BC) en J . Soit k un réel fixé et M le point de la droite (BC) égal au barycentre des points B et C affectés respectivement des coefficients k et $1 - k$.

On désigne par M_1 le point de la droite (BC) tel que la droite (AJ) devienne la bissectrice intérieure - issue du sommet A - du triangle AMM_1 . Montrer que les coordonnées barycentriques du point M_1 sont

$$M_1 = \left\{ 0, \frac{b^2 (-1 + k)}{-b^2 + b^2 k - c^2 k}, \frac{c^2 k}{b^2 - b^2 k + c^2 k} \right\}$$

La droite (AM_1) est la symédiane de la droite (AM) .

**Solution:**

Dessin = $\{A, B, C, J, M, M_1\}$

Le repère barycentrique choisi est A, B, C .

Les points composés sont M, M_1, J .

Le point J est le barycentre des points pondérés $\{B(b), C(c)\}$. Nous devons déterminer la valeur d'un réel

k_1 tel que M_1 soit le barycentre des points pondérés $\{B(k_1), C(1 - k_1)\}$.

Dessin = $\{A, B, C, J, M, M_1\}$

Le repère barycentrique choisi est A, B, C .

Les points composés sont M, M_1, J .

Les coordonnées barycentriques des points composés sont:

$$M = \{0, k, 1 - k\}$$

$$J = \left\{0, \frac{b}{b+c}, \frac{c}{b+c}\right\}$$

et les coordonnées barycentriques temporaires de M_1

$$M_1 = \{0, k_1, 1 - k_1\}$$

Calcul du produit scalaire $(-2) \overrightarrow{AJ} \cdot \overrightarrow{AM}$:

On a:

$$(-2) \overrightarrow{AJ} \cdot \overrightarrow{AM} = \delta(A, A, J, M) = -AJ^2 + JM^2 - AM^2$$

La distance JM^2 est égale à

$$JM^2 = \frac{BC^2 (-b + bk + ck)^2}{(b+c)^2} = \frac{a^2 (-b + bk + ck)^2}{(b+c)^2}$$

La distance AM^2 est égale à

$$AM^2 = AC^2 (1 - k) + AB^2 k + BC^2 (-1 + k) k = b^2 - a^2 k - b^2 k + c^2 k + a^2 k^2$$

La distance AJ^2 est égale à

$$AJ^2 = -\frac{b BC^2 c}{(b+c)^2} + \frac{AB^2 b}{b+c} + \frac{AC^2 c}{b+c} = -\frac{b (a-b-c) c (a+b+c)}{(b+c)^2}$$

On déduit que $(-2) \overrightarrow{AJ} \cdot \overrightarrow{AM}$ a pour valeur

$$\frac{(-a+b+c) (a+b+c) (-b+bk-ck)}{b+c}$$

On déduit par un calcul semblable que $(-2) \overrightarrow{AJ} \cdot \overrightarrow{AM_1}$ a pour valeur

$$\frac{(-a+b+c) (a+b+c) (-b+bk_1-ck_1)}{b+c}$$

Désignons par θ l'angle MAJ . Le point J est le pied de la bissectrice issue de A au triangle AMM_1 , c'est donc le barycentre des points M et M_1 affectés respectivement des coefficients AM_1 et AM (longueurs de ces deux segments). Or, on a

$$(-2) \overrightarrow{AJ} \cdot \overrightarrow{AM} = (-2) AJ \cdot AM \cos(\theta)$$

$$(-2) \overrightarrow{AJ} \cdot \overrightarrow{AM_1} = (-2) AJ \cdot AM_1 \cos(\theta)$$

Ainsi, J est le barycentre des points M et M_1 affectés des coefficients $(-2) \overrightarrow{AJ} \cdot \overrightarrow{AM_1}$ et $(-2) \overrightarrow{AJ} \cdot \overrightarrow{AM}$.

Dessin = Dessin $\cup \{J_1\} = \{B, C, J, J_1, M, M_1\}$

Désignons par J_1 le point barycentre de $\{(M, (-2) \overrightarrow{AJ} \cdot \overrightarrow{AM_1}), (M_1, (-2) \overrightarrow{AJ} \cdot \overrightarrow{AM})\}$. On obtient, après substitution des coordonnées barycentriques de M et M_1 :

$$J_1 = \left\{0, \frac{-(bk) - bk_1 + 2bk k_1 - 2ck k_1}{-2b + bk - ck + bk_1 - ck_1}, \frac{-2b + 2bk - ck + 2bk_1 - ck_1 - 2bk k_1 + 2ck k_1}{-2b + bk - ck + bk_1 - ck_1}\right\}$$

Puisque le point J coïncide avec le point J_1 , nous identifions les coefficients de J_1 avec ceux de J . On obtient alors le système linéaire

$$\begin{cases} \frac{-bk - bk_1 + 2bk k_1 - 2ck k_1}{-2b + bk - ck + bk_1 - ck_1} = \frac{b}{b+c} \\ -\frac{2b - 2bk + ck - 2bk_1 + ck_1 + 2bk k_1 - 2ck k_1}{-2b + bk - ck + bk_1 - ck_1} = \frac{c}{b+c} \end{cases}$$

qui détermine la valeur de k_1 en fonction de k (les deux équations sont équivalentes). On obtient

$$k_1 = \frac{-b^2 + b^2 k}{-b^2 + b^2 k - c^2 k}$$

En substituant cette valeur dans les coordonnées barycentriques de M_1 , il vient:

$$M_1 = \left\{0, \frac{b^2 (-1 + k)}{-b^2 + b^2 k - c^2 k}, \frac{c^2 k}{b^2 - b^2 k + c^2 k}\right\}$$

Exercice 17.1.2

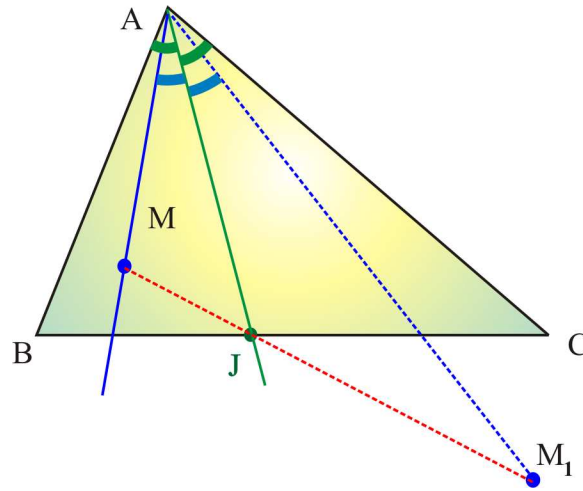
Soit ABC un triangle et J le point d'intersection de la bissectrice intérieure issue du sommet A avec le côté (BC) . Etant donné un point M de coordonnées barycentriques $\{\alpha_1, \alpha_2, 1 - \alpha_1 - \alpha_2\}$, soit M_1 le point du plan tel que la droite la droite (AJ) soit la bissectrice intérieure - issue de A - au triangle AMM_1 avec la condition supplémentaire $J \in (MM_1)$. Montrer que

$$M_1 = \left\{ \frac{\alpha_1 bc}{-b^2 + \alpha_1 b^2 + \alpha_2 b^2 + \alpha_1 bc - \alpha_2 c^2}, \frac{(-1 + \alpha_1 + \alpha_2) b^2}{-b^2 + \alpha_1 b^2 + \alpha_2 b^2 + \alpha_1 bc - \alpha_2 c^2}, \frac{\alpha_2 c^2}{b^2 - \alpha_1 b^2 - \alpha_2 b^2 - \alpha_1 bc + \alpha_2 c^2} \right\}$$

Il revient au même de montrer que

$$M_1 = \left\{ \frac{-AB AC X}{-AB AC X + AB^2 Y + AC^2 Z}, \frac{AC^2 Z}{-AB AC X + AB^2 Y + AC^2 Z}, \frac{AB^2 Y}{-AB AC X + AB^2 Y + AC^2 Z} \right\}$$

lorsque M a pour coordonnées barycentriques $\{X, Y, Z\}$.

**Solution:**

Le principe est identique à celui de l'exercice précédent, nous abrégeons quelque peu les calculs.

Dessin = $\{A, B, C, J, M, M_1\}$

Le repère barycentrique choisi est A, B, C .

Les points composés sont M, M_1, J .

Les coordonnées barycentriques des points composés sont:

$$M = \{\alpha_1, \alpha_2, 1 - \alpha_1 - \alpha_2\}$$

$$J = \{0, \frac{b}{b+c}, \frac{c}{b+c}\}$$

et les coordonnées barycentriques temporaires du point M_1 sont

$$M_1 = \{\beta_1, \beta_2, 1 - \beta_1 - \beta_2\}$$

On obtient

$$(-2), \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AJ} = \frac{(-a+b+c)(a+b+c)(-b+\alpha_1 b + \alpha_2 b - \alpha_2 c)}{b+c}$$

$$(-2), \overrightarrow{AM_1} \cdot \overrightarrow{AJ} = \frac{(-a+b+c)(a+b+c)(-b+b\beta_1 + b\beta_2 - \beta_2 c)}{b+c}$$

Dessin = $\text{Dessin} \cup \{J_1\} = \{A, B, C, J, J_1, M, M_1\}$

Désignons par J_1 le point barycentre de $\{(M, (-2) \overrightarrow{AJ} \cdot \overrightarrow{AM_1}), (M_1, (-2) \overrightarrow{AJ} \cdot \overrightarrow{AM})\}$. On obtient, après substitution des coordonnées barycentriques de M et M_1 :

$$J_1 = \left\{ \frac{-\alpha_1 b - b\beta_1 + 2\alpha_1 b\beta_1 + \alpha_2 b\beta_1 + \alpha_1 b\beta_2 - \alpha_2 \beta_1 c - \alpha_1 \beta_2 c}{-2b + \alpha_1 b + \alpha_2 b + b\beta_1 + b\beta_2 - \alpha_2 c - \beta_2 c}, \right. \\ \left. \frac{-\alpha_2 b + \alpha_2 b\beta_1 - b\beta_2 + \alpha_1 b\beta_2 + 2\alpha_2 b\beta_2 - 2\alpha_2 \beta_2 c}{-2b + \alpha_1 b + \alpha_2 b + b\beta_1 + b\beta_2 - \alpha_2 c - \beta_2 c}, \right. \\ \left. \frac{j_1^*}{-2b + \alpha_1 b + \alpha_2 b + b\beta_1 + b\beta_2 - \alpha_2 c - \beta_2 c} \right\}$$

avec

$$j_1^* = -2b + 2\alpha_1 b + 2\alpha_2 b + 2b\beta_1 - 2\alpha_1 b\beta_1 - 2\alpha_2 b\beta_1 + 2b\beta_2 - 2\alpha_1 b\beta_2 \\ - 2\alpha_2 b\beta_2 - \alpha_2 c + \alpha_2 \beta_1 c - \beta_2 c + \alpha_1 \beta_2 c + 2\alpha_2 \beta_2 c$$

Puisque le point J coïncide avec le point J_1 , nous identifions les coefficients de J_1 avec ceux de J . On obtient alors le système linéaire (la 3^{ème} équation est inutile car combinaison linéaire des 2 premières)

$$\begin{cases} \frac{-\alpha_1 b - b\beta_1 + 2\alpha_1 b\beta_1 + \alpha_2 b\beta_1 + \alpha_1 b\beta_2 - \alpha_2\beta_1 c - \alpha_1\beta_2 c}{-2b + \alpha_1 b + \alpha_2 b + b\beta_1 + b\beta_2 - \alpha_2 c - \beta_2 c} = 0 \\ \frac{-\alpha_2 b + \alpha_2 b\beta_1 - b\beta_2 + \alpha_1 b\beta_2 + 2\alpha_2 b\beta_2 - 2\alpha_2\beta_2 c}{-2b + \alpha_1 b + \alpha_2 b + b\beta_1 + b\beta_2 - \alpha_2 c - \beta_2 c} = \frac{b}{b+c} \end{cases}$$

qui a pour solution

$$\beta_1 = \frac{\alpha_1 b c}{-b^2 + \alpha_1 b^2 + \alpha_2 b^2 + \alpha_1 b c - \alpha_2 c^2}$$

$$\beta_2 = \frac{-b^2 + \alpha_1 b^2 + \alpha_2 b^2}{-b^2 + \alpha_1 b^2 + \alpha_2 b^2 + \alpha_1 b c - \alpha_2 c^2}$$

En substituant ces valeurs dans l'expression des coordonnées barycentriques de M_1 , il résulte que

$$M_1 = \left\{ \frac{\alpha_1 b c}{-b^2 + \alpha_1 b^2 + \alpha_2 b^2 + \alpha_1 b c - \alpha_2 c^2}, \frac{(-1 + \alpha_1 + \alpha_2) b^2}{-b^2 + \alpha_1 b^2 + \alpha_2 b^2 + \alpha_1 b c - \alpha_2 c^2}, \frac{\alpha_2 c^2}{b^2 - \alpha_1 b^2 - \alpha_2 b^2 - \alpha_1 b c + \alpha_2 c^2} \right\}$$

17.2 Isogonal d'un point par rapport à un triangle

Exercice 17.2.1 *isogonal d'un point P*

Soit un triangle ABC et un point P de son plan. Montrer que les droites symétriques des droites (AP) , (BP) , (CP) par rapport respectivement aux bissectrices des angles A , B , C respectivement passent par un même point P_1 .

Ce point P_1 est appelé **l'isogonal du point P par rapport au triangle ABC** . On établira que les coordonnées barycentriques de P_1 sont

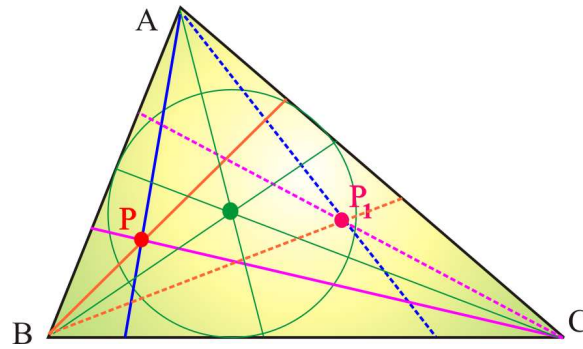
$$P_1 = \left\{ \frac{a^2 X_2 X_3}{c^2 X_1 X_2 + b^2 X_1 X_3 + a^2 X_2 X_3}, \frac{b^2 X_1 X_3}{c^2 X_1 X_2 + b^2 X_1 X_3 + a^2 X_2 X_3}, \frac{c^2 X_1 X_2}{c^2 X_1 X_2 + b^2 X_1 X_3 + a^2 X_2 X_3} \right\}$$

lorsque P a pour coordonnées barycentriques

$$\left\{ \frac{X_1}{X_1 + X_2 + X_3}, \frac{X_2}{X_1 + X_2 + X_3}, \frac{X_3}{X_1 + X_2 + X_3} \right\}$$

dans le repère $\{A, B, C\}$.

Il est clair que la transformation est involutive (l'isogonal du point P_1 est le point P).

**Solution:**

La droite (AP) coupe le côté (BC) au point R_1 de coordonnées barycentriques $\frac{X_2}{X_2+X_3}$. Pour obtenir la droite symétrique de la droite $(AP) = (AR_1)$ par rapport à la bissectrice intérieure au triangle ABC , il nous suffit de déterminer le point $Q_1 \in (BC)$ tel que la bissectrice intérieure au triangle ABC -issue du sommet A - coïncide avec la bissectrice intérieure au triangle AR_1Q_1 -issue du sommet A -. Nous obtenons les coordonnées barycentriques de Q_1 en utilisant la formule de l'exercice précédent.

Dessin = $\{A, B, C, Q_1, Q_2\}$

les coordonnées barycentriques du point Q_1 sont

$$Q_1 = \left\{0, \frac{b^2 X_3}{c^2 X_2 + b^2 X_3}, \frac{c^2 X_2}{c^2 X_2 + b^2 X_3}\right\}$$

Les coordonnées barycentriques du point R_2 , intersection de la droite BP avec le côté AC sont $\{X_1, 0, X_3\}$. Avec des notations évidentes, les coordonnées barycentriques du point Q_2 sont

$$Q_2 = \left\{\frac{a^2 X_3}{c^2 X_1 + a^2 X_3}, 0, \frac{c^2 X_1}{c^2 X_1 + a^2 X_3}\right\}$$

Soit P_1 l'intersection des droites (AQ_1) et (BQ_2) .

Dessin = $\text{Dessin} \cup \{P_1\} = \{A, B, C, P_1, Q_1, Q_2\}$

Détermination du point P_1 :

Soit P_1 le point $(AQ_1) \cap (BQ_2)$. Le point P_1 est composé.

Comme $P_1 \in (AQ_1)$, on a, en choisissant les inconnues ν_1

$$\overrightarrow{OP_1} = \nu_1 \overrightarrow{OA} + (1 - \nu_1) \overrightarrow{OQ_1}$$

On déduit:

$$\overrightarrow{OP_1} = a(1) \overrightarrow{OA} + a(2) \overrightarrow{OB} + a(3) \overrightarrow{OC}$$

avec

$$\begin{aligned} a(1) &= \nu_1 \\ a(2) &= \frac{b^2 (1 - \nu_1) X_3}{c^2 X_2 + b^2 X_3} \\ a(3) &= \frac{c^2 (1 - \nu_1) X_2}{c^2 X_2 + b^2 X_3} \end{aligned}$$

Comme $P_1 \in (BQ_2)$, on a, en choisissant les inconnues μ_1

$$\overrightarrow{OP_1} = \mu_1 \overrightarrow{OB} + (1 - \mu_1) \overrightarrow{OQ_2}$$

On déduit:

$$\overrightarrow{OP_1} = b(1) \overrightarrow{OA} + b(2) \overrightarrow{OB} + b(3) \overrightarrow{OC}$$

avec

$$b(1) = \frac{a^2 (1 - \mu_1) X_3}{c^2 X_1 + a^2 X_3}$$

$$b(2) = \mu_1$$

$$b(3) = \frac{c^2 (1 - \mu_1) X_1}{c^2 X_1 + a^2 X_3}$$

La résolution du système linéaire d'inconnues ν_1, μ_1 donne

$$\nu_1 = \frac{a^2 X_2 X_3}{c^2 X_1 X_2 + b^2 X_1 X_3 + a^2 X_2 X_3} \quad \mu_1 = \frac{b^2 X_1 X_3}{c^2 X_1 X_2 + b^2 X_1 X_3 + a^2 X_2 X_3}$$

On déduit que:

$$P_1 = \left\{ \frac{a^2 X_2 X_3}{c^2 X_1 X_2 + b^2 X_1 X_3 + a^2 X_2 X_3}, \frac{b^2 X_1 X_3}{c^2 X_1 X_2 + b^2 X_1 X_3 + a^2 X_2 X_3}, \frac{c^2 X_1 X_2}{c^2 X_1 X_2 + b^2 X_1 X_3 + a^2 X_2 X_3} \right\}$$

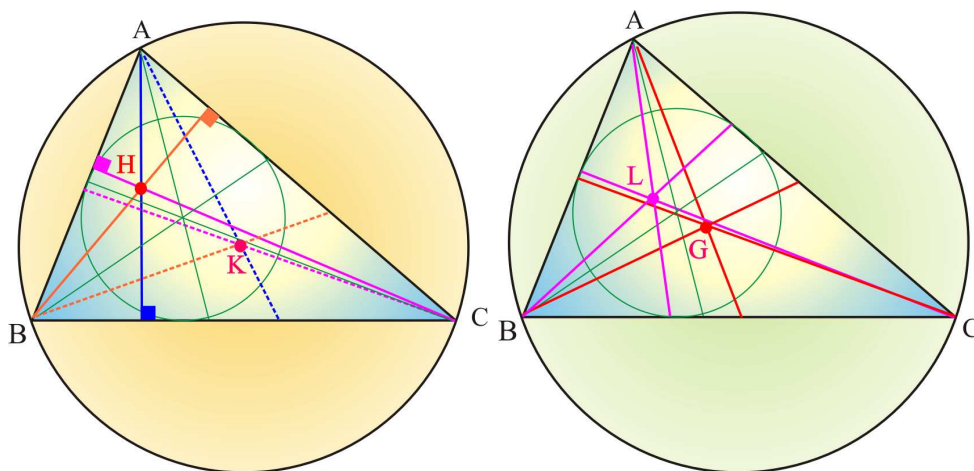
La formule s'avère symétrique en les variables X_1, X_2, X_3 , donc les droites symétriques des droites (AP) , (BP) , (CP) par rapport aux bissectrices des angles A, B, C respectivement passent par le point P_1 ainsi défini.

Exercice 17.2.2 *exemples*

Montrer que l'orthocentre et le centre du cercle circonscrit au triangle ABC sont des points isogonaux relativement au triangle ABC .

Montrer que le centre de gravité et le point de Lemoine (voir ci-dessous 17.3.1) sont des points isogonaux relativement au triangle ABC .

Déterminer l'isogonal du point $P = \{a^4, b^4, c^4\}$.



Solution:

En prenant pour P l'orthocentre de coordonnées barycentriques $\{\frac{1}{-a^2+b^2+c^2}, \frac{1}{a^2-b^2+c^2}, \frac{1}{a^2+b^2-c^2}\}$, on trouve

$$P_1 = \left\{ \frac{a^2}{(a^2+b^2-c^2)(a^2-b^2+c^2)}, \frac{b^2}{(a^2+b^2-c^2)(-a^2+b^2+c^2)}, \frac{c^2}{(a^2-b^2+c^2)(-a^2+b^2+c^2)} \right\}$$

En prenant $P = \{X_1, X_2, X_3\} = \{1, 1, 1\}$, on trouve

$$P_1 = \left\{ \frac{a^2}{a^2+b^2+c^2}, \frac{b^2}{a^2+b^2+c^2}, \frac{c^2}{a^2+b^2+c^2} \right\}$$

Pour $P = \{a^4, b^4, c^4\}$, on trouve $P_1 = \{b^2 c^2, a^2 c^2, a^2 b^2\}$ après simplification par $a^2 b^2 c^2$ (coordonnées barycentriques non-normalisées).

17.3 Le point de Lemoine

Dans un triangle ABC , considérons l'une des médianes, par exemple la médiane (AA_1) issue du sommet A et passant par le point A_1 milieu du segment $[BC]$: la symédiane correspondante est la droite (AA_1^*) issue du sommet A et passant par le point A_1^* égal à l'isogonal du point A_1 . Les trois médianes sont concourantes au centre de gravité du triangle, il en va de même des trois symédiannes correspondantes par 17.2.1.

Exercice 17.3.1

On appelle point de Lemoine L_0 le point de rencontre des symédiannes d'un triangle ABC : ce point L_0 est l'isogonal du centre de gravité du triangle. Soient L_1 (resp. L_2, L_3) les intersections des droites (AL_0) (resp. $(BL_0), (CL_0)$) avec le côté respectif (BC) (resp. $(AC), (AB)$), G le centre de gravité, J le centre du cercle inscrit, K le centre du cercle circonscrit.

1. Montrer que les coordonnées barycentriques de L_0 sont

$$L_0 = \left\{ \frac{a^2}{a^2+b^2+c^2}, \frac{b^2}{a^2+b^2+c^2}, \frac{c^2}{a^2+b^2+c^2} \right\}$$

2. Calculer les longueurs des symédiannes (CL_1, BL_2, AL_3) .
3. Déterminer les coordonnées barycentriques des points $I_1 = (AJ) \cap (GL_0)$, $I_2 = (AG) \cap (JL_0)$, $I_3 = (AL_0) \cap (GJ)$, $I_4 = (AL_0) \cap (GK)$, $I_5 = (AL_0) \cap (JK)$.

Solution:

Dessin = $\{A, B, C, G, J, K, L_1, L_2, L_3, L_0\}$

Le repère barycentrique choisi est A, B, C .

Les points composés sont $G, J, L_0, K, L_1, L_2, L_3$.

Les coordonnées barycentriques des points composés (autres que G, J, K) sont:

$$L_0 = \left\{ \frac{a^2}{a^2+b^2+c^2}, \frac{b^2}{a^2+b^2+c^2}, \frac{c^2}{a^2+b^2+c^2} \right\}$$

$$J = \left\{ \frac{a}{a+b+c}, \frac{b}{a+b+c}, \frac{c}{a+b+c} \right\}$$

$$L_1 = \left\{ \frac{a^2}{a^2+b^2}, \frac{b^2}{a^2+b^2}, 0 \right\}$$

$$L_2 = \left\{ \frac{a^2}{a^2+c^2}, 0, \frac{c^2}{a^2+c^2} \right\}$$

$$L_3 = \left\{ 0, \frac{b^2}{b^2+c^2}, \frac{c^2}{b^2+c^2} \right\}$$

La distance CL_1^2 est égale à

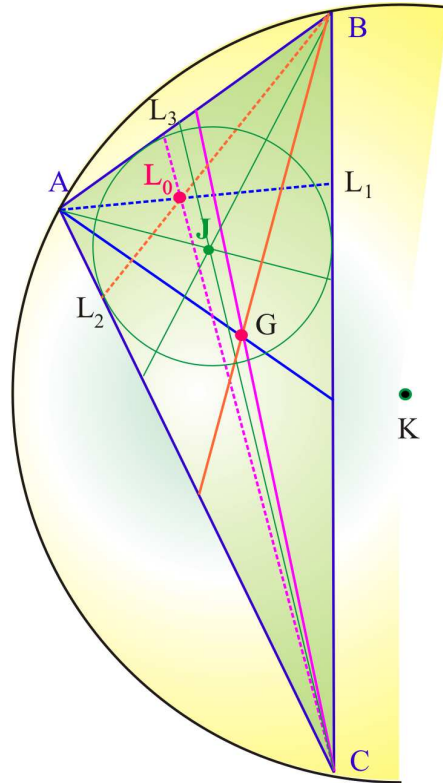
$$CL_1^2 = -\frac{a^2 AB^2 b^2}{(a^2+b^2)^2} + \frac{a^2 AC^2}{a^2+b^2} + \frac{b^2 BC^2}{a^2+b^2} = \frac{a^2 b^2 (2a^2 + 2b^2 - c^2)}{(a^2+b^2)^2}$$

La distance BL_2^2 est égale à

$$BL_2^2 = -\frac{a^2 AC^2 c^2}{(a^2+c^2)^2} + \frac{a^2 AB^2}{a^2+c^2} + \frac{BC^2 c^2}{a^2+c^2} = \frac{a^2 c^2 (2a^2 - b^2 + 2c^2)}{(a^2+c^2)^2}$$

La distance AL_3^2 est égale à

$$AL_3^2 = -\frac{b^2 BC^2 c^2}{(b^2+c^2)^2} + \frac{AB^2 b^2}{b^2+c^2} + \frac{AC^2 c^2}{b^2+c^2} = \frac{b^2 c^2 (-a^2 + 2b^2 + 2c^2)}{(b^2+c^2)^2}$$



Dessin = Dessin $\cup \{I_1\} = \{A, B, C, G, I_1, J, K, L_1, L_2, L_3, L_0\}$

Détermination du point I_1 :

Soit I_1 le point $(AJ) \cap (GL_0)$. Le point I_1 est composé.

Comme $I_1 \in (AJ)$, on a, en choisissant l'inconnue ν_1

$$\overrightarrow{OI_1} = \nu_1 \overrightarrow{OA} + (1 - \nu_1) \overrightarrow{OJ}$$

On déduit:

$$\overrightarrow{OI_1} = a(1) \overrightarrow{OA} + a(2) \overrightarrow{OB} + a(3) \overrightarrow{OC}$$

avec

$$a(1) = \frac{a + b\nu_1 + c\nu_1}{a + b + c}$$

$$a(2) = \frac{b(1 - \nu_1)}{a + b + c}$$

$$a(3) = \frac{c(1 - \nu_1)}{a + b + c}$$

Comme $I_1 \in (GL_0)$, on a, en choisissant l'inconnue μ_1

$$\overrightarrow{OI_1} = \mu_1 \overrightarrow{OG} + (1 - \mu_1) \overrightarrow{OL_0}$$

On déduit:

$$\overrightarrow{OI_1} = b(1) \overrightarrow{OA} + b(2) \overrightarrow{OB} + b(3) \overrightarrow{OC}$$

avec

$$b(1) = \frac{3a^2 - 2a^2\mu_1 + b^2\mu_1 + c^2\mu_1}{3(a^2 + b^2 + c^2)}$$

$$b(2) = \frac{3b^2 + a^2\mu_1 - 2b^2\mu_1 + c^2\mu_1}{3(a^2 + b^2 + c^2)}$$

$$b(3) = \frac{3c^2 + a^2\mu_1 + b^2\mu_1 - 2c^2\mu_1}{3(a^2 + b^2 + c^2)}$$

La résolution du système linéaire d'inconnues ν_1, μ_1 donne

$$\nu_1 = \frac{(a-b)(a-c)}{a^2 + b^2 + 3bc + c^2} \quad \mu_1 = \frac{3bc}{a^2 + b^2 + 3bc + c^2}$$

On déduit que:

$$I_1 = \left\{ \frac{a^2 + bc}{a^2 + b^2 + 3bc + c^2}, \frac{b(b+c)}{a^2 + b^2 + 3bc + c^2}, \frac{c(b+c)}{a^2 + b^2 + 3bc + c^2} \right\}$$

Dessin = Dessin $\cup \{I_2\} = \{A, B, C, G, I_1, I_2, J, K, L_1, L_2, L_3, L_0\}$

Détermination du point I_2 :

Soit I_2 le point $(AG) \cap (JL_0)$. Le point I_2 est composé.

Comme $I_2 \in (AG)$, on a, en choisissant l'inconnue ν_1

$$\overrightarrow{OI_2} = \nu_1 \overrightarrow{OA} + (1 - \nu_1) \overrightarrow{OG}$$

On déduit:

$$\overrightarrow{OI_2} = c(1) \overrightarrow{OA} + c(2) \overrightarrow{OB} + c(3) \overrightarrow{OC}$$

avec

$$\begin{aligned} c(1) &= \frac{1 + 2\nu_1}{3} \\ c(2) &= \frac{1 - \nu_1}{3} \\ c(3) &= \frac{1 - \nu_1}{3} \end{aligned}$$

Comme $I_2 \in (JL_0)$, on a, en choisissant l'inconnue μ_1

$$\overrightarrow{OI_2} = \mu_1 \overrightarrow{OJ} + (1 - \mu_1) \overrightarrow{OL_0}$$

On déduit:

$$\overrightarrow{OI_2} = d(1) \overrightarrow{OA} + d(2) \overrightarrow{OB} + d(3) \overrightarrow{OC}$$

avec

$$\begin{aligned} d(1) &= \frac{a(a^2 + ab + ac - ab\mu_1 + b^2\mu_1 - ac\mu_1 + c^2\mu_1)}{(a+b+c)(a^2 + b^2 + c^2)} \\ d(2) &= \frac{b(ab + b^2 + bc + a^2\mu_1 - ab\mu_1 - bc\mu_1 + c^2\mu_1)}{(a+b+c)(a^2 + b^2 + c^2)} \\ d(3) &= \frac{c(ac + bc + c^2 + a^2\mu_1 + b^2\mu_1 - ac\mu_1 - bc\mu_1)}{(a+b+c)(a^2 + b^2 + c^2)} \end{aligned}$$

La résolution du système linéaire d'inconnues ν_1, μ_1 donne

$$\nu_1 = \frac{(a-b)(a-c)}{a^2 - 2bc - a(b+c)} \quad \mu_1 = \frac{(b+c)(a+b+c)}{-a^2 + 2bc + a(b+c)}$$

On déduit que:

$$I_2 = \left\{ \frac{a(a-b-c)}{a^2 - ab - ac - 2bc}, \frac{bc}{-a^2 + ab + ac + 2bc}, \frac{bc}{-a^2 + ab + ac + 2bc} \right\}$$

Dessin = Dessin $\cup \{I_3\} = \{A, B, C, G, I_1, I_2, I_3, J, K, L_1, L_2, L_3, L_0\}$

Détermination du point I_3 :

Soit I_3 le point $(AL_0) \cap (GJ)$. Le point I_3 est composé.

Comme $I_3 \in (AL_0)$, on a, en choisissant l'inconnue ν_1

$$\overrightarrow{OI_3} = \nu_1 \overrightarrow{OA} + (1 - \nu_1) \overrightarrow{OL_0}$$

On déduit:

$$\overrightarrow{OI_3} = e(1) \overrightarrow{OA} + e(2) \overrightarrow{OB} + e(3) \overrightarrow{OC}$$

avec

$$\begin{aligned} e(1) &= \frac{a^2 + b^2\nu_1 + c^2\nu_1}{a^2 + b^2 + c^2} \\ e(2) &= \frac{b^2(1 - \nu_1)}{a^2 + b^2 + c^2} \end{aligned}$$

$$e(3) = \frac{c^2 (1 - \nu_1)}{a^2 + b^2 + c^2}$$

Comme $I_3 \in (GJ)$, on a, en choisissant l'inconnue μ_1

$$\overrightarrow{OI_3} = \mu_1 \overrightarrow{OG} + (1 - \mu_1) \overrightarrow{OJ}$$

On déduit:

$$\overrightarrow{OI_3} = f(1) \overrightarrow{OA} + f(2) \overrightarrow{OB} + f(3) \overrightarrow{OC}$$

avec

$$f(1) = \frac{3a - 2a\mu_1 + b\mu_1 + c\mu_1}{3(a + b + c)}$$

$$f(2) = \frac{3b + a\mu_1 - 2b\mu_1 + c\mu_1}{3(a + b + c)}$$

$$f(3) = \frac{3c + a\mu_1 + b\mu_1 - 2c\mu_1}{3(a + b + c)}$$

La résolution du système linéaire d'inconnues ν_1, μ_1 donne

$$\nu_1 = \frac{-(a - b)(a - c)}{b^2 - bc + c^2 + a(b + c)} \quad \mu_1 = \frac{-3bc}{b^2 - bc + c^2 + a(b + c)}$$

On déduit que:

$$I_3 = \left\{ \frac{ab + ac - bc}{ab + b^2 + ac - bc + c^2}, \frac{b^2}{ab + b^2 + ac - bc + c^2}, \frac{c^2}{ab + b^2 + ac - bc + c^2} \right\}$$

Dessin = Dessin $\cup \{I_4\} = \{A, B, C, G, I_1, I_2, I_3, I_4, J, K, L_1, L_2, L_3, L_0\}$

Détermination du point I_4 :

Soit I_4 le point $(AL_0) \cap (GK)$. Le point I_4 est composé.

Comme $I_4 \in (AL_0)$, on a, en choisissant l'inconnue ν_1

$$\overrightarrow{OI_4} = \nu_1 \overrightarrow{OA} + (1 - \nu_1) \overrightarrow{OL_0}$$

On déduit:

$$\overrightarrow{OI_4} = g(1) \overrightarrow{OA} + g(2) \overrightarrow{OB} + g(3) \overrightarrow{OC}$$

avec

$$g(1) = \frac{a^2 + b^2\nu_1 + c^2\nu_1}{a^2 + b^2 + c^2}$$

$$g(2) = \frac{b^2(1 - \nu_1)}{a^2 + b^2 + c^2}$$

$$g(3) = \frac{c^2(1 - \nu_1)}{a^2 + b^2 + c^2}$$

Comme $I_4 \in (GK)$, on a, en choisissant l'inconnue μ_1

$$\overrightarrow{OI_4} = \mu_1 \overrightarrow{OG} + (1 - \mu_1) \overrightarrow{OK}$$

On déduit:

$$\overrightarrow{OI_4} = h(1) \overrightarrow{OA} + h(2) \overrightarrow{OB} + h(3) \overrightarrow{OC}$$

avec

$$\begin{aligned} h(1) &= \frac{3a^4 - 3a^2b^2 - 3a^2c^2 - 2a^4\mu_1 + a^2b^2\mu_1 + b^4\mu_1 + a^2c^2\mu_1 - 2b^2c^2\mu_1 + c^4\mu_1}{3(a-b-c)(a+b-c)(a-b+c)(a+b+c)} \\ h(2) &= \frac{-3a^2b^2 + 3b^4 - 3b^2c^2 + a^4\mu_1 + a^2b^2\mu_1 - 2b^4\mu_1 - 2a^2c^2\mu_1 + b^2c^2\mu_1 + c^4\mu_1}{3(a-b-c)(a+b-c)(a-b+c)(a+b+c)} \\ h(3) &= \frac{-3a^2c^2 - 3b^2c^2 + 3c^4 + a^4\mu_1 - 2a^2b^2\mu_1 + b^4\mu_1 + a^2c^2\mu_1 + b^2c^2\mu_1 - 2c^4\mu_1}{3(a-b-c)(a+b-c)(a-b+c)(a+b+c)} \end{aligned}$$

La résolution du système linéaire d'inconnues ν_1, μ_1 donne

$$\nu_1 = \frac{2(a-b)(a+b)(a-c)(a+c)}{a^4 - 2a^2b^2 + b^4 - 2a^2c^2 + 4b^2c^2 + c^4} \quad \mu_1 = \frac{6b^2c^2}{a^4 - 2a^2b^2 + b^4 - 2a^2c^2 + 4b^2c^2 + c^4}$$

On déduit que:

$$I_4 = \left\{ \frac{a^4 - a^2b^2 - a^2c^2 + 2b^2c^2}{a^4 - 2a^2b^2 + b^4 - 2a^2c^2 + 4b^2c^2 + c^4}, \frac{b^2(-a^2 + b^2 + c^2)}{a^4 - 2a^2b^2 + b^4 - 2a^2c^2 + 4b^2c^2 + c^4}, \frac{c^2(-a^2 + b^2 + c^2)}{a^4 - 2a^2b^2 + b^4 - 2a^2c^2 + 4b^2c^2 + c^4} \right\}$$

Dessin = Dessin $\cup \{I_5\} = \{A, B, C, G, I_1, I_2, I_3, I_4, I_5, J, K, L_1, L_2, L_3, L_0\}$

Détermination du point I_5 :

Soit I_5 le point $(AL_0) \cap (JK)$. Le point I_5 est composé.

Comme $I_5 \in (AL_0)$, on a, en choisissant l'inconnue ν_1

$$\overrightarrow{OI_5} = \nu_1 \overrightarrow{OA} + (1 - \nu_1) \overrightarrow{OL_0}$$

On déduit:

$$\overrightarrow{OI_5} = i(1) \overrightarrow{OA} + i(2) \overrightarrow{OB} + i(3) \overrightarrow{OC}$$

avec

$$\begin{aligned} i(1) &= \frac{a^2 + b^2\nu_1 + c^2\nu_1}{a^2 + b^2 + c^2} \\ i(2) &= \frac{b^2(1 - \nu_1)}{a^2 + b^2 + c^2} \\ i(3) &= \frac{c^2(1 - \nu_1)}{a^2 + b^2 + c^2} \end{aligned}$$

Comme $I_5 \in (JK)$, on a, en choisissant l'inconnue μ_1

$$\overrightarrow{OI_5} = \mu_1 \overrightarrow{OJ} + (1 - \mu_1) \overrightarrow{OK}$$

On déduit:

$$\overrightarrow{OI_5} = j(1) \overrightarrow{OA} + j(2) \overrightarrow{OB} + j(3) \overrightarrow{OC}$$

avec

$$j(1) = \frac{a(a^3 - ab^2 - ac^2 - a^2b\mu_1 + b^3\mu_1 - a^2c\mu_1 + 2abc\mu_1 - b^2c\mu_1 - bc^2\mu_1 + c^3\mu_1)}{(a-b-c)(a+b-c)(a-b+c)(a+b+c)}$$

$$j(2) = \frac{b(-a^2b + b^3 - bc^2 + a^3\mu_1 - ab^2\mu_1 - a^2c\mu_1 + 2abc\mu_1 - b^2c\mu_1 - ac^2\mu_1 + c^3\mu_1)}{(a-b-c)(a+b-c)(a-b+c)(a+b+c)}$$

$$j(3) = \frac{c(-a^2c - b^2c + c^3 + a^3\mu_1 - a^2b\mu_1 - ab^2\mu_1 + b^3\mu_1 + 2abc\mu_1 - ac^2\mu_1 - bc^2\mu_1)}{(a-b-c)(a+b-c)(a-b+c)(a+b+c)}$$

La résolution du système linéaire d'inconnues ν_1, μ_1 donne

$$\nu_1 = \frac{2a(a-b)(a-c)}{a^3 - a^2b - ab^2 + b^3 - a^2c + 2abc + b^2c - ac^2 + bc^2 + c^3}$$

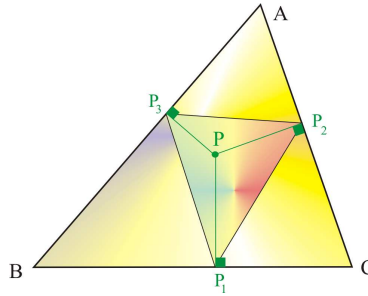
$$\mu_1 = \frac{2bc(b+c)}{a^3 - a^2b - ab^2 + b^3 - a^2c + 2abc + b^2c - ac^2 + bc^2 + c^3}$$

On déduit que:

$$I_5 = \left\{ \frac{a(a^2 - ab - ac + 2bc)}{a^3 - a^2b - ab^2 + b^3 - a^2c + 2abc + b^2c - ac^2 + bc^2 + c^3}, \right. \\ \left. \frac{b^2(-a + b + c)}{a^3 - a^2b - ab^2 + b^3 - a^2c + 2abc + b^2c - ac^2 + bc^2 + c^3}, \right. \\ \left. \frac{c^2(-a + b + c)}{a^3 - a^2b - ab^2 + b^3 - a^2c + 2abc + b^2c - ac^2 + bc^2 + c^3} \right\}$$

17.4 Triangle podaire et point de Lemoine

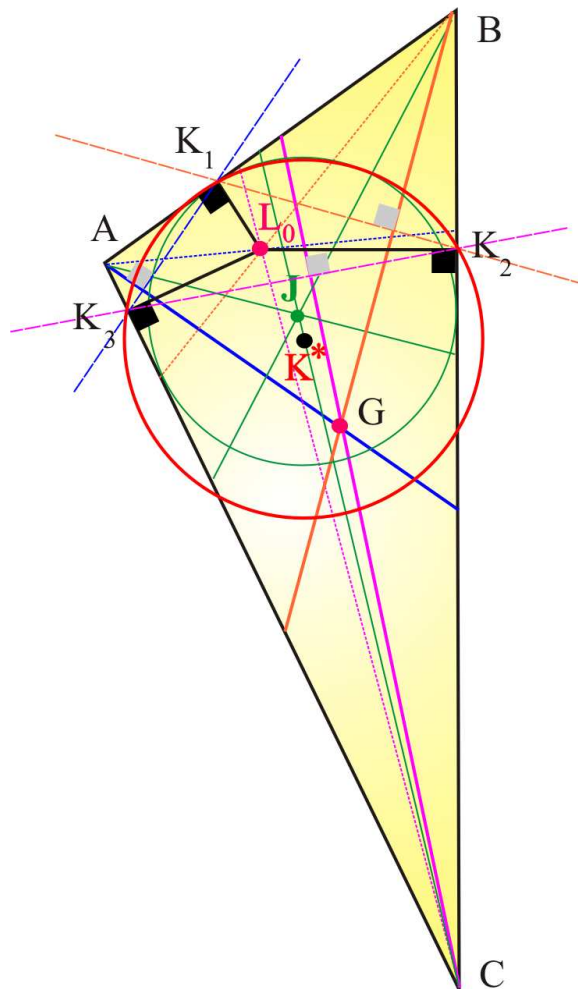
Soient ABC un triangle et P un point du plan ABC : le triangle $P_1P_2P_3$ formé par les projections orthogonales P_1, P_2, P_3 du point P sur les trois côtés du triangle est appelé le *triangle podaire* de P relativement au triangle ABC .



Exercice 17.4.1

Soient L_0 le point de Lemoine d'un triangle ABC , G le centre de gravité et K_1, K_2, K_3 le triangle podaire de L_0 relativement à ABC (les projetés orthogonaux respectifs de L_0 sur (AB) , (BC) , (AC) sont les points K_1, K_2, K_3).

1. Montrer que le centre de gravité du triangle $K_1K_2K_3$ est le point de Lemoine.
2. Calculer $L_0K_1^2$, $L_0K_2^2$, $L_0K_3^2$, $\overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{K_1K_3}$, $\overrightarrow{BG} \cdot \overrightarrow{K_1K_2}$, $\overrightarrow{CG} \cdot \overrightarrow{K_2K_3}$.
3. Calculer les coordonnées barycentriques du point de Lemoine L_0^* du triangle $K_1K_2K_3$.
4. Calculer les coordonnées barycentriques du centre K^* du cercle circonscrit au triangle $K_1K_2K_3$ et le rayon $R_{K_1K_2K_3}$ de ce cercle.


Solution:

Dessin = { A, B, C, G, L_0 }

Le repère barycentrique choisi est A, B, C .

Les points composés sont L_0, G .

Les coordonnées barycentriques des points composés:

$$L_0 = \left\{ \frac{a^2}{a^2 + b^2 + c^2}, \frac{b^2}{a^2 + b^2 + c^2}, \frac{c^2}{a^2 + b^2 + c^2} \right\}$$

$$G = \left\{ \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3} \right\}$$

Dessin = $\text{Dessin} \cup \{K_1, K_2, K_3\} = \{A, B, C, G, K_1, K_2, K_3, L_0\}$

Le repère barycentrique choisi est A, B, C .

Les points composés sont K_1, K_2, K_3 .

La projection du point L_0 sur la droite (AB) est le point K_1 de coordonnées barycentriques

$$K_1 = \left\{ \frac{3a^2 - b^2 + c^2}{2(a^2 + b^2 + c^2)}, \frac{-a^2 + 3b^2 + c^2}{2(a^2 + b^2 + c^2)}, 0 \right\}$$

La projection du point L_0 sur la droite (BC) est le point K_2 de coordonnées barycentriques

$$K_2 = \left\{ 0, \frac{a^2 + 3b^2 - c^2}{2(a^2 + b^2 + c^2)}, \frac{a^2 - b^2 + 3c^2}{2(a^2 + b^2 + c^2)} \right\}$$

La projection du point L_0 sur la droite (AC) est le point K_3 de coordonnées barycentriques

$$K_3 = \left\{ \frac{3a^2 + b^2 - c^2}{2(a^2 + b^2 + c^2)}, 0, \frac{-a^2 + b^2 + 3c^2}{2(a^2 + b^2 + c^2)} \right\}$$

La distance $L_0K_1^2$ est égale à

$$L_0K_1^2 = \frac{-BC^2 c^2 (a^2 - b^2 - c^2)}{2(a^2 + b^2 + c^2)^2} + \frac{AC^2 c^2 (a^2 - b^2 + c^2)}{2(a^2 + b^2 + c^2)^2} + \frac{AB^2 (a^2 - b^2 - c^2) (a^2 - b^2 + c^2)}{4(a^2 + b^2 + c^2)^2}$$

soit

$$L_0K_1^2 = \frac{(-a + b + c) (a + b - c) c^2 (a - b + c) (a + b + c)}{4(a^2 + b^2 + c^2)^2}$$

La distance $L_0K_2^2$ est égale à

$$L_0K_2^2 = \frac{a^2 AB^2 (a^2 + b^2 - c^2)}{2(a^2 + b^2 + c^2)^2} + \frac{a^2 AC^2 (a^2 - b^2 + c^2)}{2(a^2 + b^2 + c^2)^2} - \frac{BC^2 (a^2 + b^2 - c^2) (a^2 - b^2 + c^2)}{4(a^2 + b^2 + c^2)^2}$$

soit

$$L_0K_2^2 = \frac{a^2 (-a + b + c) (a + b - c) (a - b + c) (a + b + c)}{4(a^2 + b^2 + c^2)^2}$$

La distance $L_0K_3^2$ est égale à

$$L_0K_3^2 = \frac{AB^2 b^2 (a^2 + b^2 - c^2)}{2(a^2 + b^2 + c^2)^2} + \frac{AC^2 (a^2 - b^2 - c^2) (a^2 + b^2 - c^2)}{4(a^2 + b^2 + c^2)^2} + \frac{b^2 BC^2 (-a^2 + b^2 + c^2)}{2(a^2 + b^2 + c^2)^2}$$

soit

$$L_0K_3^2 = \frac{b^2 (a - b + c) (a + b - c) (-a + b + c) (a + b + c)}{4(a^2 + b^2 + c^2)^2}$$

La distance $K_1K_2^2$ est égale à

$$K_1K_2^2 = \frac{(-a + b + c) (a + b - c) (a - b + c) (a + b + c) (2a^2 - b^2 + 2c^2)}{4(a^2 + b^2 + c^2)^2}$$

La distance $K_2K_3^2$ est égale à

$$K_2K_3^2 = \frac{(-a + b + c) (a + b - c) (a - b + c) (a + b + c) (2a^2 + 2b^2 - c^2)}{4(a^2 + b^2 + c^2)^2}$$

La distance $K_1K_3^2$ est égale à

$$K_1K_3^2 = \frac{(a - b + c) (a + b - c) (-a + b + c) (a + b + c) (-a^2 + 2b^2 + 2c^2)}{4(a^2 + b^2 + c^2)^2}$$

Pour $M = \{x, y, 1 - x - y\}$, on a

$$\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{K_1K_3} = \frac{(a - b - c)(a + b - c)(a - b + c)(a + b + c)(-1 + x + 2y)}{4(a^2 + b^2 + c^2)}$$

$$\overrightarrow{BM} \cdot \overrightarrow{K_1K_2} = \frac{(a - b - c)(a + b - c)(a - b + c)(a + b + c)(-1 + 2x + y)}{4(a^2 + b^2 + c^2)}$$

$$\overrightarrow{CM} \cdot \overrightarrow{K_2K_3} = \frac{(-a + b + c)(a + b - c)(a - b + c)(a + b + c)(x - y)}{4(a^2 + b^2 + c^2)}$$

donc $\overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{K_1K_3} = 0$, $\overrightarrow{BG} \cdot \overrightarrow{K_1K_2} = 0$, $\overrightarrow{CG} \cdot \overrightarrow{K_2K_3} = 0$.

Dessin = $\text{Dessin} \cup \{G_1\} = \{A, B, C, G, G_1, K_1, K_2, K_3, L_0\}$

Le repère barycentrique choisi est A, B, C .

Les points composés sont G_1 .

Les coordonnées barycentriques du point composé G_1 s'obtiennent en faisant la moyenne des coordonnées barycentriques des points K_1, K_2, K_3 , soit:

$$G_1 = \left\{ \frac{a^2}{a^2 + b^2 + c^2}, \frac{b^2}{a^2 + b^2 + c^2}, \frac{c^2}{a^2 + b^2 + c^2} \right\}$$

On a donc $G_1 = L_0$.

Dessin = $\text{Dessin} \cup \{L_0^*\} = \{A, B, C, G, G_1, K_1, K_2, K_3, L_0, L_0^*\}$

Le repère barycentrique choisi est A, B, C .

Les points composés sont L_0^* .

Le point de Lemoine L_0^* du triangle $K_1K_2K_3$ a pour coordonnées barycentriques

$$L_0^* = \{K_2K_3^2, K_1K_3^2, K_1K_2^2\}$$

dans le repère $\{K_3, K_2, K_1\}$. En revenant aux coordonnées barycentriques des points K_1, K_2, K_3 , on déduit les coordonnées barycentriques du point composé:

$$L_0^* = \left\{ \frac{4a^4 + a^2b^2 - b^4 + a^2c^2 + 2b^2c^2 - c^4}{2(a^2 + b^2 + c^2)^2}, \right. \\ \frac{-a^4 + a^2b^2 + 4b^4 + 2a^2c^2 + b^2c^2 - c^4}{2(a^2 + b^2 + c^2)^2}, \\ \left. \frac{-a^4 + a^2b^2 + 4b^4 + 2a^2c^2 + b^2c^2 - c^4}{2(a^2 + b^2 + c^2)^2} \right\}$$

Dessin = $\text{Dessin} \cup \{K^*\} = \{A, B, C, G, G_1, K_1, K_2, K_3, K^*, L_0, L_0^*\}$

Le repère barycentrique choisi est A, B, C .

Les points composés sont K^* .

Les coordonnées barycentriques du centre K^* du cercle circonscrit au triangle $K_1K_2K_3$ sont, dans le repère $\{K_3, K_2, K_1\}$

$$K^* = \left\{ \frac{K_2K_3^2(-K_1K_2^2 - K_1K_3^2 + K_2K_3^2)}{K_1K_2^4 - 2K_1K_2^2K_1K_3^2 + K_1K_3^4 - 2K_1K_2^2K_2K_3^2 - 2K_1K_3^2K_2K_3^2 + K_2K_3^4}, \right. \\ \frac{K_1K_3^2(-K_1K_2^2 + K_1K_3^2 - K_2K_3^2)}{K_1K_2^4 - 2K_1K_2^2K_1K_3^2 + K_1K_3^4 - 2K_1K_2^2K_2K_3^2 - 2K_1K_3^2K_2K_3^2 + K_2K_3^4}, \\ \left. \frac{K_1K_2^2(K_1K_2^2 - K_1K_3^2 - K_2K_3^2)}{K_1K_2^4 - 2K_1K_2^2K_1K_3^2 + K_1K_3^4 - 2K_1K_2^2K_2K_3^2 - 2K_1K_3^2K_2K_3^2 + K_2K_3^4} \right\}$$

En revenant aux coordonnées barycentriques des points K_1, K_2, K_3 , on déduit les coordonnées barycentriques du point composé:

$$K^* = \left\{ \frac{4a^2 + b^2 + c^2}{6(a^2 + b^2 + c^2)}, \frac{a^2 + 4b^2 + c^2}{6(a^2 + b^2 + c^2)}, \frac{a^2 + b^2 + 4c^2}{6(a^2 + b^2 + c^2)} \right\}$$

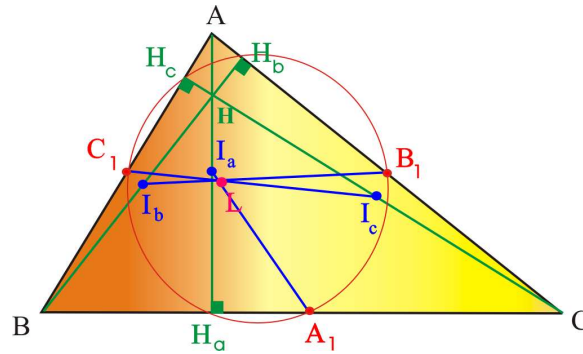
On a alors

$$R_{K_1 K_2 K_3}^2 = K^* K_1^2 = \frac{(2a^2 + 2b^2 - c^2)(2a^2 - b^2 + 2c^2)(-a^2 + 2b^2 + 2c^2)}{36(a^2 + b^2 + c^2)^2}$$

Exercice 17.4.2

Dans un triangle ABC , soient H_a, H_b, H_c les pieds des hauteurs issues des sommets A, B, C d'un triangle ABC , I_a, I_b, I_c les milieux des segments $[AH_a], [BH_b], [CH_c]$ et A_1, B_1, C_1 les milieux des segments $[BC], [AC], [AB]$.

Montrer que les droites $(I_a A_1), (I_b B_1), (I_c C_1)$ sont concourantes au point de Lemoine.



Solution:

Dessin = $\{A, B, C, H_a, H_b, H_c\}$

Le repère barycentrique choisi est A, B, C .

Les points composés sont H_a, H_b, H_c .

La projection du point A sur la droite (BC) est le point H_a de coordonnées barycentriques

$$H_a = \left\{ 0, \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2a^2}, \frac{a^2 - b^2 + c^2}{2a^2} \right\}$$

La projection du point B sur la droite (AC) est le point H_b de coordonnées barycentriques

$$H_b = \left\{ \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2b^2}, 0, \frac{-a^2 + b^2 + c^2}{2b^2} \right\}$$

La projection du point C sur la droite (AB) est le point H_c de coordonnées barycentriques

$$H_c = \left\{ \frac{a^2 - b^2 + c^2}{2c^2}, \frac{-a^2 + b^2 + c^2}{2c^2}, 0 \right\}$$

Dessin = $\text{Dessin} \cup \{A_1, B_1, C_1, I_a, I_b, I_c\} = \{A, A_1, B, B_1, C, C_1, H_a, H_b, H_c, I_a, I_b, I_c\}$

Le repère barycentrique choisi est A, B, C .

Les points composés sont $I_a, I_b, I_c, A_1, B_1, C_1$.

On déduit les coordonnées barycentriques des points composés:

$$\begin{aligned} I_a &= \left\{ \frac{1}{2}, \frac{a^2 + b^2 - c^2}{4a^2}, \frac{a^2 - b^2 + c^2}{4a^2} \right\} \\ I_b &= \left\{ \frac{a^2 + b^2 - c^2}{4b^2}, \frac{1}{2}, \frac{-a^2 + b^2 + c^2}{4b^2} \right\} \\ I_c &= \left\{ \frac{a^2 - b^2 + c^2}{4c^2}, \frac{-a^2 + b^2 + c^2}{4c^2}, \frac{1}{2} \right\} \\ A_1 &= \left\{ 0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\} \\ B_1 &= \left\{ \frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2} \right\} \\ C_1 &= \left\{ \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0 \right\} \end{aligned}$$

Dessin = Dessin $\cup \{I_1\} = \{A, A_1, B, B_1, C, C_1, H_a, H_b, H_c, I_1, I_a, I_b, I_c\}$

Détermination du point I_1 :

Soit I_1 le point $(I_a A_1) \cap (I_b B_1)$. Le point I_1 est composé.

Comme $I_1 \in (I_a A_1)$, on a, en choisissant l'inconnue ν_1

$$\overrightarrow{OI_1} = (1 - \nu_1) \overrightarrow{OA_1} + \nu_1 \overrightarrow{OI_a}$$

On déduit:

$$\overrightarrow{OI_1} = a(1) \overrightarrow{OA} + a(2) \overrightarrow{OB} + a(3) \overrightarrow{OC}$$

avec

$$\begin{aligned} a(1) &= \frac{\nu_1}{2} \\ a(2) &= \frac{2a^2 - a^2 \nu_1 + b^2 \nu_1 - c^2 \nu_1}{4a^2} \\ a(3) &= \frac{2a^2 - a^2 \nu_1 - b^2 \nu_1 + c^2 \nu_1}{4a^2} \end{aligned}$$

Comme $I_1 \in (I_b B_1)$, on a, en choisissant l'inconnue μ_1

$$\overrightarrow{OI_1} = (1 - \mu_1) \overrightarrow{OB_1} + \mu_1 \overrightarrow{OI_b}$$

On déduit:

$$\overrightarrow{OI_1} = b(1) \overrightarrow{OA} + b(2) \overrightarrow{OB} + b(3) \overrightarrow{OC}$$

avec

$$\begin{aligned} b(1) &= \frac{2b^2 + a^2 \mu_1 - b^2 \mu_1 - c^2 \mu_1}{4b^2} \\ b(2) &= \frac{\mu_1}{2} \\ b(3) &= \frac{2b^2 - a^2 \mu_1 - b^2 \mu_1 + c^2 \mu_1}{4b^2} \end{aligned}$$

La résolution du système linéaire d'inconnues ν_1, μ_1 donne

$$\nu_1 = \frac{2a^2}{a^2 + b^2 + c^2} \quad \mu_1 = \frac{2b^2}{a^2 + b^2 + c^2}$$

On déduit que:

$$I_1 = \left\{ \frac{a^2}{a^2 + b^2 + c^2}, \frac{b^2}{a^2 + b^2 + c^2}, \frac{c^2}{a^2 + b^2 + c^2} \right\}$$

Le point I_1 est donc le point de Lemoine.

17.5 Théorème de Grèbe

Exercice 17.5.1 construction du point de Lemoine

Soit ABC un triangle orné par le dessin de trois carrés ABN_1M_1 , BCN_2M_2 , CAN_3M_3 . On suppose que les trois carrés sont tous ouverts vers l'extérieur (vers l'intérieur) du triangle.

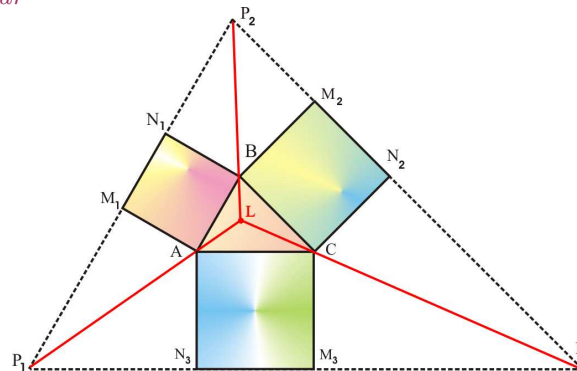
On pose $P_1 = (M_1N_1) \cap (M_3N_3)$, $P_2 = (M_1N_1) \cap (M_2N_2)$, $P_3 = (M_2N_2) \cap (M_3N_3)$. Montrer que les droites (AP_1) , (BP_2) , (CP_3) se coupent au point de Lemoine.

Solution:

On pose

$$\begin{aligned} \lambda &= -a^4 + 2a^2b^2 - b^4 + 2a^2c^2 + 2b^2c^2 - c^4 \\ &= (-a + b + c)(a + b - c)(a - b + c)(a + b + c) \end{aligned}$$

Carrés tournés vers l'extérieur



Dessin = $\{A, B, C, M_1, M_2, M_3\}$

Le repère barycentrique choisi est A, B, C .

Les points composés sont M_1, M_2, M_3 .

Les coordonnées barycentriques des points composés sont:

$$\begin{aligned} M_1 &= \left\{ \frac{a^2 + \sqrt{\lambda} - b^2 + c^2}{\sqrt{\lambda}}, \frac{-a^2 + b^2 + c^2}{\sqrt{\lambda}}, \frac{-2c^2}{\sqrt{\lambda}} \right\} \\ M_2 &= \left\{ \frac{-2a^2}{\sqrt{\lambda}}, \frac{a^2 + \sqrt{\lambda} + b^2 - c^2}{\sqrt{\lambda}}, \frac{a^2 - b^2 + c^2}{\sqrt{\lambda}} \right\} \end{aligned}$$

$$M_3 = \left\{ \frac{a^2 + b^2 - c^2}{\sqrt{\lambda}}, \frac{-2b^2}{\sqrt{\lambda}}, \frac{-a^2 + \sqrt{\lambda} + b^2 + c^2}{\sqrt{\lambda}} \right\}$$

Dessin = Dessin $\cup \{N_1, N_2, N_3\} = \{A, B, C, M_1, M_2, M_3, N_1, N_2, N_3\}$

On a les équations vectorielles

$$\vec{0} = -\vec{AB} + \vec{M_1N_1}$$

$$\vec{0} = -\vec{BC} + \vec{M_2N_2}$$

$$\vec{0} = -\vec{CA} + \vec{M_3N_3}$$

et, par découpages automatiques, le système linéaire

$$\vec{0} = \vec{OA} - \vec{OB} - \vec{OM_1} + \vec{ON_1}$$

$$\vec{0} = \vec{OB} - \vec{OC} - \vec{OM_2} + \vec{ON_2}$$

$$\vec{0} = -\vec{OA} + \vec{OC} - \vec{OM_3} + \vec{ON_3}$$

Le repère barycentrique choisi est A, B, C .

Les points composés sont N_1, N_2, N_3 .

On déduit les coordonnées barycentriques des points composés:

$$N_1 = \left\{ \frac{a^2 - b^2 + c^2}{\sqrt{\lambda}}, \frac{-a^2 + \sqrt{\lambda} + b^2 + c^2}{\sqrt{\lambda}}, \frac{-2c^2}{\sqrt{\lambda}} \right\}$$

$$N_2 = \left\{ \frac{-2a^2}{\sqrt{\lambda}}, \frac{a^2 + b^2 - c^2}{\sqrt{\lambda}}, \frac{a^2 + \sqrt{\lambda} - b^2 + c^2}{\sqrt{\lambda}} \right\}$$

$$N_3 = \left\{ \frac{a^2 + \sqrt{\lambda} + b^2 - c^2}{\sqrt{\lambda}}, \frac{-2b^2}{\sqrt{\lambda}}, \frac{-a^2 + b^2 + c^2}{\sqrt{\lambda}} \right\}$$

Dessin = Dessin $\cup \{P_1\} = \{A, B, C, M_1, M_2, M_3, N_1, N_2, N_3, P_1\}$

Détermination du point P_1 :

Soit P_1 le point $(M_1N_1) \cap (M_3N_3)$. Le point P_1 est composé.

Comme $P_1 \in (M_1N_1)$, on a, en choisissant l'inconnue ν_1

$$\vec{OP_1} = \nu_1 \vec{OM_1} + (1 - \nu_1) \vec{ON_1}$$

On déduit:

$$\vec{OP_1} = a(1) \vec{OA} + a(2) \vec{OB} + a(3) \vec{OC}$$

avec

$$a(1) = \frac{a^2 - b^2 + c^2 + \sqrt{\lambda} \nu_1}{\sqrt{\lambda}}$$

$$a(2) = \frac{-a^2 + \sqrt{\lambda} + b^2 + c^2 - \sqrt{\lambda} \nu_1}{\sqrt{\lambda}}$$

$$a(3) = \frac{-2c^2}{\sqrt{\lambda}}$$

Comme $P_1 \in (M_3N_3)$, on a, en choisissant l'inconnue μ_1

$$\vec{OP_1} = \mu_1 \vec{OM_3} + (1 - \mu_1) \vec{ON_3}$$

On déduit:

$$\overrightarrow{OP_1} = b(1) \overrightarrow{OA} + b(2) \overrightarrow{OB} + b(3) \overrightarrow{OC}$$

avec

$$\begin{aligned} b(1) &= \frac{a^2 + \sqrt{\lambda} + b^2 - c^2 - \sqrt{\lambda} \mu_1}{\sqrt{\lambda}} \\ b(2) &= \frac{-2b^2}{\sqrt{\lambda}} \\ b(3) &= \frac{-a^2 + b^2 + c^2 + \sqrt{\lambda} \mu_1}{\sqrt{\lambda}} \end{aligned}$$

La résolution du système linéaire d'inconnues ν_1, μ_1 donne

$$\nu_1 = \frac{-a^2 + \sqrt{\lambda} + 3b^2 + c^2}{\sqrt{\lambda}} \quad \mu_1 = \frac{a^2 - b^2 - 3c^2}{\sqrt{\lambda}}$$

On déduit que:

$$P_1 = \left\{ \frac{\sqrt{\lambda} + 2b^2 + 2c^2}{\sqrt{\lambda}}, \frac{-2b^2}{\sqrt{\lambda}}, \frac{-2c^2}{\sqrt{\lambda}} \right\}$$

Dessin = Dessin $\cup \{P_2\} = \{A, B, C, M_1, M_2, M_3, N_1, N_2, N_3, P_1, P_2\}$

Détermination du point P_2 :

Soit P_2 le point $(M_1N_1) \cap (M_2N_2)$. Le point P_2 est composé.

Comme $P_2 \in (M_1N_1)$, on a, en choisissant l'inconnue ν_1

$$\overrightarrow{OP_2} = \nu_1 \overrightarrow{OM_1} + (1 - \nu_1) \overrightarrow{ON_1}$$

On déduit:

$$\overrightarrow{OP_2} = c(1) \overrightarrow{OA} + c(2) \overrightarrow{OB} + c(3) \overrightarrow{OC}$$

avec

$$\begin{aligned} c(1) &= \frac{a^2 - b^2 + c^2 + \sqrt{\lambda} \nu_1}{\sqrt{\lambda}} \\ c(2) &= \frac{-a^2 + \sqrt{\lambda} + b^2 + c^2 - \sqrt{\lambda} \nu_1}{\sqrt{\lambda}} \\ c(3) &= \frac{-2c^2}{\sqrt{\lambda}} \end{aligned}$$

Comme $P_2 \in (M_2N_2)$, on a, en choisissant l'inconnue μ_1

$$\overrightarrow{OP_2} = \mu_1 \overrightarrow{OM_2} + (1 - \mu_1) \overrightarrow{ON_2}$$

On déduit:

$$\overrightarrow{OP_2} = d(1) \overrightarrow{OA} + d(2) \overrightarrow{OB} + d(3) \overrightarrow{OC}$$

avec

$$d(1) = \frac{-2a^2}{\sqrt{\lambda}}$$

$$d(2) = \frac{a^2 + b^2 - c^2 + \sqrt{\lambda} \mu_1}{\sqrt{\lambda}}$$

$$d(3) = \frac{a^2 - b^2 + c^2 - \sqrt{\lambda} (-1 + \mu_1)}{\sqrt{\lambda}}$$

La résolution du système linéaire d'inconnues ν_1, μ_1 donne

$$\nu_1 = \frac{-3a^2 + b^2 - c^2}{\sqrt{\lambda}} \quad \mu_1 = \frac{a^2 + \sqrt{\lambda} - b^2 + 3c^2}{\sqrt{\lambda}}$$

On déduit que:

$$P_2 = \left\{ \frac{-2a^2}{\sqrt{\lambda}}, \frac{2a^2 + \sqrt{\lambda} + 2c^2}{\sqrt{\lambda}}, \frac{-2c^2}{\sqrt{\lambda}} \right\}$$

Dessin = Dessin $\cup \{P_3\} = \{A, B, C, M_1, M_2, M_3, N_1, N_2, N_3, P_1, P_2, P_3\}$

Détermination du point P_3 :

Soit P_3 le point $(M_2N_2) \cap (M_3N_3)$. Le point P_3 est composé.

Comme $P_3 \in (M_2N_2)$, on a, en choisissant l'inconnue ν_1

$$\overrightarrow{OP_3} = \nu_1 \overrightarrow{OM_2} + (1 - \nu_1) \overrightarrow{ON_2}$$

On déduit:

$$\overrightarrow{OP_3} = e(1) \overrightarrow{OA} + e(2) \overrightarrow{OB} + e(3) \overrightarrow{OC}$$

avec

$$e(1) = \frac{-2a^2}{\sqrt{\lambda}}$$

$$e(2) = \frac{a^2 + b^2 - c^2 + \sqrt{\lambda} \nu_1}{\sqrt{\lambda}}$$

$$e(3) = \frac{a^2 - b^2 + c^2 - \sqrt{\lambda} (-1 + \nu_1)}{\sqrt{\lambda}}$$

Comme $P_3 \in (M_3N_3)$, on a, en choisissant l'inconnue μ_1

$$\overrightarrow{OP_3} = \mu_1 \overrightarrow{OM_3} + (1 - \mu_1) \overrightarrow{ON_3}$$

On déduit:

$$\overrightarrow{OP_3} = f(1) \overrightarrow{OA} + f(2) \overrightarrow{OB} + f(3) \overrightarrow{OC}$$

avec

$$f(1) = \frac{a^2 + b^2 - c^2 - \sqrt{\lambda} (-1 + \mu_1)}{\sqrt{\lambda}}$$

$$f(2) = \frac{-2b^2}{\sqrt{\lambda}}$$

$$f(3) = \frac{-a^2 + b^2 + c^2 + \sqrt{\lambda} \mu_1}{\sqrt{\lambda}}$$

La résolution du système linéaire d'inconnues ν_1, μ_1 donne

$$\nu_1 = \frac{-a^2 - 3b^2 + c^2}{\sqrt{\lambda}} \quad \mu_1 = \frac{3a^2 + \sqrt{\lambda} + b^2 - c^2}{\sqrt{\lambda}}$$

On déduit que:

$$P_3 = \left\{ \frac{-2a^2}{\sqrt{\lambda}}, \frac{-2b^2}{\sqrt{\lambda}}, \frac{2a^2 + \sqrt{\lambda} + 2b^2}{\sqrt{\lambda}} \right\}$$

Dessin = Dessin $\cup \{L_0\} = \{A, B, C, L_0, M_1, M_2, M_3, N_1, N_2, N_3, P_1, P_2, P_3\}$

Détermination du point L_0 :

Soit L_0 le point $(P_1A) \cap (P_2B)$. Le point L_0 est composé.

Comme $L_0 \in (P_1A)$, on a, en choisissant l'inconnue ν_1

$$\overrightarrow{OL_0} = (1 - \nu_1) \overrightarrow{OA} + \nu_1 \overrightarrow{OP_1}$$

On déduit:

$$\overrightarrow{OL_0} = g(1) \overrightarrow{OA} + g(2) \overrightarrow{OB} + g(3) \overrightarrow{OC}$$

avec

$$\begin{aligned} g(1) &= \frac{\sqrt{\lambda} + 2b^2\nu_1 + 2c^2\nu_1}{\sqrt{\lambda}} \\ g(2) &= \frac{-2b^2\nu_1}{\sqrt{\lambda}} \\ g(3) &= \frac{-2c^2\nu_1}{\sqrt{\lambda}} \end{aligned}$$

Comme $L_0 \in (P_2B)$, on a, en choisissant l'inconnue μ_1

$$\overrightarrow{OL_0} = (1 - \mu_1) \overrightarrow{OB} + \mu_1 \overrightarrow{OP_2}$$

On déduit:

$$\overrightarrow{OL_0} = h(1) \overrightarrow{OA} + h(2) \overrightarrow{OB} + h(3) \overrightarrow{OC}$$

avec

$$\begin{aligned} h(1) &= \frac{-2a^2\mu_1}{\sqrt{\lambda}} \\ h(2) &= \frac{\sqrt{\lambda} + 2a^2\mu_1 + 2c^2\mu_1}{\sqrt{\lambda}} \\ h(3) &= \frac{-2c^2\mu_1}{\sqrt{\lambda}} \end{aligned}$$

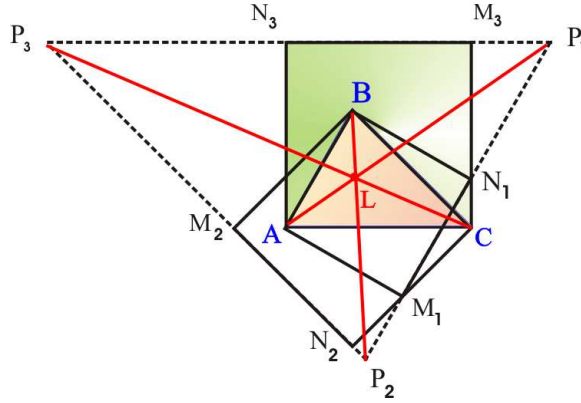
La résolution du système linéaire d'inconnues ν_1, μ_1 donne

$$\nu_1 = \frac{-\sqrt{\lambda}}{2(a^2 + b^2 + c^2)} \quad \mu_1 = \frac{-\sqrt{\lambda}}{2(a^2 + b^2 + c^2)}$$

On déduit que:

$$L_0 = \left\{ \frac{a^2}{a^2 + b^2 + c^2}, \frac{b^2}{a^2 + b^2 + c^2}, \frac{c^2}{a^2 + b^2 + c^2} \right\}$$

Carrés tournés vers l'intérieur (c'est à dire recouvrant le triangle ABC). Nous indiquons les coordonnées barycentriques des points étudiés précédemment.



Dessin = $\{A, B, C, M_1, M_2, M_3\}$

Le repère barycentrique choisi est A, B, C .

Les points composés sont M_1, M_2, M_3 .

Les coordonnées barycentriques des points composés sont:

$$M_1 = \left\{ \frac{-a^2 + \sqrt{\lambda} + b^2 - c^2}{\sqrt{\lambda}}, \frac{a^2 - b^2 - c^2}{\sqrt{\lambda}}, \frac{2c^2}{\sqrt{\lambda}} \right\}$$

$$M_2 = \left\{ \frac{2a^2}{\sqrt{\lambda}}, \frac{-a^2 + \sqrt{\lambda} - b^2 + c^2}{\sqrt{\lambda}}, \frac{-a^2 + b^2 - c^2}{\sqrt{\lambda}} \right\}$$

$$M_3 = \left\{ \frac{-a^2 - b^2 + c^2}{\sqrt{\lambda}}, \frac{2b^2}{\sqrt{\lambda}}, \frac{a^2 + \sqrt{\lambda} - b^2 - c^2}{\sqrt{\lambda}} \right\}$$

Dessin = $\text{Dessin} \cup \{N_1, N_2, N_3\} = \{A, B, C, M_1, M_2, M_3, N_1, N_2, N_3\}$

Le repère barycentrique choisi est A, B, C .

Les points composés sont N_1, N_2, N_3 .

On déduit les coordonnées barycentriques des points composés:

$$N_1 = \left\{ \frac{-a^2 + b^2 - c^2}{\sqrt{\lambda}}, \frac{a^2 + \sqrt{\lambda} - b^2 - c^2}{\sqrt{\lambda}}, \frac{2c^2}{\sqrt{\lambda}} \right\}$$

$$N_2 = \left\{ \frac{2a^2}{\sqrt{\lambda}}, \frac{-a^2 - b^2 + c^2}{\sqrt{\lambda}}, \frac{-a^2 + \sqrt{\lambda} + b^2 - c^2}{\sqrt{\lambda}} \right\}$$

$$N_3 = \left\{ \frac{-a^2 + \sqrt{\lambda} - b^2 + c^2}{\sqrt{\lambda}}, \frac{2b^2}{\sqrt{\lambda}}, \frac{a^2 - b^2 - c^2}{\sqrt{\lambda}} \right\}$$

Dessin = $\text{Dessin} \cup \{P_1\} = \{A, B, C, M_1, M_2, M_3, N_1, N_2, N_3, P_1\}$

Détermination du point P_1 :

Soit P_1 le point $(M_1N_1) \cap (M_3N_3)$. Le point P_1 est composé.

On obtient:

$$P_1 = \left\{ \frac{\sqrt{\lambda} - 2b^2 - 2c^2}{\sqrt{\lambda}}, \frac{2b^2}{\sqrt{\lambda}}, \frac{2c^2}{\sqrt{\lambda}} \right\}$$

Dessin = Dessin $\cup \{P_2\} = \{A, B, C, M_1, M_2, M_3, N_1, N_2, N_3, P_1, P_2\}$

Détermination du point P_2 :

Soit P_2 le point $(M_1N_1) \cap (M_2N_2)$. Le point P_2 est composé.

On obtient:

$$P_2 = \left\{ \frac{2a^2}{\sqrt{\lambda}}, \frac{-2a^2 + \sqrt{\lambda} - 2c^2}{\sqrt{\lambda}}, \frac{2c^2}{\sqrt{\lambda}} \right\}$$

Dessin = Dessin $\cup \{P_3\} = \{A, B, C, M_1, M_2, M_3, N_1, N_2, N_3, P_1, P_2, P_3\}$

Détermination du point P_3 :

Soit P_3 le point $(M_2N_2) \cap (M_3N_3)$. Le point P_3 est composé.

On obtient:

$$P_3 = \left\{ \frac{2a^2}{\sqrt{\lambda}}, \frac{2b^2}{\sqrt{\lambda}}, \frac{-2a^2 + \sqrt{\lambda} - 2b^2}{\sqrt{\lambda}} \right\}$$

Dessin = Dessin $\cup \{L_0\} = \{A, B, C, L_0, M_1, M_2, M_3, N_1, N_2, N_3, P_1, P_2, P_3\}$

Détermination du point L_0 :

Soit L_0 le point $(P_1A) \cap (P_2B)$. Le point L_0 est composé.

Comme $L_0 \in (P_1A)$, on a, en choisissant l'inconnue ν_1

$$\overrightarrow{OL_0} = (1 - \nu_1) \overrightarrow{OA} + \nu_1 \overrightarrow{OP_1}$$

On déduit:

$$\overrightarrow{OL_0} = g(1) \overrightarrow{OA} + g(2) \overrightarrow{OB} + g(3) \overrightarrow{OC}$$

avec

$$\begin{aligned} g(1) &= \frac{\sqrt{\lambda} - 2b^2\nu_1 - 2c^2\nu_1}{\sqrt{\lambda}} \\ g(2) &= \frac{2b^2\nu_1}{\sqrt{\lambda}} \\ g(3) &= \frac{2c^2\nu_1}{\sqrt{\lambda}} \end{aligned}$$

Comme $L_0 \in (P_2B)$, on a, en choisissant l'inconnue μ_1

$$\overrightarrow{OL_0} = (1 - \mu_1) \overrightarrow{OB} + \mu_1 \overrightarrow{OP_2}$$

On déduit:

$$\overrightarrow{OL_0} = h(1) \overrightarrow{OA} + h(2) \overrightarrow{OB} + h(3) \overrightarrow{OC}$$

avec

$$\begin{aligned} h(1) &= \frac{2a^2\mu_1}{\sqrt{\lambda}} \\ h(2) &= \frac{\sqrt{\lambda} - 2a^2\mu_1 - 2c^2\mu_1}{\sqrt{\lambda}} \\ h(3) &= \frac{2c^2\mu_1}{\sqrt{\lambda}} \end{aligned}$$

La résolution du système linéaire d'inconnues ν_1, μ_1 donne

$$\nu_1 = \frac{\sqrt{\lambda}}{2(a^2 + b^2 + c^2)} \quad \mu_1 = \frac{\sqrt{\lambda}}{2(a^2 + b^2 + c^2)}$$

On déduit que:

$$L_0 = \left\{ \frac{a^2}{a^2 + b^2 + c^2}, \frac{b^2}{a^2 + b^2 + c^2}, \frac{c^2}{a^2 + b^2 + c^2} \right\}$$

17.6 Une propriété d'extremum

Exercice 17.6.1 *Point de Lemoine*

Soit ABC un triangle et M un point de coordonnées barycentriques $\{x, y, 1 - x - y\}$, P_a, P_b, P_c les projections orthogonales du point M sur les côtés respectifs $(BC), (AC), (AB)$. Déterminer le point M de telle sorte que l'expression

$$P_a M^2 + P_b M^2 + P_c M^2$$

soit extrémale. Préciser alors sa valeur.

Même question avec l'expression

$$P_a P_b^2 + P_b P_c^2 + P_c P_a^2$$

Solution:

Etude de l'expression $P_a M^2 + P_b M^2 + P_c M^2$:

Dessin = $\{A, B, C, M, P_a, P_b, P_c\}$

Le repère barycentrique choisi est A, B, C .

Les points composés sont M, P_a, P_b, P_c .

On déduit les coordonnées barycentriques des points composés:

$$M = \{x, y, 1 - x - y\}$$

La projection du point M sur la droite (BC) est le point P_a de coordonnées barycentriques

$$P_a = \left\{ 0, \frac{a^2 x + b^2 x - c^2 x + 2a^2 y}{2a^2}, \frac{2a^2 - a^2 x - b^2 x + c^2 x - 2a^2 y}{2a^2} \right\}$$

La projection du point M sur la droite (AC) est le point P_b de coordonnées barycentriques

$$P_b = \left\{ \frac{2b^2 x + a^2 y + b^2 y - c^2 y}{2b^2}, 0, \frac{2b^2 - 2b^2 x - a^2 y - b^2 y + c^2 y}{2b^2} \right\}$$

La projection du point M sur la droite (AB) est le point P_c de coordonnées barycentriques

$$P_c = \left\{ \frac{a^2 - b^2 + c^2 - a^2 x + b^2 x + c^2 x - a^2 y + b^2 y - c^2 y}{2c^2}, \frac{-a^2 + b^2 + c^2 + a^2 x - b^2 x - c^2 x + a^2 y - b^2 y + c^2 y}{2c^2}, 0 \right\}$$

La distance $P_a M^2$ est égale à

$$P_a M^2 = \frac{AB^2 (a^2 + b^2 - c^2) x^2}{2a^2} + \frac{AC^2 (a^2 - b^2 + c^2) x^2}{2a^2} - \frac{BC^2 (a^2 + b^2 - c^2) (a^2 - b^2 + c^2) x^2}{4a^4}$$

soit

$$P_a M^2 = \frac{(-a+b+c)(a+b-c)(a-b+c)(a+b+c)x^2}{4a^2}$$

La distance $P_b M^2$ est égale à

$$P_b M^2 = \frac{AB^2(a^2+b^2-c^2)y^2}{2b^2} + \frac{BC^2(-a^2+b^2+c^2)y^2}{2b^2} - \frac{AC^2(a^2+b^2-c^2)(-a^2+b^2+c^2)y^2}{4b^4}$$

soit

$$P_b M^2 = \frac{(a-b+c)(a+b-c)(-a+b+c)(a+b+c)y^2}{4b^2}$$

La distance $P_c M^2$ est égale à

$$P_c M^2 = \frac{(a-b+c)(a+b-c)(-a+b+c)(a+b+c)(-1+x+y)^2}{4c^2}$$

On a donc

$$\begin{aligned} P_a M^2 + P_b M^2 + P_c M^2 \\ = K(a^2 b^2 - 2a^2 b^2 x + a^2 b^2 x^2 + b^2 c^2 x^2 - 2a^2 b^2 y + 2a^2 b^2 x y + a^2 b^2 y^2 + a^2 c^2 y^2) \end{aligned}$$

avec

$$K = \frac{(-a+b+c)(a+b-c)(a-b+c)(a+b+c)}{4a^2 b^2 c^2}$$

Cette quantité est extrémale lorsque les dérivées partielles en les variables x et y sont nulles, soit

$$\begin{cases} -a^2 + a^2 x + c^2 x + a^2 y = 0 \\ -b^2 + b^2 x + b^2 y + c^2 y = 0 \end{cases}$$

On déduit alors

$$x = \frac{a^2}{a^2 + b^2 + c^2} \quad y = \frac{b^2}{a^2 + b^2 + c^2}$$

donc

$$M = \left\{ \frac{a^2}{a^2 + b^2 + c^2}, \frac{b^2}{a^2 + b^2 + c^2}, \frac{c^2}{a^2 + b^2 + c^2} \right\}$$

qui est le point de Lemoine.

On a alors

$$P_a M^2 + P_b M^2 + P_c M^2 = \frac{(-a+b+c)(a+b-c)(a-b+c)(a+b+c)}{4(a^2 + b^2 + c^2)}$$

Etude de l'expression $P_a P_b^2 + P_b P_c^2 + P_c P_a^2$:

On a successivement

$$\begin{aligned} P_a P_b^2 &= K c^2 (b^2 x^2 + a^2 x y + b^2 x y - c^2 x y + a^2 y^2) \\ P_b P_c^2 &= K a^2 (b^2 - 2b^2 x + b^2 x^2 - a^2 y - b^2 y + c^2 y + a^2 x y + b^2 x y - c^2 x y + a^2 y^2) \\ P_c P_a^2 &= K b^2 (a^2 - a^2 x - b^2 x + c^2 x + b^2 x^2 - 2a^2 y + a^2 x y + b^2 x y - c^2 x y + a^2 y^2) \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned} & P_a P_b^2 + P_b P_c^2 + P_c P_a^2 \\ &= K (2 a^2 b^2 - 3 a^2 b^2 x - b^4 x + b^2 c^2 x + a^2 b^2 x^2 + b^4 x^2 + b^2 c^2 x^2 - a^4 y - 3 a^2 b^2 y + a^2 c^2 y \\ &+ a^4 x y + 2 a^2 b^2 x y + b^4 x y - c^4 x y + a^4 y^2 + a^2 b^2 y^2 + a^2 c^2 y^2) \end{aligned}$$

Cette quantité est extrémale lorsque les dérivées partielles en les variables x et y sont nulles, soit

$$\begin{cases} -3 a^2 b^2 - b^4 + b^2 c^2 + (2 a^2 b^2 + 2 b^4 + 2 b^2 c^2) x + (a^4 + 2 a^2 b^2 + b^4 - c^4) y = 0 \\ -a^4 - 3 a^2 b^2 + a^2 c^2 + (a^4 + 2 a^2 b^2 + b^4 - c^4) x + (2 a^4 + 2 a^2 b^2 + 2 a^2 c^2) y = 0 \end{cases}$$

On déduit alors

$$x = \frac{a^2}{a^2 + b^2 + c^2} \quad y = \frac{b^2}{a^2 + b^2 + c^2}$$

donc

$$M = \left\{ \frac{a^2}{a^2 + b^2 + c^2}, \frac{b^2}{a^2 + b^2 + c^2}, \frac{c^2}{a^2 + b^2 + c^2} \right\}$$

qui est encore le point de Lemoine.

On a alors

$$P_a P_b^2 + P_b P_c^2 + P_c P_a^2 = \frac{3 (-a + b + c) (a + b - c) (a - b + c) (a + b + c)}{4 (a^2 + b^2 + c^2)}$$

CHAPITRE

18

Cercles de Lemoine et de Tucker

18 Cercles de Lemoine et de Tucker

18.1 Cercle de Lemoine

Exercice 18.1.1 Cercle des 6 points

Soit ABC un triangle inscrit dans un cercle de centre Ω et K le point de rencontre des symédianes du triangle. La droite passant par K parallèle au côté BC rencontre le côté AB en P_1 et le côté AC en Q_3 ; la droite passant par K parallèle au côté AB rencontre le côté AC en P_3 et le côté BC en Q_2 ; la droite passant par K parallèle au côté AC rencontre le côté BC en P_2 et le côté AB en Q_1 .

1. Montrer que le cercle passant par P_1, P_2, P_3 passe également par les points Q_1, Q_2, Q_3 . Préciser la valeur du rayon de ce cercle et les coordonnées barycentriques de son centre K_{L_1} .
2. Montrer que ce centre K_{L_1} est le milieu du segment $K\Omega$.
3. Donner une condition nécessaire et suffisante pour qu'un point de coordonnées barycentriques $M = \{x, y, 1 - x - y\}$ soit situé sur ce cercle.
4. Montrer que la droite $A\Omega$ (resp. $B\Omega, C\Omega$) est orthogonale à la droite Q_1P_3 (resp. Q_2P_1, Q_3P_2).
5. Montrer que les segments Q_1P_3, Q_2P_1, Q_3P_2 ont même longueur.

Solution:

Nous déterminons les coordonnées barycentriques du point P_1 en introduisant un point intermédiaire W tel que la figure $BCWK$ soit un parallélogramme et obtenons alors le point P_1 comme intersection de la droite KW avec la droite AB . En changeant les notations, nous obtenons les coordonnées barycentriques de P_2, P_3 .

Dessin = $\{A, B, C, K, W\}$

On a les équations vectorielles

$$\vec{0} = -\vec{BC} + \vec{KW}$$

$$\vec{0} = \vec{KA}a^2 + \vec{KB}b^2 + \vec{KC}c^2$$

et, par découpages automatiques, le système linéaire

$$\vec{0} = \vec{OB} - \vec{OC} - \vec{OK} + \vec{OW}$$

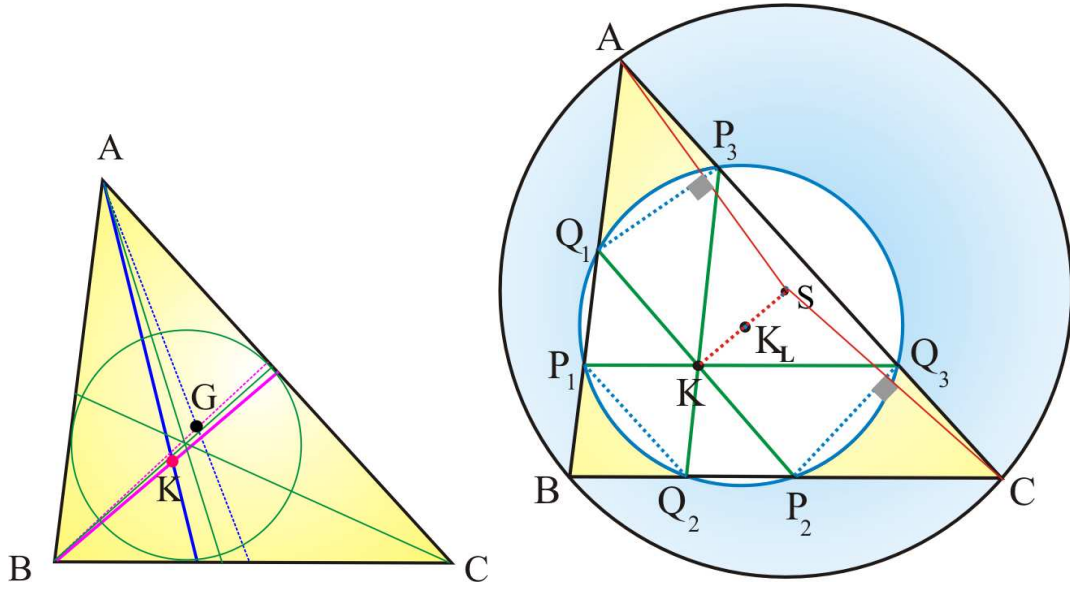
$$\vec{0} = a^2 \vec{OA} + b^2 \vec{OB} + c^2 \vec{OC} + (-a^2 - b^2 - c^2) \vec{OK}$$

Les points composés sont W, K .

On déduit les coordonnées barycentriques des points composés:

$$W = \left\{ \frac{a^2}{a^2 + b^2 + c^2}, -\frac{a^2 + c^2}{a^2 + b^2 + c^2}, \frac{a^2 + b^2 + 2c^2}{a^2 + b^2 + c^2} \right\}$$

$$K = \left\{ \frac{a^2}{a^2 + b^2 + c^2}, \frac{b^2}{a^2 + b^2 + c^2}, \frac{c^2}{a^2 + b^2 + c^2} \right\}$$



Dessin = $\text{Dessin} \cup \{P_1\} = \{A, B, C, K, W, P_1\}$

Détermination du point P_1 :

Soit P_1 le point $(AB) \cap (KW)$. Le point P_1 est composé.

Comme $P_1 \in (AB)$, on a, en choisissant les inconnues ν_1

$$\overrightarrow{OP_1} = \nu_1 \overrightarrow{OA} + (1 - \nu_1) \overrightarrow{OB}$$

Comme $P_1 \in (KW)$, on a, en choisissant les inconnues μ_1

$$\overrightarrow{OP_1} = \mu_1 \overrightarrow{OK} + (1 - \mu_1) \overrightarrow{OW}$$

On déduit:

$$\overrightarrow{OP_1} = b(1) \overrightarrow{OA} + b(2) \overrightarrow{OB} + b(3) \overrightarrow{OC}$$

avec

$$\begin{aligned} b(1) &= \frac{a^2}{a^2 + b^2 + c^2} \\ b(2) &= \frac{-a^2 - c^2 + a^2 \mu_1 + b^2 \mu_1 + c^2 \mu_1}{a^2 + b^2 + c^2} \\ b(3) &= \frac{a^2 + b^2 + 2c^2 - a^2 \mu_1 - b^2 \mu_1 - c^2 \mu_1}{a^2 + b^2 + c^2} \end{aligned}$$

La résolution du système linéaire d'inconnues ν_1, μ_1 donne

$$\nu_1 = \frac{a^2}{a^2 + b^2 + c^2} \quad \mu_1 = \frac{a^2 + b^2 + 2c^2}{a^2 + b^2 + c^2}$$

On déduit que:

$$P_1 = \left\{ \frac{a^2}{a^2 + b^2 + c^2}, \frac{b^2 + c^2}{a^2 + b^2 + c^2}, 0 \right\}$$

$$\text{Dessin} = \text{Dessin} \cup \{\Omega, P_1, P_2, P_3\} = \{A, B, C, K, \Omega, P_1, P_2, P_3, W, P_1\}$$

On déduit directement les coordonnées barycentriques des points composés Ω, P_1, P_2, P_3 :

$$P_2 = \left\{ 0, \frac{b^2}{a^2 + b^2 + c^2}, \frac{a^2 + c^2}{a^2 + b^2 + c^2} \right\}$$

$$P_3 = \left\{ \frac{a^2 + b^2}{a^2 + b^2 + c^2}, 0, \frac{c^2}{a^2 + b^2 + c^2} \right\}$$

$$\Omega = \{a^2 (a^2 - b^2 - c^2), b^2 (-a^2 + b^2 - c^2), -c^2 (a^2 + b^2 - c^2)\}$$

les coefficients étant normalisés en les divisant par

$$(a - b - c) (a + b - c) (a - b + c) (a + b + c)$$

Connaissant les coordonnées barycentriques des 3 points P_1, P_2, P_3 , il est aisé de déterminer les coordonnées du centre du cercle circonscrit à ces points. En utilisant les formules de changement de repère ou en déterminant directement un point équidistant des points P_1, P_2, P_3 , on trouve

$$K_{L_1} = \left\{ \frac{a^2 (a^4 - a^2 b^2 - a^2 c^2 - 2 b^2 c^2)}{(a - b - c) (a + b - c) (a - b + c) (a + b + c) (a^2 + b^2 + c^2)}, \right. \\ \frac{b^2 (a^2 b^2 - b^4 + 2 a^2 c^2 + b^2 c^2)}{(-a + b + c) (a + b - c) (a - b + c) (a + b + c) (a^2 + b^2 + c^2)}, \\ \left. \frac{c^2 (2 a^2 b^2 + a^2 c^2 + b^2 c^2 - c^4)}{(-a + b + c) (a + b - c) (a - b + c) (a + b + c) (a^2 + b^2 + c^2)} \right\}$$

La distance $K\Omega^2$ est égale à

$$K\Omega^2 = \frac{4 a^2 b^2 c^2 (a^4 - a^2 b^2 + b^4 - a^2 c^2 - b^2 c^2 + c^4)}{(-a + b + c) (a + b - c) (a - b + c) (a + b + c) (a^2 + b^2 + c^2)^2}$$

Le carré $R_{L_1}^2$ du rayon du cercle de Lemoine est la distance $K_{L_1} P_1^2$, soit

$$R_{L_1}^2 = \frac{a^2 b^2 c^2 (a^2 b^2 + a^2 c^2 + b^2 c^2)}{(-a + b + c) (a + b - c) (a - b + c) (a + b + c) (a^2 + b^2 + c^2)^2}$$

Un point $M = \{x, y, 1 - x - y\}$ appartient à ce cercle si et seulement si $M K_{L_1}^2 - R_{L_1}^2 = 0$, soit

$$0 = a^4 b^2 + a^2 b^4 - 2 a^4 b^2 x - 3 a^2 b^4 x - b^6 x - 2 a^2 b^2 c^2 x - b^4 c^2 x + a^4 b^2 x^2 + 2 a^2 b^4 x^2 \\ + b^6 x^2 + 2 a^2 b^2 c^2 x^2 + 2 b^4 c^2 x^2 + b^2 c^4 x^2 - a^6 y - 3 a^4 b^2 y - 2 a^2 b^4 y - a^4 c^2 y \\ - 2 a^2 b^2 c^2 y + a^6 x y + 3 a^4 b^2 x y + 3 a^2 b^4 x y + b^6 x y + a^4 c^2 x y \\ + 2 a^2 b^2 c^2 x y + b^4 c^2 x y - a^2 c^4 x y - b^2 c^4 x y - c^6 x y + a^6 y^2 + 2 a^4 b^2 y^2 \\ + a^2 b^4 y^2 + 2 a^4 c^2 y^2 + 2 a^2 b^2 c^2 y^2 + a^2 c^4 y^2$$

Dessin = Dessin $\cup \{J\} = \{A, B, C, J, K, \Omega, P_1, P_2, P_3, W, P_1\}$

Soit J le milieu du segment $K\Omega$. On a l'équation vectorielle

$$\vec{0} = \frac{\vec{JK}}{2} + \frac{\vec{J\Omega}}{2}$$

et, par découpages automatiques, le système linéaire

$$\vec{0} = -\vec{OJ} + \frac{\vec{OK}}{2} + \frac{\vec{O\Omega}}{2}$$

Tenant compte des points composés précédents, on déduit:

$$J = \{a^2 (a^4 - a^2 b^2 - a^2 c^2 - 2 b^2 c^2), b^2 (-a^2 b^2 + b^4 - 2 a^2 c^2 - b^2 c^2), c^2 (-2 a^2 b^2 - a^2 c^2 - b^2 c^2 + c^4)\}$$

les coefficients étant normalisés en les divisant par

$$(a - b - c) (a + b - c) (a - b + c) (a + b + c) (a^2 + b^2 + c^2)$$

On a donc $J = K_{L_1}$.

Dessin = Dessin $\cup \{Q_1, Q_2, Q_3\} = \{A, B, C, J, K, \Omega, P_1, P_2, P_3, Q_1, Q_2, Q_3, W, P_1\}$

On vérifie rapidement que Q_1 appartient au cercle passant par P_1, P_2, P_3 en calculant la distance $K_{L_1}Q_1$.

On peut également déterminer directement le point Q_1 en utilisant la formule traduisant l'appartenance d'un point $\{x, y, 1 - x - y\}$ à ce cercle. En effet, un point situé sur AB a pour coordonnées barycentriques normalisées $\{x, 1 - x, 0\}$ et la condition se résume alors à

$$c^2 (-a^2 + a^2 x + b^2 x + c^2 x) (-a^2 - c^2 + a^2 x + b^2 x + c^2 x) = 0$$

impliquant que $\{x, 1 - x, 0\}$ prend les valeurs

$$\{x, 1 - x, 0\} = \left\{ \frac{a^2}{a^2 + b^2 + c^2}, \frac{b^2 + c^2}{a^2 + b^2 + c^2}, 0 \right\}$$

$$\{x, 1 - x, 0\} = \left\{ \frac{a^2 + c^2}{a^2 + b^2 + c^2}, \frac{b^2}{a^2 + b^2 + c^2}, 0 \right\}$$

Pour les points composés Q_1, Q_2, Q_3 , on obtient donc:

$$Q_1 = \left\{ \frac{a^2 + c^2}{a^2 + b^2 + c^2}, \frac{b^2}{a^2 + b^2 + c^2}, 0 \right\}$$

$$Q_2 = \left\{ 0, \frac{a^2 + b^2}{a^2 + b^2 + c^2}, \frac{c^2}{a^2 + b^2 + c^2} \right\}$$

$$Q_3 = \left\{ \frac{a^2}{a^2 + b^2 + c^2}, 0, \frac{b^2 + c^2}{a^2 + b^2 + c^2} \right\}$$

Formons le produit scalaire

$$(-2) \vec{A\Omega} \cdot \vec{Q_1P_3} = \delta(A, Q_1, \Omega, P_3) = \Omega P_3^2 - \Omega Q_1^2 - A P_3^2 + A Q_1^2$$

On a $(-2) \overrightarrow{A\Omega} \cdot \overrightarrow{Q_1P_3} = \Omega P_3^2 - \Omega Q_1^2 - MP_3^2 + MQ_1^2$ avec

$$\begin{aligned} AQ_1^2 &= \frac{b^4 c^2}{(a^2 + b^2 + c^2)^2} \\ Q_1\Omega^2 &= \frac{b^2 c^2 (2a^6 + 2a^2 b^4 + a^4 c^2 - 2a^2 b^2 c^2 + b^4 c^2 - 2b^2 c^4 + c^6)}{(a-b+c)(a+b-c)(-a+b+c)(a+b+c)(a^2+b^2+c^2)^2} \\ \Omega P_3^2 &= \frac{b^2 c^2 (2a^6 + a^4 b^2 + b^6 - 2a^2 b^2 c^2 - 2b^4 c^2 + 2a^2 c^4 + b^2 c^4)}{(-a+b+c)(a+b-c)(a-b+c)(a+b+c)(a^2+b^2+c^2)^2} \\ P_3A^2 &= \frac{b^2 c^4}{(a^2 + b^2 + c^2)^2} \end{aligned}$$

Il suit que

$$(-2) \overrightarrow{A\Omega} \cdot \overrightarrow{Q_1P_3} = 0$$

La distance $P_1Q_2^2$ est égale à

$$\begin{aligned} P_1Q_2^2 &= \frac{a^2 AC^2 c^2}{(a^2 + b^2 + c^2)^2} + \frac{a^2 AB^2 (a-c)(a+c)}{(a^2 + b^2 + c^2)^2} - \frac{BC^2 (a-c) c^2 (a+c)}{(a^2 + b^2 + c^2)^2} \\ &= \frac{a^2 b^2 c^2}{(a^2 + b^2 + c^2)^2} \end{aligned}$$

La distance $P_2Q_3^2$ est égale à

$$\begin{aligned} P_2Q_3^2 &= \frac{a^2 AB^2 b^2}{(a^2 + b^2 + c^2)^2} + \frac{a^2 AC^2 (a-b)(a+b)}{(a^2 + b^2 + c^2)^2} - \frac{(a-b) b^2 (a+b) BC^2}{(a^2 + b^2 + c^2)^2} \\ &= \frac{a^2 b^2 c^2}{(a^2 + b^2 + c^2)^2} \end{aligned}$$

La distance $P_3Q_1^2$ est égale à

$$\begin{aligned} P_3Q_1^2 &= \frac{b^2 BC^2 c^2}{(a^2 + b^2 + c^2)^2} + \frac{AB^2 b^2 (b-c)(b+c)}{(a^2 + b^2 + c^2)^2} - \frac{AC^2 (b-c) c^2 (b+c)}{(a^2 + b^2 + c^2)^2} \\ &= \frac{a^2 b^2 c^2}{(a^2 + b^2 + c^2)^2} \end{aligned}$$

18.2 Cercle de Tucker

Exercice 18.2.1

Soit ABC un triangle, Ω le centre du cercle circonscrit et L_0 le point de Lemoine. Soit k un entier différent de -1 , $h_{L_0,k}$ l'homothétie de centre L_0 et de rapport k . On pose:

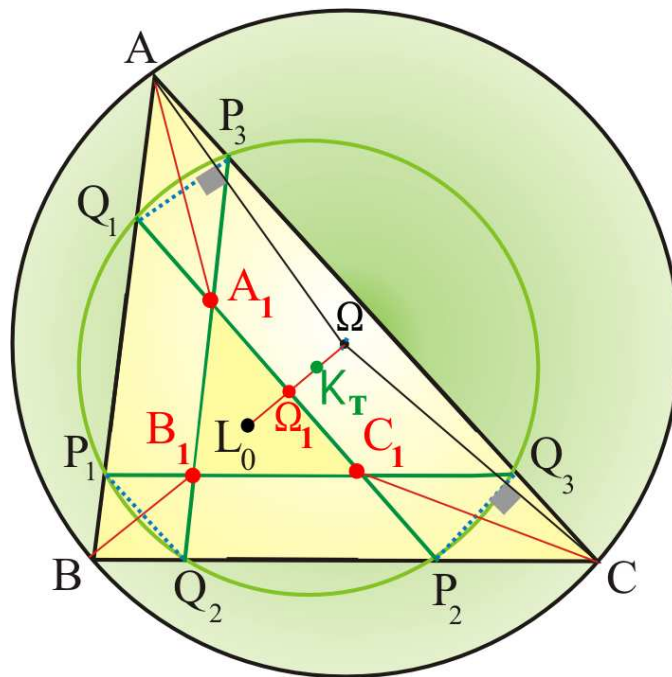
$$A_1 = h_{L_0,k}(A) \quad B_1 = h_{L_0,k}(B) \quad C_1 = h_{L_0,k}(C) \quad \Omega_1 = h_{L_0,k}(\Omega)$$

La droite B_1C_1 coupe la droite AB en P_1 et la droite AC en Q_3 .

La droite C_1A_1 coupe la droite BC en P_2 et la droite AB en Q_1 .

La droite A_1B_1 coupe la droite AC en P_3 et la droite BC en Q_2 .

1. Montrer que le cercle $\Gamma_{T,k}$ passant par P_1, P_2, P_3 passe également par les points Q_1, Q_2, Q_3 . Préciser la valeur du rayon de ce cercle et les coordonnées barycentriques de son centre K_T (pour $k \neq -1$, $\Gamma_{T,k}$ est appelé cercle de Tucker du triangle ABC).
2. Donner une condition nécessaire et suffisante pour qu'un point de coordonnées barycentriques $M = \{x, y, 1 - x - y\}$ soit situé sur le cercle de Tucker.
3. Montrer que ce centre K_T est le milieu du segment $\Omega\Omega_1$.
4. Montrer que les segments Q_1P_3, Q_2P_1, Q_3P_2 ont même longueur.
5. Montrer que la droite $A\Omega$ (resp. $B\Omega, C\Omega$) est orthogonale à la droite Q_1P_3 (resp. Q_2P_1, Q_3P_2).

**Solution:**

Dessin = $\{A, A_1, B, B_1, C, C_1, \Omega, L_0\}$

Les points purs choisis sont A, B, C .

Les points composés sont $C_1, A_1, B_1, \Omega, L_0$.

Les coordonnées barycentriques des points composés sont:

$$\begin{aligned}
 L_0 &= \left\{ \frac{a^2}{a^2 + b^2 + c^2}, \frac{b^2}{a^2 + b^2 + c^2}, \frac{c^2}{a^2 + b^2 + c^2} \right\} \\
 \Omega &= \left\{ \frac{a^2 (a^2 - b^2 - c^2)}{(a - b - c)(a + b - c)(a - b + c)(a + b + c)}, \right. \\
 &\quad \frac{b^2 (-a^2 + b^2 - c^2)}{(-a + b - c)(a + b - c)(-a + b + c)(a + b + c)}, \\
 &\quad \left. \frac{c^2 (a^2 + b^2 - c^2)}{(-a + b + c)(a + b - c)(a - b + c)(a + b + c)} \right\} \\
 A_1 &= \left\{ \frac{a^2 + b^2 k + c^2 k}{a^2 + b^2 + c^2}, \frac{b^2 (1 - k)}{a^2 + b^2 + c^2}, \frac{c^2 (1 - k)}{a^2 + b^2 + c^2} \right\} \\
 B_1 &= \left\{ \frac{a^2 (1 - k)}{a^2 + b^2 + c^2}, \frac{b^2 + a^2 k + c^2 k}{a^2 + b^2 + c^2}, \frac{c^2 (1 - k)}{a^2 + b^2 + c^2} \right\} \\
 C_1 &= \left\{ \frac{a^2 (1 - k)}{a^2 + b^2 + c^2}, \frac{b^2 (1 - k)}{a^2 + b^2 + c^2}, \frac{c^2 + a^2 k + b^2 k}{a^2 + b^2 + c^2} \right\}
 \end{aligned}$$

Calculons le vecteur $\overrightarrow{A_1 B_1}$. On a:

$$\overrightarrow{A_1 B_1} = a(1) \overrightarrow{OA} + a(2) \overrightarrow{OB} + a(3) \overrightarrow{OC}$$

avec

$$a(1) = -k \quad a(2) = k \quad a(3) = 0$$

Calculons le vecteur $\overrightarrow{AB}$. On a:

$$\overrightarrow{AB} = b(1) \overrightarrow{OA} + b(2) \overrightarrow{OB} + b(3) \overrightarrow{OC}$$

avec

$$b(1) = -1 \quad b(2) = 1 \quad b(3) = 0$$

On a ainsi

$$\overrightarrow{A_1 B_1} = k \overrightarrow{AB}$$

Dessin = Dessin $\cup \{P_1\} = \{A, A_1, B, B_1, C, C_1, \Omega, L_0, P_1\}$

Détermination du point P_1 :

Soit P_1 le point $(AB) \cap (B_1 C_1)$. Le point P_1 est composé.

Comme $P_1 \in (AB)$, on a, en choisissant l'inconnue ν_1

$$\overrightarrow{OP_1} = \nu_1 \overrightarrow{OA} + (1 - \nu_1) \overrightarrow{OB}$$

Comme $P_1 \in (B_1 C_1)$, on a, en choisissant l'inconnue μ_1

$$\overrightarrow{OP_1} = \mu_1 \overrightarrow{OB_1} + (1 - \mu_1) \overrightarrow{OC_1}$$

On déduit:

$$\overrightarrow{OP_1} = d(1) \overrightarrow{OA} + d(2) \overrightarrow{OB} + d(3) \overrightarrow{OC}$$

avec

$$\begin{aligned} d(1) &= \frac{a^2 (1 - k)}{a^2 + b^2 + c^2} \\ d(2) &= \frac{b^2 - b^2 k + a^2 k \mu_1 + b^2 k \mu_1 + c^2 k \mu_1}{a^2 + b^2 + c^2} \\ d(3) &= \frac{c^2 + a^2 k + b^2 k - a^2 k \mu_1 - b^2 k \mu_1 - c^2 k \mu_1}{a^2 + b^2 + c^2} \end{aligned}$$

La résolution du système linéaire d'inconnues ν_1, μ_1 donne

$$\nu_1 = \frac{a^2 (1 - k)}{a^2 + b^2 + c^2} \quad \mu_1 = \frac{c^2 + (a^2 + b^2) k}{(a^2 + b^2 + c^2) k}$$

On déduit que:

$$P_1 = \left\{ \frac{a^2 (1 - k)}{a^2 + b^2 + c^2}, \frac{b^2 + c^2 + a^2 k}{a^2 + b^2 + c^2}, 0 \right\}$$

Dessin = Dessin $\cup \{P_2\} = \{A, A_1, B, B_1, C, C_1, \Omega, L_0, P_1, P_2\}$

Détermination du point P_2 :

Soit P_2 le point $(BC) \cap (C_1A_1)$. Le point P_2 est composé.

Comme $P_2 \in (BC)$, on a, en choisissant l'inconnue ν_1

$$\overrightarrow{OP_2} = \nu_1 \overrightarrow{OB} + (1 - \nu_1) \overrightarrow{OC}$$

Comme $P_2 \in (C_1A_1)$, on a, en choisissant l'inconnue μ_1

$$\overrightarrow{OP_2} = (1 - \mu_1) \overrightarrow{OA_1} + \mu_1 \overrightarrow{OC_1}$$

On déduit:

$$\overrightarrow{OP_2} = f(1) \overrightarrow{OA} + f(2) \overrightarrow{OB} + f(3) \overrightarrow{OC}$$

avec

$$\begin{aligned} f(1) &= \frac{a^2 + b^2 k + c^2 k - a^2 k \mu_1 - b^2 k \mu_1 - c^2 k \mu_1}{a^2 + b^2 + c^2} \\ f(2) &= \frac{b^2 (1 - k)}{a^2 + b^2 + c^2} \\ f(3) &= \frac{c^2 - c^2 k + a^2 k \mu_1 + b^2 k \mu_1 + c^2 k \mu_1}{a^2 + b^2 + c^2} \end{aligned}$$

La résolution du système linéaire d'inconnues ν_1, μ_1 donne

$$\nu_1 = \frac{b^2 (1 - k)}{a^2 + b^2 + c^2} \quad \mu_1 = \frac{a^2 + (b^2 + c^2) k}{(a^2 + b^2 + c^2) k}$$

On déduit que:

$$P_2 = \left\{ 0, \frac{b^2 (1 - k)}{a^2 + b^2 + c^2}, \frac{a^2 + c^2 + b^2 k}{a^2 + b^2 + c^2} \right\}$$

Dessin = Dessin $\cup \{P_3\} = \{A, A_1, B, B_1, C, C_1, \Omega, L_0, P_1, P_2, P_3\}$

Détermination du point P_3 :

Soit P_3 le point $(CA) \cap (A_1B_1)$. Le point P_3 est composé.

Comme $P_3 \in (CA)$, on a, en choisissant l'inconnue ν_1

$$\overrightarrow{OP_3} = (1 - \nu_1) \overrightarrow{OA} + \nu_1 \overrightarrow{OC}$$

Comme $P_3 \in (A_1B_1)$, on a, en choisissant l'inconnue μ_1

$$\overrightarrow{OP_3} = \mu_1 \overrightarrow{OA_1} + (1 - \mu_1) \overrightarrow{OB_1}$$

On déduit:

$$\overrightarrow{OP_3} = h(1) \overrightarrow{OA} + h(2) \overrightarrow{OB} + h(3) \overrightarrow{OC}$$

avec

$$\begin{aligned} h(1) &= \frac{a^2 - a^2 k + a^2 k \mu_1 + b^2 k \mu_1 + c^2 k \mu_1}{a^2 + b^2 + c^2} \\ h(2) &= \frac{b^2 + a^2 k + c^2 k - a^2 k \mu_1 - b^2 k \mu_1 - c^2 k \mu_1}{a^2 + b^2 + c^2} \\ h(3) &= \frac{c^2 (1 - k)}{a^2 + b^2 + c^2} \end{aligned}$$

La résolution du système linéaire d'inconnues ν_1, μ_1 donne

$$\nu_1 = \frac{c^2 (1 - k)}{a^2 + b^2 + c^2} \quad \mu_1 = \frac{b^2 + (a^2 + c^2) k}{(a^2 + b^2 + c^2) k}$$

On déduit que:

$$P_3 = \left\{ \frac{a^2 + b^2 + c^2 k}{a^2 + b^2 + c^2}, 0, \frac{c^2 (1 - k)}{a^2 + b^2 + c^2} \right\}$$

Dessin = Dessin $\cup \{Q_1\} = \{A, A_1, B, B_1, C, C_1, \Omega, L_0, P_1, P_2, P_3, Q_1\}$

Détermination du point Q_1 :

Soit Q_1 le point $(AB) \cap (C_1A_1)$. Le point Q_1 est composé.

Comme $Q_1 \in (AB)$, on a, en choisissant l'inconnue ν_1

$$\overrightarrow{OQ_1} = \nu_1 \overrightarrow{OA} + (1 - \nu_1) \overrightarrow{OB}$$

Comme $Q_1 \in (C_1A_1)$, on a, en choisissant l'inconnue μ_1

$$\overrightarrow{OQ_1} = (1 - \mu_1) \overrightarrow{OA_1} + \mu_1 \overrightarrow{OC_1}$$

On déduit:

$$\overrightarrow{OQ_1} = j(1) \overrightarrow{OA} + j(2) \overrightarrow{OB} + j(3) \overrightarrow{OC}$$

avec

$$\begin{aligned} j(1) &= \frac{a^2 + b^2 k + c^2 k - a^2 k \mu_1 - b^2 k \mu_1 - c^2 k \mu_1}{a^2 + b^2 + c^2} \\ j(2) &= \frac{b^2 (1 - k)}{a^2 + b^2 + c^2} \\ j(3) &= \frac{c^2 - c^2 k + a^2 k \mu_1 + b^2 k \mu_1 + c^2 k \mu_1}{a^2 + b^2 + c^2} \end{aligned}$$

La résolution du système linéaire d'inconnues ν_1, μ_1 donne

$$\nu_1 = \frac{a^2 + c^2 + b^2 k}{a^2 + b^2 + c^2} \quad \mu_1 = \frac{c^2 (-1 + k)}{(a^2 + b^2 + c^2) k}$$

On déduit que:

$$Q_1 = \left\{ \frac{a^2 + c^2 + b^2 k}{a^2 + b^2 + c^2}, \frac{b^2 (1 - k)}{a^2 + b^2 + c^2}, 0 \right\}$$

Dessin = Dessin $\cup \{Q_2\} = \{A, A_1, B, B_1, C, C_1, \Omega, L_0, P_1, P_2, P_3, Q_1, Q_2\}$

Détermination du point Q_2 :

Soit Q_2 le point $(BC) \cap (A_1B_1)$. Le point Q_2 est composé.

Comme $Q_2 \in (BC)$, on a, en choisissant l'inconnue ν_1

$$\overrightarrow{OQ_2} = \nu_1 \overrightarrow{OB} + (1 - \nu_1) \overrightarrow{OC}$$

Comme $Q_2 \in (A_1B_1)$, on a, en choisissant l'inconnue μ_1

$$\overrightarrow{OQ_2} = \mu_1 \overrightarrow{OA_1} + (1 - \mu_1) \overrightarrow{OB_1}$$

On déduit:

$$\overrightarrow{OQ_2} = l(1) \overrightarrow{OA} + l(2) \overrightarrow{OB} + l(3) \overrightarrow{OC}$$

avec

$$\begin{aligned} l(1) &= \frac{a^2 - a^2 k + a^2 k \mu_1 + b^2 k \mu_1 + c^2 k \mu_1}{a^2 + b^2 + c^2} \\ l(2) &= \frac{b^2 + a^2 k + c^2 k - a^2 k \mu_1 - b^2 k \mu_1 - c^2 k \mu_1}{a^2 + b^2 + c^2} \\ l(3) &= \frac{c^2 (1 - k)}{a^2 + b^2 + c^2} \end{aligned}$$

La résolution du système linéaire d'inconnues ν_1, μ_1 donne

$$\nu_1 = \frac{a^2 + b^2 + c^2 k}{a^2 + b^2 + c^2} \quad \mu_1 = \frac{a^2 (-1 + k)}{(a^2 + b^2 + c^2) k}$$

On déduit que:

$$Q_2 = \left\{ 0, \frac{a^2 + b^2 + c^2 k}{a^2 + b^2 + c^2}, \frac{c^2 (1 - k)}{a^2 + b^2 + c^2} \right\}$$

Dessin = Dessin $\cup \{Q_3\} = \{A, A_1, B, B_1, C, C_1, \Omega, L_0, P_1, P_2, P_3, Q_1, Q_2, Q_3\}$

Détermination du point Q_3 :

Soit Q_3 le point $(CA) \cap (B_1C_1)$. Le point Q_3 est composé.

Comme $Q_3 \in (CA)$, on a, en choisissant l'inconnue ν_1

$$\overrightarrow{OQ_3} = (1 - \nu_1) \overrightarrow{OA} + \nu_1 \overrightarrow{OC}$$

Comme $Q_3 \in (B_1C_1)$, on a, en choisissant l'inconnue μ_1

$$\overrightarrow{OQ_3} = \mu_1 \overrightarrow{OB_1} + (1 - \mu_1) \overrightarrow{OC_1}$$

On déduit:

$$\overrightarrow{OQ_3} = n(1) \overrightarrow{OA} + n(2) \overrightarrow{OB} + n(3) \overrightarrow{OC}$$

avec

$$\begin{aligned} n(1) &= \frac{a^2 (1 - k)}{a^2 + b^2 + c^2} \\ n(2) &= \frac{b^2 - b^2 k + a^2 k \mu_1 + b^2 k \mu_1 + c^2 k \mu_1}{a^2 + b^2 + c^2} \\ n(3) &= \frac{c^2 + a^2 k + b^2 k - a^2 k \mu_1 - b^2 k \mu_1 - c^2 k \mu_1}{a^2 + b^2 + c^2} \end{aligned}$$

La résolution du système linéaire d'inconnues ν_1, μ_1 donne

$$\nu_1 = \frac{b^2 + c^2 + a^2 k}{a^2 + b^2 + c^2} \quad \mu_1 = \frac{b^2 (-1 + k)}{(a^2 + b^2 + c^2) k}$$

On déduit que:

$$Q_3 = \left\{ \frac{a^2 (1 - k)}{a^2 + b^2 + c^2}, 0, \frac{b^2 + c^2 + a^2 k}{a^2 + b^2 + c^2} \right\}$$

Dessin = Dessin $\cup \{K_T\} = \{A, A_1, B, B_1, C, C_1, \Omega, K_T L_0, P_1, P_2, P_3, Q_1, Q_2, Q_3\}$

Equation du cercle passant par les points P_1, P_2, P_3 :

Le centre $M = \{x, y, 1 - x, y\}$ de ce cercle doit vérifier $MP_1^2 - MP_2^2 = 0$ et $MP_1^2 - MP_3^2 = 0$, soit

$$\begin{aligned} 0 &= 2a^4 b^2 + a^2 b^4 + a^4 c^2 + 2a^2 b^2 c^2 + a^6 k + a^2 b^4 k + a^2 c^4 k - a^2 b^4 k^2 + a^4 c^2 k^2 \\ &+ (-2a^4 b^2 - 2a^2 b^4 - a^4 c^2 - 4a^2 b^2 c^2 - b^4 c^2 + c^6 - a^6 k - a^4 b^2 k - a^2 b^4 k - b^6 k + 2a^2 b^2 c^2 k + a^2 c^4 k + b^2 c^4 k) x \\ &+ (-a^6 - 2a^4 b^2 - a^2 b^4 - 2a^4 c^2 - 2a^2 b^2 c^2 - a^2 c^4 - a^6 k - 2a^4 b^2 k - a^2 b^4 k - 2a^4 c^2 k - 2a^2 b^2 c^2 k - a^2 c^4 k) y \\ 0 &= a^4 b^2 - b^6 + a^4 c^2 + 2a^2 b^2 c^2 + a^6 k - a^2 b^4 k - 2a^2 b^2 c^2 k - 2b^4 c^2 k + a^2 c^4 k + a^4 c^2 k^2 - b^2 c^4 k^2 \\ &+ (-a^4 b^2 + b^6 - a^4 c^2 - 2a^2 b^2 c^2 + b^4 c^2 + b^2 c^4 + c^6 - a^6 k + a^2 b^4 k + 4a^2 b^2 c^2 k + 2b^4 c^2 k + a^2 c^4 k + 2b^2 c^4 k) x \\ &+ (-a^4 b^2 + b^6 - 2a^4 c^2 - 4a^2 b^2 c^2 - 2a^2 c^4 - b^2 c^4 - a^6 k + a^2 b^4 k - a^4 c^2 k + 2a^2 b^2 c^2 k + b^4 c^2 k - a^2 c^4 k - c^6 k) y \end{aligned}$$

La résolution de ce système linéaire donne x, y , et les coordonnées du centre $\{x, y, 1 - x - y\}$ sont ainsi

$$\begin{aligned} K_T = \left\{ \frac{a^2 (a^4 - a^2 b^2 - a^2 c^2 - 2b^2 c^2 + a^2 b^2 k - b^4 k + a^2 c^2 k - c^4 k)}{(a - b - c) (a + b - c) (a - b + c) (a + b + c) (a^2 + b^2 + c^2)}, \right. \\ \frac{b^2 (-a^2 b^2 + b^4 - 2a^2 c^2 - b^2 c^2 - a^4 k + a^2 b^2 k + b^2 c^2 k - c^4 k)}{(-a + b - c) (a + b - c) (-a + b + c) (a + b + c) (a^2 + b^2 + c^2)}, \\ \left. \frac{c^2 (2a^2 b^2 + a^2 c^2 + b^2 c^2 - c^4 + a^4 k + b^4 k - a^2 c^2 k - b^2 c^2 k)}{(-a + b + c) (a + b - c) (a - b + c) (a + b + c) (a^2 + b^2 + c^2)} \right\} \end{aligned}$$

Le rayon au carré de ce cercle a pour valeur

$$R_T^2 = \frac{a^2 b^2 c^2 (a^2 b^2 + a^2 c^2 + b^2 c^2 + a^4 k + b^4 k + c^4 k + a^2 b^2 k^2 + a^2 c^2 k^2 + b^2 c^2 k^2)}{(-a + b + c) (a + b - c) (a - b + c) (a + b + c) (a^2 + b^2 + c^2)^2}$$

Un point $M = \{X, Y, Z\}$ appartient à ce cercle si et seulement si sa distance (au carré) au centre est égale à cette valeur, soit Un point $M = \{x, y, 1 - x - y\}$ appartient à ce cercle si et seulement si

$$F_1(x, y) + k(X + Y + Z) F_2(x, y) + a^2 b^2 c^2 (X + Y + Z)^2 k^2 = 0$$

avec

$$F_1(x, y) = -b^4 c^2 X^2 - b^2 c^4 X^2 + 2 a^2 b^2 c^2 X Y + a^2 c^4 X Y + b^2 c^4 X Y + c^6 X Y - a^4 c^2 Y^2 - a^2 c^4 Y^2 \\ + a^2 b^4 X Z + b^6 X Z + 2 a^2 b^2 c^2 X Z + b^4 c^2 X Z + a^6 Y Z + a^4 b^2 Y Z + a^4 c^2 Y Z + 2 a^2 b^2 c^2 Y Z \\ - a^4 b^2 Z^2 - a^2 b^4 Z^2$$

$$F_2(x, y) = -a^2 b^2 c^2 X + b^4 c^2 X + b^2 c^4 X + a^4 c^2 Y - a^2 b^2 c^2 Y + a^2 c^4 Y + a^4 b^2 Z + a^2 b^4 Z - a^2 b^2 c^2 Z$$

Dessin = Dessin $\cup \{J, \Omega_1\} = \{A, A_1, B, B_1, C, C_1, J, \Omega, L_0, P_1, P_2, P_3, Q_1, Q_2, Q_3, \Omega_1\}$

Les points purs choisis sont A, B, C .

Les points composés sont J, Ω_1 .

Soit J le milieu de $[\Omega\Omega_1]$ On a les équations vectorielles

$$\begin{aligned} \vec{0} &= \overrightarrow{\Omega_1 L_0} (1 - k) + \overrightarrow{\Omega_1 \Omega} k \\ \vec{0} &= \frac{\overrightarrow{J\Omega}}{2} + \frac{\overrightarrow{J\Omega_1}}{2} \end{aligned}$$

et, par découpages automatiques, le système linéaire

$$\begin{aligned} \vec{0} &= k \overrightarrow{O\Omega} + (1 - k) \overrightarrow{OL_0} - \overrightarrow{O\Omega_1} \\ \vec{0} &= -\overrightarrow{OJ} + \frac{\overrightarrow{O\Omega}}{2} + \frac{\overrightarrow{O\Omega_1}}{2} \end{aligned}$$

Tenant compte des points composés précédents, on déduit les coordonnées barycentriques des points composés:

$$J = \left\{ \frac{a^2 (a^4 - a^2 b^2 - a^2 c^2 - 2 b^2 c^2 + a^2 b^2 k - b^4 k + a^2 c^2 k - c^4 k)}{(a - b - c) (a + b - c) (a - b + c) (a + b + c) (a^2 + b^2 + c^2)}, \right. \\ \frac{b^2 (-(a^2 b^2) + b^4 - 2 a^2 c^2 - b^2 c^2 - a^4 k + a^2 b^2 k + b^2 c^2 k - c^4 k)}{(-a + b - c) (a + b - c) (-a + b + c) (a + b + c) (a^2 + b^2 + c^2)}, \\ \left. \frac{c^2 (2 a^2 b^2 + a^2 c^2 + b^2 c^2 - c^4 + a^4 k + b^4 k - a^2 c^2 k - b^2 c^2 k)}{(-a + b + c) (a + b - c) (a - b + c) (a + b + c) (a^2 + b^2 + c^2)} \right\} \\ \Omega_1 = \left\{ \frac{a^2 (a^4 - 2 a^2 b^2 + b^4 - 2 a^2 c^2 - 2 b^2 c^2 + c^4 + 2 a^2 b^2 k - 2 b^4 k + 2 a^2 c^2 k - 2 c^4 k)}{(a - b - c) (a + b - c) (a - b + c) (a + b + c) (a^2 + b^2 + c^2)}, \right. \\ \frac{b^2 (a^4 - 2 a^2 b^2 + b^4 - 2 a^2 c^2 - 2 b^2 c^2 + c^4 - 2 a^4 k + 2 a^2 b^2 k + 2 b^2 c^2 k - 2 c^4 k)}{(-a + b - c) (a + b - c) (-a + b + c) (a + b + c) (a^2 + b^2 + c^2)}, \\ \left. \frac{c^2 (-a^4 + 2 a^2 b^2 - b^4 + 2 a^2 c^2 + 2 b^2 c^2 - c^4 + 2 a^4 k + 2 b^4 k - 2 a^2 c^2 k - 2 b^2 c^2 k)}{(-a + b + c) (a + b - c) (a - b + c) (a + b + c) (a^2 + b^2 + c^2)} \right\}$$

On a donc $K_T = \Omega_1$.

La distance $P_1 Q_2^2$ est égale à

$$P_1 Q_2^2 = \frac{a^2 AC^2 c^2 (-1 + k)^2}{(a^2 + b^2 + c^2)^2} + \frac{a^2 AB^2 (a - c) (a + c) (-1 + k)^2}{(a^2 + b^2 + c^2)^2} - \frac{BC^2 (a - c) c^2 (a + c) (-1 + k)^2}{(a^2 + b^2 + c^2)^2}$$

soit

$$P_1 Q_2^2 = \frac{a^2 b^2 c^2 (-1 + k)^2}{(a^2 + b^2 + c^2)^2}$$

La distance $P_2Q_3^2$ est égale à

$$P_2Q_3^2 = \frac{a^2 AB^2 b^2 (-1+k)^2}{(a^2 + b^2 + c^2)^2} + \frac{a^2 AC^2 (a-b) (a+b) (-1+k)^2}{(a^2 + b^2 + c^2)^2} - \frac{(a-b) b^2 (a+b) BC^2 (-1+k)^2}{(a^2 + b^2 + c^2)^2}$$

soit

$$P_2Q_3^2 = \frac{a^2 b^2 c^2 (-1+k)^2}{(a^2 + b^2 + c^2)^2}$$

La distance $P_3Q_1^2$ est égale à

$$P_3Q_1^2 = \frac{b^2 BC^2 c^2 (-1+k)^2}{(a^2 + b^2 + c^2)^2} + \frac{AB^2 b^2 (b-c) (b+c) (-1+k)^2}{(a^2 + b^2 + c^2)^2} - \frac{AC^2 (b-c) c^2 (b+c) (-1+k)^2}{(a^2 + b^2 + c^2)^2}$$

soit

$$P_3Q_1^2 = \frac{a^2 b^2 c^2 (-1+k)^2}{(a^2 + b^2 + c^2)^2}$$

Pour un point M de coordonnées barycentriques $M = \{x, y, 1-x-y\}$, on a

$$\begin{aligned} & (-2) \overrightarrow{M\Omega} \cdot \overrightarrow{Q_1P_3} \\ &= \frac{(-1+k) (-a^2 b^2 + b^4 - b^2 c^2 + a^2 b^2 x - b^4 x + b^2 c^2 x + a^2 b^2 y - b^4 y + a^2 c^2 y + 2 b^2 c^2 y - c^4 y)}{a^2 + b^2 + c^2} \end{aligned}$$

donc $(-2) \overrightarrow{A\Omega} \cdot \overrightarrow{Q_1P_3} = 0$. On procède de même pour les autres produits scalaires.

Exercice 18.2.2

On conserve les notations de l'exercice précédent. Soient I_a le milieu de $[AA_1]$, I_b le milieu de $[BB_1]$, I_c le milieu de $[CC_1]$.

1. Montrer que les points I_a, I_b, I_c sont les images respectives de A, B, C par une homothétie de centre L_0 dont on précisera le rapport.
2. Montrer que les triangles $I_a I_b I_c$ et ABC ont même point de Lemoine.
3. Soient les points

$$U_1 = (P_1Q_2) \cap (P_2Q_3) \quad U_2 = (Q_1P_3) \cap (P_2Q_3) \quad U_3 = (P_1Q_2) \cap (Q_1P_3)$$

Montrer que $U_1 \in (AL_0)$, $U_2 \in (BL_0)$, $U_3 \in (CL_0)$. Calculer $U_1U_2^2$, $U_1U_3^2$, $U_2U_3^2$.

4. Déterminer les projections orthogonales W_1, W_2, W_3 du centre K_T du cercle de Tucker sur les droites (P_1Q_2) , (P_2Q_3) , (Q_1P_3) . En déduire que le cercle inscrit au triangle $U_1U_2U_3$ a pour centre K_T .

Solution:

Dessin = $A, A_1, B, B_1, C, C_1, L_0, P_1, P_2, P_3, Q_1, Q_2, Q_3\}$

Les points purs choisis sont A, B, C .

Les points composés sont $L_0, A_1, B_1, C_1, P_1, P_2, P_3, Q_1, Q_2, Q_3$.

Les coordonnées barycentriques des points composés ont été décrites dans l'exercice précédent.

Dessin = $\text{Dessin} \cup \{I_a, I_b, I_c\} = \{A, A_1, B, B_1, C, C_1, I_a, I_b, I_c, L_0, P_1, P_2, P_3, Q_1, Q_2, Q_3\}$

Les points purs choisis sont A, B, C .

Les points composés sont I_a, I_b, I_c .

On a les équations vectorielles

$$\vec{0} = \vec{I_a A} + \vec{I_a A_1}$$

$$\vec{0} = \vec{I_b B} + \vec{I_b B_1}$$

$$\vec{0} = \vec{I_c C} + \vec{I_c C_1}$$

et, par découpages automatiques, le système linéaire

$$\vec{0} = \vec{OA} + \vec{OA_1} - 2 \vec{OI_a}$$

$$\vec{0} = \vec{OB} + \vec{OB_1} - 2 \vec{OI_b}$$

$$\vec{0} = \vec{OC} + \vec{OC_1} - 2 \vec{OI_c}$$

Tenant compte des points composés précédents, on déduit les coordonnées barycentriques des points composés:

$$I_a = \left\{ \frac{2a^2 + b^2 + c^2 + b^2 k + c^2 k}{2(a^2 + b^2 + c^2)}, \frac{b^2(1-k)}{2(a^2 + b^2 + c^2)}, \frac{c^2(1-k)}{2(a^2 + b^2 + c^2)} \right\}$$

$$I_b = \left\{ \frac{a^2(1-k)}{2(a^2 + b^2 + c^2)}, \frac{a^2 + 2b^2 + c^2 + a^2 k + c^2 k}{2(a^2 + b^2 + c^2)}, \frac{c^2(1-k)}{2(a^2 + b^2 + c^2)} \right\}$$

$$I_c = \left\{ \frac{a^2(1-k)}{2(a^2 + b^2 + c^2)}, \frac{b^2(1-k)}{2(a^2 + b^2 + c^2)}, \frac{a^2 + b^2 + 2c^2 + a^2 k + b^2 k}{2(a^2 + b^2 + c^2)} \right\}$$

Calculons le vecteur $\vec{L_0 I_a}$. On a:

$$\vec{L_0 I_a} = a(1) \vec{OA} + a(2) \vec{OB} + a(3) \vec{OC}$$

avec

$$a(1) = \frac{(b^2 + c^2)(1+k)}{2(a^2 + b^2 + c^2)}$$

$$a(2) = \frac{-b^2(1+k)}{2(a^2 + b^2 + c^2)}$$

$$a(3) = \frac{-c^2(1+k)}{2(a^2 + b^2 + c^2)}$$

Calculons le vecteur $\vec{L_0 A}$. On a:

$$\vec{L_0 A} = b(1) \vec{OA} + b(2) \vec{OB} + b(3) \vec{OC}$$

avec

$$b(1) = \frac{b^2 + c^2}{a^2 + b^2 + c^2}$$

$$b(2) = \frac{-b^2}{a^2 + b^2 + c^2}$$

$$b(3) = \frac{-c^2}{a^2 + b^2 + c^2}$$

On a ainsi

$$\overrightarrow{L_0 I_a} = \frac{1+k}{2} \overrightarrow{L_0 A}$$

Calculons le vecteur $\overrightarrow{L_0 I_b}$. On a:

$$\overrightarrow{L_0 I_b} = c(1) \overrightarrow{OA} + c(2) \overrightarrow{OB} + c(3) \overrightarrow{OC}$$

avec

$$c(1) = \frac{-a^2 (1+k)}{2 (a^2 + b^2 + c^2)}$$

$$c(2) = \frac{(a^2 + c^2) (1+k)}{2 (a^2 + b^2 + c^2)}$$

$$c(3) = \frac{-c^2 (1+k)}{2 (a^2 + b^2 + c^2)}$$

Calculons le vecteur $\overrightarrow{L_0 B}$. On a:

$$\overrightarrow{L_0 B} = d(1) \overrightarrow{OA} + d(2) \overrightarrow{OB} + d(3) \overrightarrow{OC}$$

avec

$$d(1) = \frac{-a^2}{a^2 + b^2 + c^2}$$

$$d(2) = \frac{a^2 + c^2}{a^2 + b^2 + c^2}$$

$$d(3) = \frac{-c^2}{a^2 + b^2 + c^2}$$

On a ainsi

$$\overrightarrow{L_0 I_b} = \frac{1+k}{2} \overrightarrow{L_0 B}$$

Calculons le vecteur $\overrightarrow{L_0 I_c}$. On a:

$$\overrightarrow{L_0 I_c} = e(1) \overrightarrow{OA} + e(2) \overrightarrow{OB} + e(3) \overrightarrow{OC}$$

avec

$$e(1) = \frac{-a^2 (1+k)}{2 (a^2 + b^2 + c^2)}$$

$$e(2) = \frac{-b^2 (1+k)}{2 (a^2 + b^2 + c^2)}$$

$$e(3) = \frac{(a^2 + b^2) (1+k)}{2 (a^2 + b^2 + c^2)}$$

Calculons le vecteur $\overrightarrow{L_0C}$. On a:

$$\overrightarrow{L_0C} = f(1) \overrightarrow{OA} + f(2) \overrightarrow{OB} + f(3) \overrightarrow{OC}$$

avec

$$f(1) = \frac{-a^2}{a^2 + b^2 + c^2}$$

$$f(2) = \frac{-b^2}{a^2 + b^2 + c^2}$$

$$f(3) = \frac{a^2 + b^2}{a^2 + b^2 + c^2}$$

On a ainsi

$$\overrightarrow{L_0I_c} = \frac{1+k}{2} \overrightarrow{L_0C}$$

Le rapport de l'homothétie est donc $\frac{1+k}{2}$.

La distance $I_bI_c^2$ est égale à

$$I_bI_c^2 = \frac{BC^2 (1+k)^2}{4} = \frac{a^2 (1+k)^2}{4}$$

La distance $I_aI_c^2$ est égale à

$$I_aI_c^2 = \frac{AC^2 (1+k)^2}{4} = \frac{b^2 (1+k)^2}{4}$$

La distance $I_aI_b^2$ est égale à

$$I_aI_b^2 = \frac{AB^2 (1+k)^2}{4} = \frac{c^2 (1+k)^2}{4}$$

Dessin = Dessin $\cup \{U_1\} = \{A, A_1, B, B_1, C, C_1, I_a, I_b, I_c, L_0, P_1, P_2, P_3, Q_1, Q_2, Q_3, U_1\}$

Détermination du point U_1 :

Soit U_1 le point $(P_1Q_2) \cap (P_2Q_3)$. Le point U_1 est composé.

Comme $U_1 \in (P_1Q_2)$, on a, en choisissant l'inconnue ν_1

$$\overrightarrow{OU_1} = \nu_1 \overrightarrow{OP_1} + (1 - \nu_1) \overrightarrow{OQ_2}$$

On déduit:

$$\overrightarrow{OU_1} = g(1) \overrightarrow{OA} + g(2) \overrightarrow{OB} + g(3) \overrightarrow{OC}$$

avec

$$g(1) = \frac{a^2 (1-k) \nu_1}{a^2 + b^2 + c^2}$$

$$g(2) = \frac{a^2 + b^2 + c^2 k - a^2 \nu_1 + c^2 \nu_1 + a^2 k \nu_1 - c^2 k \nu_1}{a^2 + b^2 + c^2}$$

$$g(3) = \frac{c^2 (1-k) (1-\nu_1)}{a^2 + b^2 + c^2}$$

Comme $U_1 \in (P_2Q_3)$, on a, en choisissant l'inconnue μ_1

$$\overrightarrow{OU_1} = \mu_1 \overrightarrow{OP_2} + (1 - \mu_1) \overrightarrow{OQ_3}$$

On déduit:

$$\overrightarrow{OU_1} = h(1) \overrightarrow{OA} + h(2) \overrightarrow{OB} + h(3) \overrightarrow{OC}$$

avec

$$\begin{aligned} h(1) &= \frac{a^2 (1-k) (1-\mu_1)}{a^2 + b^2 + c^2} \\ h(2) &= \frac{b^2 (1-k) \mu_1}{a^2 + b^2 + c^2} \\ h(3) &= \frac{b^2 + c^2 + a^2 k + a^2 \mu_1 - b^2 \mu_1 - a^2 k \mu_1 + b^2 k \mu_1}{a^2 + b^2 + c^2} \end{aligned}$$

La résolution du système linéaire d'inconnues ν_1, μ_1 donne

$$\nu_1 = \frac{a^2 + (b^2 + c^2) k}{(a^2 - b^2 - c^2) (1-k)} \quad \mu_1 = \frac{b^2 + c^2 + a^2 k}{(a^2 - b^2 - c^2) (-1+k)}$$

On déduit que:

$$U_1 = \left\{ \frac{a^2 (a^2 + b^2 k + c^2 k)}{(a^2 - b^2 - c^2) (a^2 + b^2 + c^2)}, \frac{b^2 (b^2 + c^2 + a^2 k)}{(-a^2 + b^2 + c^2) (a^2 + b^2 + c^2)}, \frac{c^2 (b^2 + c^2 + a^2 k)}{(-a^2 + b^2 + c^2) (a^2 + b^2 + c^2)} \right\}$$

Dessin = Dessin $\cup \{U_2\} = \{A, A_1, B, B_1, C, C_1, I_a, I_b, I_c, L_0, P_1, P_2, P_3, Q_1, Q_2, Q_3, U_1, U_2\}$

Détermination du point U_2 :

Soit U_2 le point $(Q_1P_3) \cap (P_2Q_3)$. Le point U_2 est composé.

Comme $U_2 \in (Q_1P_3)$, on a, en choisissant l'inconnue ν_1

$$\overrightarrow{OU_2} = (1 - \nu_1) \overrightarrow{OP_3} + \nu_1 \overrightarrow{OQ_1}$$

On déduit:

$$\overrightarrow{OU_2} = i(1) \overrightarrow{OA} + i(2) \overrightarrow{OB} + i(3) \overrightarrow{OC}$$

avec

$$\begin{aligned} i(1) &= \frac{a^2 + b^2 + c^2 k - b^2 \nu_1 + c^2 \nu_1 + b^2 k \nu_1 - c^2 k \nu_1}{a^2 + b^2 + c^2} \\ i(2) &= \frac{b^2 (1-k) \nu_1}{a^2 + b^2 + c^2} \\ i(3) &= \frac{c^2 (1-k) (1-\nu_1)}{a^2 + b^2 + c^2} \end{aligned}$$

Comme $U_2 \in (P_2Q_3)$, on a, en choisissant l'inconnue μ_1

$$\overrightarrow{OU_2} = \mu_1 \overrightarrow{OP_2} + (1 - \mu_1) \overrightarrow{OQ_3}$$

On déduit:

$$\overrightarrow{OU_2} = j(1) \overrightarrow{OA} + j(2) \overrightarrow{OB} + j(3) \overrightarrow{OC}$$

avec

$$j(1) = \frac{a^2 (1-k) (1-\mu_1)}{a^2 + b^2 + c^2}$$

$$j(2) = \frac{b^2 (1 - k) \mu_1}{a^2 + b^2 + c^2}$$

$$j(3) = \frac{b^2 + c^2 + a^2 k + a^2 \mu_1 - b^2 \mu_1 - a^2 k \mu_1 + b^2 k \mu_1}{a^2 + b^2 + c^2}$$

La résolution du système linéaire d'inconnues ν_1, μ_1 donne

$$\nu_1 = \frac{b^2 + (a^2 + c^2) k}{(a^2 - b^2 + c^2) (-1 + k)} \quad \mu_1 = \frac{b^2 + (a^2 + c^2) k}{(a^2 - b^2 + c^2) (-1 + k)}$$

On déduit que:

$$U_2 = \left\{ \frac{a^2 (a^2 + c^2 + b^2 k)}{(a^2 - b^2 + c^2) (a^2 + b^2 + c^2)}, \frac{b^2 (b^2 + a^2 k + c^2 k)}{(-a^2 + b^2 - c^2) (a^2 + b^2 + c^2)}, \frac{c^2 (a^2 + c^2 + b^2 k)}{(a^2 - b^2 + c^2) (a^2 + b^2 + c^2)} \right\}$$

Dessin = Dessin $\cup \{U_3\} = \{A, A_1, B, B_1, C, C_1, I_a, I_b, I_c, L_0, P_1, P_2, P_3, Q_1, Q_2, Q_3, U_1, U_2, U_3\}$

Détermination du point U_3 :

Soit U_3 le point $(P_1 Q_2) \cap (Q_1 P_3)$. Le point U_3 est composé.

Comme $U_3 \in (P_1 Q_2)$, on a, en choisissant l'inconnue ν_1

$$\overrightarrow{OU_3} = \nu_1 \overrightarrow{OP_1} + (1 - \nu_1) \overrightarrow{OQ_2}$$

On déduit:

$$\overrightarrow{OU_3} = k(1) \overrightarrow{OA} + k(2) \overrightarrow{OB} + k(3) \overrightarrow{OC}$$

avec

$$k(1) = \frac{a^2 (1 - k) \nu_1}{a^2 + b^2 + c^2}$$

$$k(2) = \frac{a^2 + b^2 + c^2 k - a^2 \nu_1 + c^2 \nu_1 + a^2 k \nu_1 - c^2 k \nu_1}{a^2 + b^2 + c^2}$$

$$k(3) = \frac{c^2 (1 - k) (1 - \nu_1)}{a^2 + b^2 + c^2}$$

Comme $U_3 \in (Q_1 P_3)$, on a, en choisissant l'inconnue μ_1

$$\overrightarrow{OU_3} = (1 - \mu_1) \overrightarrow{OP_3} + \mu_1 \overrightarrow{OQ_1}$$

On déduit:

$$\overrightarrow{OU_3} = l(1) \overrightarrow{OA} + l(2) \overrightarrow{OB} + l(3) \overrightarrow{OC}$$

avec

$$l(1) = \frac{a^2 + b^2 + c^2 k - b^2 \mu_1 + c^2 \mu_1 + b^2 k \mu_1 - c^2 k \mu_1}{a^2 + b^2 + c^2}$$

$$l(2) = \frac{b^2 (1 - k) \mu_1}{a^2 + b^2 + c^2}$$

$$l(3) = \frac{c^2 (1 - k) (1 - \mu_1)}{a^2 + b^2 + c^2}$$

La résolution du système linéaire d'inconnues ν_1, μ_1 donne

$$\nu_1 = \frac{a^2 + b^2 + c^2 k}{(a^2 + b^2 - c^2) (1 - k)} \quad \mu_1 = \frac{a^2 + b^2 + c^2 k}{(a^2 + b^2 - c^2) (1 - k)}$$

On déduit que:

$$U_3 = \left\{ \frac{a^2 (a^2 + b^2 + c^2 k)}{(a^2 + b^2 - c^2) (a^2 + b^2 + c^2)}, \frac{b^2 (a^2 + b^2 + c^2 k)}{(a^2 + b^2 - c^2) (a^2 + b^2 + c^2)}, \frac{c^2 (c^2 + a^2 k + b^2 k)}{(-a^2 - b^2 + c^2) (a^2 + b^2 + c^2)} \right\}$$

Calculons le vecteur $\overrightarrow{AU_1}$. On a:

$$\overrightarrow{AU_1} = m(1) \overrightarrow{OA} + m(2) \overrightarrow{OB} + m(3) \overrightarrow{OC}$$

avec

$$m(1) = \frac{-(b^2 + c^2) (b^2 + c^2 + a^2 k)}{(-a^2 + b^2 + c^2) (a^2 + b^2 + c^2)}$$

$$m(2) = \frac{b^2 (b^2 + c^2 + a^2 k)}{(-a^2 + b^2 + c^2) (a^2 + b^2 + c^2)}$$

$$m(3) = \frac{c^2 (b^2 + c^2 + a^2 k)}{(-a^2 + b^2 + c^2) (a^2 + b^2 + c^2)}$$

Calculons le vecteur $\overrightarrow{AL_0}$. On a:

$$\overrightarrow{AL_0} = n(1) \overrightarrow{OA} + n(2) \overrightarrow{OB} + n(3) \overrightarrow{OC}$$

avec

$$n(1) = \frac{-(b^2 + c^2)}{a^2 + b^2 + c^2}$$

$$n(2) = \frac{b^2}{a^2 + b^2 + c^2}$$

$$n(3) = \frac{c^2}{a^2 + b^2 + c^2}$$

On a ainsi

$$\overrightarrow{AU_1} = \frac{-b^2 - c^2 - a^2 k}{a^2 - b^2 - c^2} \overrightarrow{AL_0}$$

Calculons le vecteur $\overrightarrow{BU_2}$. On a:

$$\overrightarrow{BU_2} = o(1) \overrightarrow{OA} + o(2) \overrightarrow{OB} + o(3) \overrightarrow{OC}$$

avec

$$o(1) = \frac{a^2 (a^2 + c^2 + b^2 k)}{(a^2 - b^2 + c^2) (a^2 + b^2 + c^2)}$$

$$o(2) = \frac{-(a^2 + c^2) (a^2 + c^2 + b^2 k)}{(a^2 - b^2 + c^2) (a^2 + b^2 + c^2)}$$

$$o(3) = \frac{c^2 (a^2 + c^2 + b^2 k)}{(a^2 - b^2 + c^2) (a^2 + b^2 + c^2)}$$

Calculons le vecteur $\overrightarrow{BL_0}$. On a:

$$\overrightarrow{BL_0} = p(1) \overrightarrow{OA} + p(2) \overrightarrow{OB} + p(3) \overrightarrow{OC}$$

avec

$$\begin{aligned} p(1) &= \frac{a^2}{a^2 + b^2 + c^2} \\ p(2) &= \frac{-(a^2 + c^2)}{a^2 + b^2 + c^2} \\ p(3) &= \frac{c^2}{a^2 + b^2 + c^2} \end{aligned}$$

On a ainsi

$$\overrightarrow{BU_2} = \frac{a^2 + c^2 + b^2 k}{a^2 - b^2 + c^2} \overrightarrow{BL_0}$$

Calculons le vecteur $\overrightarrow{CU_3}$. On a:

$$\overrightarrow{CU_3} = q(1) \overrightarrow{OA} + q(2) \overrightarrow{OB} + q(3) \overrightarrow{OC}$$

avec

$$\begin{aligned} q(1) &= \frac{a^2 (a^2 + b^2 + c^2 k)}{(a^2 + b^2 - c^2) (a^2 + b^2 + c^2)} \\ q(2) &= \frac{b^2 (a^2 + b^2 + c^2 k)}{(a^2 + b^2 - c^2) (a^2 + b^2 + c^2)} \\ q(3) &= \frac{-(a^2 + b^2) (a^2 + b^2 + c^2 k)}{(a^2 + b^2 - c^2) (a^2 + b^2 + c^2)} \end{aligned}$$

Calculons le vecteur $\overrightarrow{CL_0}$. On a:

$$\overrightarrow{CL_0} = r(1) \overrightarrow{OA} + r(2) \overrightarrow{OB} + r(3) \overrightarrow{OC}$$

avec

$$\begin{aligned} r(1) &= \frac{a^2}{a^2 + b^2 + c^2} \\ r(2) &= \frac{b^2}{a^2 + b^2 + c^2} \\ r(3) &= \frac{-(a^2 + b^2)}{a^2 + b^2 + c^2} \end{aligned}$$

On a ainsi

$$\overrightarrow{CU_3} = \frac{a^2 + b^2 + c^2 k}{a^2 + b^2 - c^2} \overrightarrow{CL_0}$$

La distance $U_2U_3^2$ est égale à

$$U_2U_3^2 = \frac{a^6 b^2 c^2 (1+k)^2}{(a^2 + b^2 - c^2)^2 (a^2 - b^2 + c^2)^2}$$

La distance $U_1U_3^2$ est égale à

$$U_1U_3^2 = \frac{a^2 b^6 c^2 (1+k)^2}{(a^2 - b^2 - c^2)^2 (a^2 + b^2 - c^2)^2}$$

La distance $U_1U_2^2$ est égale à

$$U_1U_2^2 = \frac{a^2 b^2 c^6 (1+k)^2}{(a^2 - b^2 - c^2)^2 (a^2 - b^2 + c^2)^2}$$

La projection du point K_T sur la droite (P_1Q_2) est le point W_1 de coordonnées barycentriques

$$W_1 = \left\{ \frac{a^2 (1-k)}{2(a^2 + b^2 + c^2)}, \frac{a^2 + 2b^2 + c^2 + a^2 k + c^2 k}{2(a^2 + b^2 + c^2)}, \frac{c^2 (1-k)}{2(a^2 + b^2 + c^2)} \right\}$$

La projection du point K_T sur la droite (P_2Q_3) est le point W_2 de coordonnées barycentriques

$$W_2 = \left\{ \frac{a^2 (1-k)}{2(a^2 + b^2 + c^2)}, \frac{b^2 (1-k)}{2(a^2 + b^2 + c^2)}, \frac{a^2 + b^2 + 2c^2 + a^2 k + b^2 k}{2(a^2 + b^2 + c^2)} \right\}$$

La projection du point K_T sur la droite (Q_1P_3) est le point W_3 de coordonnées barycentriques

$$W_3 = \left\{ \frac{2a^2 + b^2 + c^2 + b^2 k + c^2 k}{2(a^2 + b^2 + c^2)}, \frac{b^2 (1-k)}{2(a^2 + b^2 + c^2)}, \frac{c^2 (1-k)}{2(a^2 + b^2 + c^2)} \right\}$$

La distance $W_1K_T^2$ est égale à

$$W_1K_T^2 = \frac{a^2 b^2 c^2 (1+k)^2}{4(-a+b+c)(a+b-c)(a-b+c)(a+b+c)}$$

On vérifie que $W_1K_T^2 = W_2K_T^2 = W_3K_T^2$.

Il en résulte que le cercle inscrit au triangle $U_1U_2U_3$ a pour centre K_T et réalise les contacts avec les côtés aux points W_1, W_2, W_3 puisque W_1, W_2, W_3 sont les projections orthogonales de K_T sur les côtés.

Les coordonnées barycentriques du point de Lemoine L^* du triangle $I_aI_bI_c$ sont, dans le repère $\{I_a, I_b, I_c\}$, $L^* = \{I_bI_c^2, I_aI_c^2, I_aI_b^2\}$, ce qui s'écrit

$$\overrightarrow{OL^*} = \frac{a^2 (1+k)^2}{4} \overrightarrow{OI_a} + \frac{b^2 (1+k)^2}{4} \overrightarrow{OI_b} + \frac{c^2 (1+k)^2}{4} \overrightarrow{OI_c}$$

Puisque

$$\overrightarrow{OI_a} = \frac{2a^2 + b^2 + c^2 + b^2 k + c^2 k}{2(a^2 + b^2 + c^2)} \overrightarrow{OA} + \frac{b^2 (1-k)}{2(a^2 + b^2 + c^2)} \overrightarrow{OB} + \frac{c^2 (1-k)}{2(a^2 + b^2 + c^2)} \overrightarrow{OC}$$

et des relations similaires pour I_b, I_c , on obtient $\overrightarrow{OL^*}$ en fonction de $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}$, soit

$$L^* = \left\{ \frac{a^2}{a^2 + b^2 + c^2}, \frac{b^2}{a^2 + b^2 + c^2}, \frac{c^2}{a^2 + b^2 + c^2} \right\}$$

qui est le point de Lemoine.

CHAPITRE

19

Changement de repère

19 Changement de repère

Les formules de changement de repère sont présentées dans le cas du plan, les formules sont semblables pour l'espace.

19.1 Formule de changement de repère dans le plan

Soient donnés un repère ABC et des points M_1, M_2, M_3 de coordonnées barycentriques $\{a_i, b_i, c_i\}$ dans ce repère, pour $i = 1, 2, 3$. On suppose que M_1, M_2, M_3 ne sont pas alignés, formant ainsi un nouveau repère. Afin d'éviter des confusions lors de la manipulation de plusieurs repères, nous indiquons les coordonnées barycentriques comme suit:

$$M_1 \{A,B,C\} = \{a_1, b_1, c_1\} \quad M_2 \{A,B,C\} = \{a_2, b_2, c_2\} \quad M_3 \{A,B,C\} = \{a_3, b_3, c_3\}$$

Exercice 19.1.1

Soit M un point de coordonnées barycentriques $\{x, y, z\}$ quelconques dans le repère ABC (donc $M \{A,B,C\} = \{x, y, z\}$). Déterminer les coordonnées barycentriques $\{x_1, y_1, z_1\}$ du point M dans le repère M_1, M_2, M_3 (c'est à dire $M \{M_1, M_2, M_3\} = \{x_1, y_1, z_1\}$).

On montrera que les coordonnées barycentriques du point M dans le repère M_1, M_2, M_3 sont

$$x_1 = \frac{(a_1 + b_1 + c_1) \begin{vmatrix} x & y & z \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}}$$

$$y_1 = \frac{(a_2 + b_2 + c_2) \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ x & y & z \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}}$$

$$z_1 = \frac{(a_3 + b_3 + c_3) \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ x & y & z \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}}$$

Solution:**Dessin** = $\{A, B, C, M, M_1, M_2, M_3\}$ Les points purs choisis sont A, B, C .Les points composés sont M, M_1, M_2, M_3 .

On a directement

$$\begin{aligned} M &= \left\{ \frac{x}{x+y+z}, \frac{y}{x+y+z}, \frac{z}{x+y+z} \right\} \\ M_1 &= \left\{ \frac{a_1}{a_1+b_1+c_1}, \frac{b_1}{a_1+b_1+c_1}, \frac{c_1}{a_1+b_1+c_1} \right\} \\ M_2 &= \left\{ \frac{a_2}{a_2+b_2+c_2}, \frac{b_2}{a_2+b_2+c_2}, \frac{c_2}{a_2+b_2+c_2} \right\} \\ M_3 &= \left\{ \frac{a_3}{a_3+b_3+c_3}, \frac{b_3}{a_3+b_3+c_3}, \frac{c_3}{a_3+b_3+c_3} \right\} \end{aligned}$$

On a, d'une part,

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OM} &= x_1 \overrightarrow{OM_1} + y_1 \overrightarrow{OM_2} + z_1 \overrightarrow{OM_3} \\ &= \frac{(a_1 \overrightarrow{OA} + b_1 \overrightarrow{OB} + c_1 \overrightarrow{OC}) x_1}{a_1 + b_1 + c_1} + \frac{(a_2 \overrightarrow{OA} + b_2 \overrightarrow{OB} + c_2 \overrightarrow{OC}) y_1}{a_2 + b_2 + c_2} + \frac{(a_3 \overrightarrow{OA} + b_3 \overrightarrow{OB} + c_3 \overrightarrow{OC}) z_1}{a_3 + b_3 + c_3} \\ &= \frac{N_1}{D} \overrightarrow{OA} + \frac{N_2}{D} \overrightarrow{OB} + \frac{N_3}{D} \overrightarrow{OC} \end{aligned}$$

avec

$$D = (a_1 + b_1 + c_1) (a_2 + b_2 + c_2) (a_3 + b_3 + c_3)$$

$$\begin{aligned} N_1 &= a_1 a_2 a_3 x_1 + a_1 a_3 b_2 x_1 + a_1 a_2 b_3 x_1 + a_1 b_2 b_3 x_1 + a_1 a_3 c_2 x_1 + a_1 b_3 c_2 x_1 + a_1 a_2 c_3 x_1 \\ &\quad + a_1 b_2 c_3 x_1 + a_1 c_2 c_3 x_1 + a_1 a_2 a_3 y_1 + a_2 a_3 b_1 y_1 + a_1 a_2 b_3 y_1 + a_2 b_1 b_3 y_1 + a_2 a_3 c_1 y_1 \\ &\quad + a_2 b_3 c_1 y_1 + a_1 a_2 c_3 y_1 + a_2 b_1 c_3 y_1 + a_2 c_1 c_3 y_1 + a_1 a_2 a_3 z_1 + a_2 a_3 b_1 z_1 + a_1 a_3 b_2 z_1 \\ &\quad + a_3 b_1 b_2 z_1 + a_2 a_3 c_1 z_1 + a_3 b_2 c_1 z_1 + a_1 a_3 c_2 z_1 + a_3 b_1 c_2 z_1 + a_3 c_1 c_2 z_1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} N_2 &= a_2 a_3 b_1 x_1 + a_3 b_1 b_2 x_1 + a_2 b_1 b_3 x_1 + b_1 b_2 b_3 x_1 + a_3 b_1 c_2 x_1 + b_1 b_3 c_2 x_1 + a_2 b_1 c_3 x_1 \\ &\quad + b_1 b_2 c_3 x_1 + b_1 c_2 c_3 x_1 + a_1 a_3 b_2 y_1 + a_3 b_1 b_2 y_1 + a_1 b_2 b_3 y_1 + b_1 b_2 b_3 y_1 + a_3 b_2 c_1 y_1 \\ &\quad + b_2 b_3 c_1 y_1 + a_1 b_2 c_3 y_1 + b_1 b_2 c_3 y_1 + b_2 c_1 c_3 y_1 + a_1 a_2 b_3 z_1 + a_2 b_1 b_3 z_1 + a_1 b_2 b_3 z_1 \\ &\quad + b_1 b_2 b_3 z_1 + a_2 b_3 c_1 z_1 + b_2 b_3 c_1 z_1 + a_1 b_3 c_2 z_1 + b_1 b_3 c_2 z_1 + b_3 c_1 c_2 z_1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} N_3 &= a_2 a_3 c_1 x_1 + a_3 b_2 c_1 x_1 + a_2 b_3 c_1 x_1 + b_2 b_3 c_1 x_1 + a_3 c_1 c_2 x_1 + b_3 c_1 c_2 x_1 + a_2 c_1 c_3 x_1 \\ &\quad + b_2 c_1 c_3 x_1 + c_1 c_2 c_3 x_1 + a_1 a_3 c_2 y_1 + a_3 b_1 c_2 y_1 + a_1 b_3 c_2 y_1 + b_1 b_3 c_2 y_1 + a_3 c_1 c_2 y_1 \\ &\quad + b_3 c_1 c_2 y_1 + a_1 c_2 c_3 y_1 + b_1 c_2 c_3 y_1 + c_1 c_2 c_3 y_1 + a_1 a_2 c_3 z_1 + a_2 b_1 c_3 z_1 + a_1 b_2 c_3 z_1 \\ &\quad + b_1 b_2 c_3 z_1 + a_2 c_1 c_3 z_1 + b_2 c_1 c_3 z_1 + a_1 c_2 c_3 z_1 + b_1 c_2 c_3 z_1 + c_1 c_2 c_3 z_1 \end{aligned}$$

D'autre part, $\overrightarrow{OM} = x \overrightarrow{OA} + y \overrightarrow{OB} + z \overrightarrow{OC}$. En résolvant le système linéaire, d'inconnues x_1, y_1, z_1

$$\begin{cases} \frac{N_1}{D} = x \\ \frac{N_2}{D} = y \\ \frac{N_3}{D} = z \end{cases}$$

on obtient

$$M_{\{M_1, M_2, M_3\}} = \left\{ \begin{aligned} & \frac{(a_1 + b_1 + c_1) (-b_3 c_2 x + b_2 c_3 x + a_3 c_2 y - a_2 c_3 y - a_3 b_2 z + a_2 b_3 z)}{- (a_3 b_2 c_1) + a_2 b_3 c_1 + a_3 b_1 c_2 - a_1 b_3 c_2 - a_2 b_1 c_3 + a_1 b_2 c_3}, \\ & - \frac{(a_2 + b_2 + c_2) (-b_3 c_1 x + b_1 c_3 x + a_3 c_1 y - a_1 c_3 y - a_3 b_1 z + a_1 b_3 z)}{- (a_3 b_2 c_1) + a_2 b_3 c_1 + a_3 b_1 c_2 - a_1 b_3 c_2 - a_2 b_1 c_3 + a_1 b_2 c_3}, \\ & - \frac{(a_3 + b_3 + c_3) (-b_2 c_1 x + b_1 c_2 x + a_2 c_1 y - a_1 c_2 y - a_2 b_1 z + a_1 b_2 z)}{a_3 b_2 c_1 - a_2 b_3 c_1 - a_3 b_1 c_2 + a_1 b_3 c_2 + a_2 b_1 c_3 - a_1 b_2 c_3} \end{aligned} \right\}$$

Ces expressions sont égales aux déterminants faisant suite à l'énoncé de l'exercice.

19.2 Exemples

Exercice 19.2.1

Soit ABC un triangle, H l'orthocentre, G le centre de gravité et J le centre du cercle inscrit. On choisit comme nouveau repère $\{M_1, M_2, M_3\} = \{H, G, J\}$.

Déterminer dans ce repère les coordonnées barycentriques normalisées des points A, B, C , du centre K du cercle circonscrit, du point de Lemoine L_0 .

Solution:

Avec les notations de l'exercice précédent, on a:

$$\begin{aligned} \{a_1, a_2, a_3\} &= \left\{ \frac{1}{-a^2 + b^2 + c^2}, \frac{1}{a^2 - b^2 + c^2}, \frac{1}{a^2 + b^2 - c^2} \right\} \\ \{b_1, b_2, b_3\} &= \{1, 1, 1\} \\ \{c_1, c_2, c_3\} &= \{a, b, c\} \end{aligned}$$

Les coordonnées du point A dans ce repère sont:

$$\left\{ \frac{(-a + b + c)(a + b - c)(a - b + c)}{2(a - b)(a - c)(a + b + c)}, \frac{3(a - b - c)(a^2 - b^2 - c^2)}{2(a - b)(a - c)(a + b + c)}, \frac{(b + c)(a^2 - b^2 - c^2)}{(a - b)(a - c)(a + b + c)} \right\}$$

Les coordonnées du point B dans ce repère sont:

$$\left\{ \frac{(-a + b + c)(a + b - c)(a - b + c)}{2(a - b)(-b + c)(a + b + c)}, \frac{-3(a - b + c)(a^2 - b^2 + c^2)}{2(a - b)(b - c)(a + b + c)}, \frac{(a + c)(a^2 - b^2 + c^2)}{(a - b)(b - c)(a + b + c)} \right\}$$

Les coordonnées du point C dans ce repère sont:

$$\left\{ \frac{(-a+b+c)(a+b-c)(a-b+c)}{2(a-c)(b-c)(a+b+c)}, \frac{3(a+b-c)(a^2+b^2-c^2)}{2(a-c)(b-c)(a+b+c)}, -\frac{(a+b)(a^2+b^2-c^2)}{(a-c)(b-c)(a+b+c)} \right\}$$

En prenant

$$X_1 = \frac{a^2(a^2-b^2-c^2)}{(a-b-c)(a+b-c)(a-b+c)(a+b+c)}$$

$$X_2 = \frac{b^2(a^2-b^2+c^2)}{(-a+b+c)(a+b-c)(a-b+c)(a+b+c)}$$

les coordonnées du point K centre du cercle circonscrit dans ce repère sont:

$$\left\{ -\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, 0 \right\}$$

(on retrouve la droite d'Euler).

Les coordonnées du point de Lemoine $L_0 = \{a^2, b^2, c^2\}$ dans ce repère sont:

$$L_0 = \left\{ \frac{(-a+b+c)(a+b-c)(a-b+c)}{2(a+b+c)(a^2+b^2+c^2)}, \right.$$

$$\frac{3(a^3-a^2b-ab^2+b^3-a^2c-2abc-b^2c-ac^2-bc^2+c^3)}{2(a+b+c)(a^2+b^2+c^2)},$$

$$\left. \frac{2(a+b)(a+c)(b+c)}{(a+b+c)(a^2+b^2+c^2)} \right\}$$

Exercice 19.2.2

Soit ABC un triangle. On choisit comme nouveau repère le triangle orthique H_1, H_2, H_3 . Déterminer dans ce repère les coordonnées barycentriques normalisées des points A, B, C , de l'orthocentre H , du centre J du cercle inscrit au triangle ABC , du centre de gravité G , du milieu du segment AB , du pied de la bissectrice issue de A , de B , de C , du point de Lemoine L_0 .

Solution:

On choisit comme repère le triangle orthique H_1, H_2, H_3 . On a donc:

$$\{a_1, a_2, a_3\} = \left\{ 0, \frac{1}{a^2-b^2+c^2}, \frac{1}{a^2+b^2-c^2} \right\}$$

$$\{b_1, b_2, b_3\} = \left\{ \frac{1}{-a^2+b^2+c^2}, 0, \frac{1}{a^2+b^2-c^2} \right\}$$

$$\{c_1, c_2, c_3\} = \left\{ \frac{1}{-a^2+b^2+c^2}, \frac{1}{a^2-b^2+c^2}, 0 \right\}$$

Les coordonnées du point A dans ce repère sont:

$$\left\{ \frac{a^2(a^2-b^2-c^2)}{(a^2+b^2-c^2)(a^2-b^2+c^2)}, \frac{b^2}{a^2+b^2-c^2}, \frac{c^2}{a^2-b^2+c^2} \right\}$$

Les coordonnées du point B dans ce repère sont:

$$\left\{ \frac{a^2}{a^2 + b^2 - c^2}, \frac{b^2 (a^2 - b^2 + c^2)}{(a^2 - b^2 - c^2) (a^2 + b^2 - c^2)}, \frac{c^2}{-a^2 + b^2 + c^2} \right\}$$

Les coordonnées du point C dans ce repère sont:

$$\left\{ \frac{a^2}{a^2 - b^2 + c^2}, \frac{b^2}{-a^2 + b^2 + c^2}, \frac{c^2 (a^2 + b^2 - c^2)}{(a^2 - b^2 - c^2) (a^2 - b^2 + c^2)} \right\}$$

Les coordonnées du point H orthocentre dans ce repère sont:

$$H = \left\{ \frac{a^2 (a^2 - b^2 - c^2)}{(a - b - c) (a + b - c) (a - b + c) (a + b + c)}, \frac{b^2 (a^2 - b^2 + c^2)}{(-a + b + c) (a + b - c) (a - b + c) (a + b + c)}, \frac{c^2 (a^2 + b^2 - c^2)}{(-a + b + c) (a + b - c) (a - b + c) (a + b + c)} \right\}$$

Les coordonnées du point J centre du cercle inscrit dans ce repère sont:

$$J = \left\{ \frac{a^2 (a^3 + a^2 b - a b^2 - b^3 + a^2 c + b^2 c - a c^2 + b c^2 - c^3)}{(a + b + c) (a^2 + b^2 - c^2) (a^2 - b^2 + c^2)}, \frac{b^2 (a^3 + a^2 b - a b^2 - b^3 - a^2 c - b^2 c - a c^2 + b c^2 + c^3)}{(a + b + c) (a^2 - b^2 - c^2) (a^2 + b^2 - c^2)}, \frac{c^2 (a^3 - a^2 b - a b^2 + b^3 + a^2 c + b^2 c - a c^2 - b c^2 - c^3)}{(a + b + c) (a^2 - b^2 - c^2) (a^2 - b^2 + c^2)} \right\}$$

Les coordonnées du point G centre de gravité dans ce repère sont:

$$\left\{ \frac{a^2 (3a^2 - b^2 - c^2)}{3(a^2 + b^2 - c^2) (a^2 - b^2 + c^2)}, \frac{b^2 (a^2 - 3b^2 + c^2)}{3(a^2 - b^2 - c^2) (a^2 + b^2 - c^2)}, \frac{c^2 (a^2 + b^2 - 3c^2)}{3(a^2 - b^2 - c^2) (a^2 - b^2 + c^2)} \right\}$$

Les coordonnées du milieu du segment AB dans ce repère sont:

$$\left\{ \frac{a^2 (a - b) (a + b)}{(a^2 + b^2 - c^2) (a^2 - b^2 + c^2)}, \frac{(a - b) b^2 (a + b)}{(a^2 - b^2 - c^2) (a^2 + b^2 - c^2)}, \frac{c^4}{(-a^2 + b^2 + c^2) (a^2 - b^2 + c^2)} \right\}$$

Les coordonnées du point de Lemoine $L_0 = \{a^2, b^2, c^2\}$ dans ce repère sont (noter l'invariance de cette valeur):

$$\left\{ \frac{a^2}{a^2 + b^2 + c^2}, \frac{b^2}{a^2 + b^2 + c^2}, \frac{c^2}{a^2 + b^2 + c^2} \right\}$$

Les coordonnées du point d'intersection de la bissectrice issue de C avec le côté AB dans ce repère sont (ici $\{X_1, X_2\} = \{\frac{a}{a+b}, \frac{b}{a+b}\}$):

$$\left\{ \frac{a^2 (a - b) (a + b - c) (a + b + c)}{(a + b) (a^2 + b^2 - c^2) (a^2 - b^2 + c^2)}, \frac{(a - b) b^2 (a + b - c) (a + b + c)}{(a + b) (a^2 - b^2 - c^2) (a^2 + b^2 - c^2)}, \frac{(a - b - c) c^2 (a - b + c)}{(a^2 - b^2 - c^2) (a^2 - b^2 + c^2)} \right\}$$

Les coordonnées du point d'intersection de la bissectrice issue de A sont:

$$\left\{ \frac{a^2(a+b-c)(a-b+c)}{(a^2+b^2-c^2)(a^2-b^2+c^2)}, \frac{b^2(a-b-c)(b-c)(a+b+c)}{(b+c)(a^2-b^2-c^2)(a^2+b^2-c^2)}, \frac{(-a+b+c)(b-c)c^2(a+b+c)}{(b+c)(a^2-b^2-c^2)(a^2-b^2+c^2)} \right\}$$

Les coordonnées du point d'intersection de la bissectrice issue de B sont:

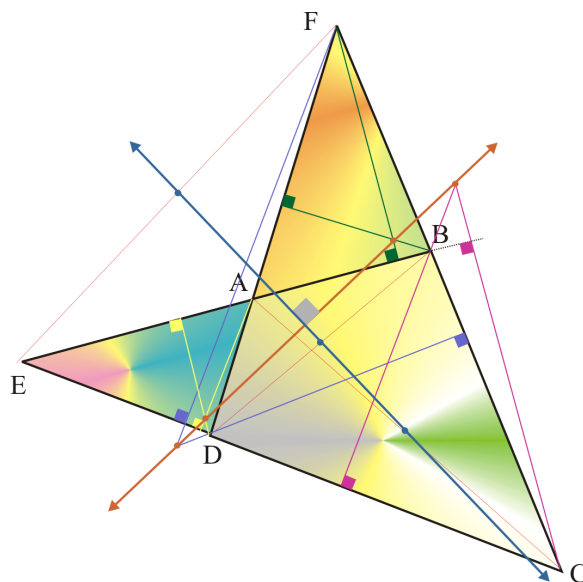
$$\left\{ \frac{a^2(a-c)(a-b+c)(a+b+c)}{(a+c)(a^2+b^2-c^2)(a^2-b^2+c^2)}, \frac{b^2(a-b-c)(a+b-c)}{(a^2-b^2-c^2)(a^2+b^2-c^2)}, \frac{(a-c)c^2(a-b+c)(a+b+c)}{(a+c)(a^2-b^2-c^2)(a^2-b^2+c^2)} \right\}$$

19.3 Droites de Gauss et d'Aubert

Exercice 19.3.1

Soit $ABCD$ un quadrilatère et E l'intersection des droites (AB) et (CD) , et F l'intersection des droites (AD) et (BC) .

1. Montrer que les milieux de $[AC]$, de $[BD]$ et de $[EF]$ sont sur une même droite (appelée droite de Gauss).
2. Montrer que les orthocentres des triangles ABF , CDF , BCE , ADE sont sur une même droite (appelée droite d'Aubert).
3. Montrer que la droite d'Aubert est orthogonale à la droite de Gauss. Calculer les coordonnées barycentriques de leur point d'intersection en fonction des coordonnées barycentriques $\{u, v, 1-u-v\}$ du point D .



Solution rapide:

Dessin $= \{A, B, C, D\}$

Le repère barycentrique choisi est A, B, C .

Les coordonnées barvcentriques du point composé D sont de la forme:

$$D = \{u, v, 1 - u - v\}$$

Dessin = Dessin $\cup \{E\} = \{A, B, C, D, E\}$

Détermination du point E :

Soit E le point $(AB) \cap (CD)$. Le point E est composé.

On obtient

$$E = \left\{ \frac{u}{u+v}, \frac{v}{u+v}, 0 \right\}$$

Dessin = Dessin $\cup \{F\} = \{A, B, C, D, E, F\}$

Détermination du point F :

Soit F le point $(AD) \cap (BC)$. Le point F est composé.

On obtient

$$F = \left\{ 0, \frac{v}{1-u}, \frac{-1+u+v}{-1+u} \right\}$$

Dessin = Dessin $\cup \{M_1, M_2, M_3\} = \{A, B, C, D, E, F, M_1, M_2, M_3\}$

Soient M_1 le milieu de $[AC]$, M_2 le milieu de $[BD]$, M_3 le milieu de $[EF]$. Les points composés sont M_1, M_2, M_3 .

Les coordonnées barvcentriques des points composés sont directement:

$$M_1 = \left\{ \frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2} \right\}$$

$$M_2 = \left\{ \frac{u}{2}, \frac{1+v}{2}, \frac{1-u-v}{2} \right\}$$

$$M_3 = \left\{ \frac{u}{2(u+v)}, \frac{v(1+v)}{2(1-u)(u+v)}, \frac{-1+u+v}{2(-1+u)} \right\}$$

On obtient directement

$$\overrightarrow{M_1 M_2} = \frac{(1-u)(u+v)}{v} \overrightarrow{M_1 M_3}$$

Dessin = Dessin $\cup \{H_1, H_2, H_3, H_4\} = \{A, B, C, D, E, F, H_1, H_2, H_3, H_4, M_1, M_2, M_3\}$

On désigne par H_1 (resp. H_2, H_3, H_4) l'orthocentre du triangle ABF (resp. CDF, BCE, ADE). Les points composés sont H_1, H_2, H_3, H_4 .

Les coordonnées barycentriques du point H_1 sont, dans le repère A, B, F

$$H_1 = \left\{ \frac{(AB^2 - AF^2 - BF^2)(AB^2 - AF^2 + BF^2)}{(AB - AF - BF)(AB + AF - BF)(AB - AF + BF)(AB + AF + BF)}, \right. \\ \frac{(AB^2 - AF^2 - BF^2)(AB^2 + AF^2 - BF^2)}{(AB - AF - BF)(AB + AF - BF)(AB - AF + BF)(AB + AF + BF)}, \\ \left. \frac{(-AB^2 AF^2 + BF^2)(AB^2 - AF^2 + BF^2)}{(AB - AF - BF)(AB + AF - BF)(AB - AF + BF)(AB + AF + BF)} \right\}$$

soit, après calcul des diverses distances

$$H_1 = \left\{ \frac{(a^2 - b^2 + c^2) (a^2 + b^2 - c^2 - a^2 u - b^2 u + c^2 u - 2 a^2 v)}{(-a - b + c) (a - b + c) (-a + b + c) (a + b + c) (-1 + u)}, \right. \\ \frac{(a^2 + b^2 - c^2 - a^2 u - b^2 u + c^2 u - 2 a^2 v) (a^2 - b^2 - c^2 - a^2 u + b^2 u + c^2 u - a^2 v + b^2 v - c^2 v)}{(-a - b + c) (a - b + c) (-a + b + c) (a + b + c) (-1 + u) (-1 + u + v)}, \\ \left. \frac{(a^2 - b^2 + c^2) (-a^2 + b^2 + c^2 + a^2 u - b^2 u - c^2 u + a^2 v - b^2 v + c^2 v)}{(-a - b + c) (a - b + c) (-a + b + c) (a + b + c) (-1 + u + v)} \right\}$$

Les coordonnées barycentriques du point H_1 deviennent, dans le repère A, B, C

$$H_1 = \left\{ \frac{(a^2 - b^2 + c^2) (-a^2 - b^2 + c^2 + a^2 u + b^2 u - c^2 u + 2 a^2 v)}{(-a + b + c) (a + b - c) (a - b + c) (a + b + c) (-1 + u)}, \right. \\ \frac{(a^2 + b^2 - c^2) (-a^2 + b^2 + c^2 + a^2 u - b^2 u - c^2 u + a^2 v - b^2 v + c^2 v)}{(a - b - c) (a + b - c) (a - b + c) (a + b + c) (-1 + u)}, \\ \left. \frac{(a^2 - b^2 + c^2) (-a^2 + b^2 + c^2 + a^2 u - b^2 u - c^2 u + a^2 v - b^2 v + c^2 v)}{(a - b - c) (a + b - c) (a - b + c) (a + b + c) (-1 + u)} \right\}$$

Par la même démarche, on obtient

$$H_2 = \left\{ \frac{(a^2 u + b^2 u - c^2 u + 2 a^2 v) (-a^2 - b^2 + c^2 + a^2 u + b^2 u - c^2 u + 2 a^2 v)}{(a - b - c) (a + b - c) (a - b + c) (a + b + c) (-1 + u)}, \right. \\ \frac{(a^2 u + b^2 u - c^2 u + 2 a^2 v) (-2 b^2 + 2 b^2 u + a^2 v + b^2 v - c^2 v)}{(-a + b + c) (a + b - c) (a - b + c) (a + b + c) (-1 + u)}, \\ \left. \frac{h_2^*}{(-a + b + c) (a + b - c) (a - b + c) (a + b + c) (-1 + u)} \right\}$$

avec

$$h_2^* = a^4 - 2 a^2 b^2 + b^4 - 2 a^2 c^2 - 2 b^2 c^2 + c^4 - 2 a^4 u + 2 a^2 b^2 u + 4 a^2 c^2 u + 2 b^2 c^2 u - 2 c^4 u \\ + a^4 u^2 - b^4 u^2 - 2 a^2 c^2 u^2 + c^4 u^2 - 2 a^4 v + 2 a^2 b^2 v + 2 a^2 c^2 v + 3 a^4 u v - 2 a^2 b^2 u v - b^4 u v \\ - 2 a^2 c^2 u v + 2 b^2 c^2 u v - c^4 u v + 2 a^4 v^2 - 2 a^2 b^2 v^2 + 2 a^2 c^2 v^2$$

$$H_3 = \left\{ \frac{(a^2 - b^2 + c^2) (a^2 u + b^2 u - c^2 u + 2 a^2 v)}{(-a + b + c) (a + b - c) (a - b + c) (a + b + c) (u + v)}, \right. \\ \frac{(a^2 - b^2 - c^2) (a^2 u + b^2 u - c^2 u + 2 a^2 v)}{(a - b - c) (a + b - c) (a - b + c) (a + b + c) (u + v)}, \\ \left. \frac{(a^2 - b^2 + c^2) (a^2 u - b^2 u - c^2 u + a^2 v - b^2 v + c^2 v)}{(a - b - c) (a + b - c) (a - b + c) (a + b + c) (u + v)} \right\}$$

$$H_4 = \left\{ \frac{h_4^*}{(a - b - c) (a + b - c) (a - b + c) (a + b + c) (u + v)}, \right. \\ \frac{(2 b^2 u + a^2 v + b^2 v - c^2 v) (-a^2 + b^2 + c^2 + a^2 u - b^2 u - c^2 u + a^2 v - b^2 v + c^2 v)}{(-a + b + c) (a + b - c) (a - b + c) (a + b + c) (u + v)}, \\ \left. \frac{(a^2 u - b^2 u - c^2 u + a^2 v - b^2 v + c^2 v) (-a^2 + b^2 + c^2 + a^2 u - b^2 u - c^2 u + a^2 v - b^2 v + c^2 v)}{(-a + b + c) (a + b - c) (a - b + c) (a + b + c) (u + v)} \right\}$$

avec

$$h_4^* = -2a^2b^2u + 2b^4u - 2b^2c^2u + a^4u^2 - b^4u^2 - 2a^2c^2u^2 + c^4u^2 - a^4v + b^4v - 2b^2c^2v + c^4v \\ + 3a^4uv - 2a^2b^2uv - b^4uv - 2a^2c^2uv + 2b^2c^2uv - c^4uv + 2a^4v^2 - 2a^2b^2v^2 + 2a^2c^2v^2$$

Calculons le vecteur $\overrightarrow{H_1H_2}$. On a :

$$\overrightarrow{H_1H_2} = g(1) \overrightarrow{OA} + g(2) \overrightarrow{OB} + g(3) \overrightarrow{OC}$$

avec

$$g(1) = \frac{(-a^2 - b^2 + c^2 + a^2u + b^2u - c^2u + 2a^2v) (a^2 - b^2 + c^2 + a^2u + b^2u - c^2u + 2a^2v)}{(a - b - c) (a + b - c) (a - b + c) (a + b + c) (-1 + u)} \\ g(2) = \frac{(-a^2 - b^2 + c^2 + a^2u + b^2u - c^2u + 2a^2v) (a^2 - b^2 - c^2 + 2b^2u + a^2v + b^2v - c^2v)}{(-a + b + c) (a + b - c) (a - b + c) (a + b + c) (-1 + u)} \\ g(3) = \frac{(-a^2 - b^2 + c^2 + a^2u + b^2u - c^2u + 2a^2v) (2c^2 + a^2u - b^2u - c^2u + a^2v - b^2v + c^2v)}{(-a + b + c) (a + b - c) (a - b + c) (a + b + c) (-1 + u)}$$

Calculons le vecteur $\overrightarrow{H_1H_3}$. On a :

$$\overrightarrow{H_1H_3} = h(1) \overrightarrow{OA} + h(2) \overrightarrow{OB} + h(3) \overrightarrow{OC}$$

avec

$$h(1) = \frac{(a^2 - b^2 + c^2) v (a^2 - b^2 + c^2 + a^2u + b^2u - c^2u + 2a^2v)}{(a - b - c) (a + b - c) (a - b + c) (a + b + c) (-1 + u) (u + v)} \\ h(2) = \frac{(a^2 - b^2 + c^2) v (a^2 - b^2 - c^2 + 2b^2u + a^2v + b^2v - c^2v)}{(-a + b + c) (a + b - c) (a - b + c) (a + b + c) (-1 + u) (u + v)} \\ h(3) = \frac{(a^2 - b^2 + c^2) v (2c^2 + a^2u - b^2u - c^2u + a^2v - b^2v + c^2v)}{(-a + b + c) (a + b - c) (a - b + c) (a + b + c) (-1 + u) (u + v)}$$

On a ainsi

$$\overrightarrow{H_1H_2} = \frac{(u + v) (-a^2 - b^2 + c^2 + a^2u + b^2u - c^2u + 2a^2v)}{(a^2 - b^2 + c^2) v} \overrightarrow{H_1H_3}$$

Calculons le vecteur $\overrightarrow{H_1H_4}$. On a :

$$\overrightarrow{H_1H_4} = i(1) \overrightarrow{OA} + i(2) \overrightarrow{OB} + i(3) \overrightarrow{OC}$$

avec

$$i(1) = \frac{u (a^2 - b^2 + c^2 + a^2u + b^2u - c^2u + 2a^2v) (-a^2 + b^2 + c^2 + a^2u - b^2u - c^2u + a^2v - b^2v + c^2v)}{(a - b - c) (a + b - c) (a - b + c) (a + b + c) (-1 + u) (u + v)} \\ i(2) = \frac{u (a^2 - b^2 - c^2 + 2b^2u + a^2v + b^2v - c^2v) (-a^2 + b^2 + c^2 + a^2u - b^2u - c^2u + a^2v - b^2v + c^2v)}{(-a + b + c) (a + b - c) (a - b + c) (a + b + c) (-1 + u) (u + v)} \\ i(3) = \frac{u (-a^2 + b^2 + c^2 + a^2u - b^2u - c^2u + a^2v - b^2v + c^2v) (2c^2 + a^2u - b^2u - c^2u + a^2v - b^2v + c^2v)}{(-a + b + c) (a + b - c) (a - b + c) (a + b + c) (-1 + u) (u + v)}$$

Calculons le vecteur $\overrightarrow{H_1H_3}$. On a :

$$\overrightarrow{H_1H_3} = j(1) \overrightarrow{OA} + j(2) \overrightarrow{OB} + j(3) \overrightarrow{OC}$$

avec

$$\begin{aligned} j(1) &= \frac{(a^2 - b^2 + c^2) v (a^2 - b^2 + c^2 + a^2 u + b^2 u - c^2 u + 2 a^2 v)}{(a - b - c) (a + b - c) (a - b + c) (a + b + c) (-1 + u) (u + v)} \\ j(2) &= \frac{(a^2 - b^2 + c^2) v (a^2 - b^2 - c^2 + 2 b^2 u + a^2 v + b^2 v - c^2 v)}{(-a + b + c) (a + b - c) (a - b + c) (a + b + c) (-1 + u) (u + v)} \\ j(3) &= \frac{(a^2 - b^2 + c^2) v (2 c^2 + a^2 u - b^2 u - c^2 u + a^2 v - b^2 v + c^2 v)}{(-a + b + c) (a + b - c) (a - b + c) (a + b + c) (-1 + u) (u + v)} \end{aligned}$$

On a ainsi

$$\overrightarrow{H_1H_4} = \frac{u (-a^2 + b^2 + c^2 + a^2 u - b^2 u - c^2 u + a^2 v - b^2 v + c^2 v)}{(a^2 - b^2 + c^2) v} \overrightarrow{H_1H_3}$$

On a

$$(-2) \overrightarrow{MH_2} \cdot \overrightarrow{M_1M_2} = \delta(M, M_1, H_2, M_2) = -H_2M_1^2 + H_2M_2^2 + MM_1^2 - MM_2^2$$

Pour le point $M = \{u, v, 1 - u - v\}$, le produit scalaire $(-2) \overrightarrow{MH_2} \cdot \overrightarrow{M_1M_2}$ prend la valeur

$$(-2) \overrightarrow{MH_2} \cdot \overrightarrow{M_1M_2} = \frac{-2b^2u + 2b^2u^2 - a^2v - b^2v + c^2v + 2a^2uv + 2b^2uv - 2c^2uv + 2a^2v^2}{2}$$

On a donc $\overrightarrow{H_1H_2} \cdot \overrightarrow{M_1M_2} = 0$.

Dessin = $\text{Dessin} \cup \{W\} = \{A, B, C, D, E, F, H_1, H_2, H_3, H_4, M_1, M_2, M_3, W\}$

Détermination du point W :

Soit W le point $(H_1H_2) \cap (M_1M_2)$. Le point W est composé.

On obtient, après calculs:

$$W = \left\{ \frac{w_1^*}{4 (-c^2 - a^2 u + b^2 u + c^2 u - b^2 u^2 - a^2 v + b^2 v - c^2 v - a^2 uv - b^2 uv + c^2 uv - a^2 v^2)}, \right. \\ \frac{(1 + v) (-a^2 + b^2 + c^2 + 2 a^2 u - 2 c^2 u + 3 a^2 v - b^2 v + c^2 v)}{4 (c^2 + a^2 u - b^2 u - c^2 u + b^2 u^2 + a^2 v - b^2 v + c^2 v + a^2 uv + b^2 uv - c^2 uv + a^2 v^2)}, \\ \left. \frac{-w_3^*}{4 (-c^2 - a^2 u + b^2 u + c^2 u - b^2 u^2 - a^2 v + b^2 v - c^2 v - a^2 uv - b^2 uv + c^2 uv - a^2 v^2)} \right\}$$

avec

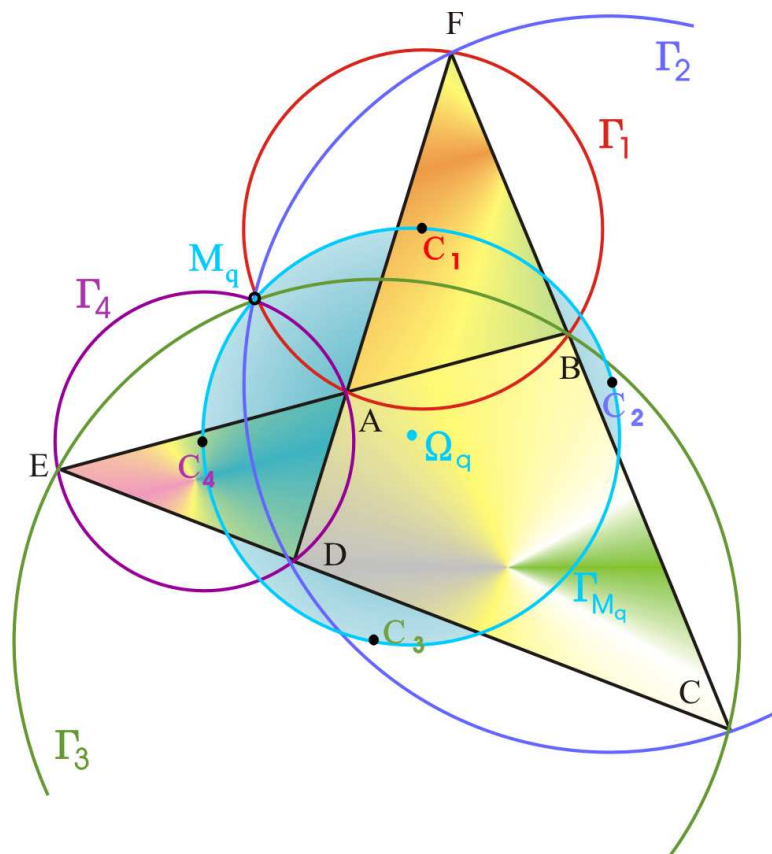
$$\begin{aligned} w_1^* &= -a^2 + b^2 - c^2 + a^2 u + b^2 u - c^2 u - 2 a^2 u^2 - 2 b^2 u^2 + 2 c^2 u^2 + a^2 v \\ &\quad + b^2 v - c^2 v - 5 a^2 uv - b^2 uv + c^2 uv - 2 a^2 v^2 \\ w_3^* &= 2 c^2 + 3 a^2 u - 3 b^2 u - 3 c^2 u - 2 a^2 u^2 + 2 b^2 u^2 + 2 c^2 u^2 + 3 a^2 v \\ &\quad - 3 b^2 v + c^2 v - 3 a^2 uv + 3 b^2 uv - c^2 uv - a^2 v^2 + b^2 v^2 - c^2 v^2 \end{aligned}$$

19.4 Point de Miquel

Exercice 19.4.1

On reprend l'énoncé précédent (droites de Gauss et d'Aubert). On désigne par Γ_1 (resp. $\Gamma_2, \Gamma_3, \Gamma_4$) les cercles circonscrits aux triangles ABF, CDF, BCE, ADE .

1. Déterminer les centres C_i des cercles Γ_i , pour $1 \leq i \leq 4$, en fonction des coordonnées barycentriques $\{u, v, 1 - u - v\}$ du point D et la valeur respective des rayons de ces cercles.
2. Montrer que les cercles Γ_i , pour $1 \leq i \leq 4$ se rencontrent en un même point M_q dont on précisera les coordonnées barycentriques (M_q est appelé Point de Miquel).
3. Montrer que les centres C_i des cercles Γ_i , pour $1 \leq i \leq 4$ sur un même cercle Γ_{M_q} dont on déterminera le centre Ω_q et le rayon. Vérifier que $M_q \in \Gamma_{M_q}$.

**Solution:**

Equation du cercle Γ_1 passant par les points A, B, F

Le centre $M = \{x, y, 1 - x, y\}$ de ce cercle doit vérifier $MA^2 - MB^2 = 0$ et $MA^2 - MF^2 = 0$, soit

$$\begin{cases} -a^2 + b^2 + (a^2 - b^2 - c^2)x + (a^2 - b^2 + c^2)y = 0 \\ (b^2 - 2b^2u + b^2u^2 - a^2v^2) + \\ (-2b^2 + 4b^2u - 2b^2u^2 + a^2v + b^2v - c^2v - a^2uv - b^2uv + c^2uv)x + \\ (-a^2 - b^2 + c^2 + 2a^2u + 2b^2u - 2c^2u - a^2u^2 - b^2u^2 + c^2u^2 + 2a^2v - 2a^2uv)y = 0 \end{cases}$$

La résolution de ce système linéaire donne

$$x = \frac{a^2 (-a^2 + b^2 + c^2 + a^2u - b^2u - c^2u + a^2v - b^2v + c^2v)}{(a - b - c)(a + b - c)(a - b + c)(a + b + c)(-1 + u)}$$

$$y = \frac{-a^2b^2 + b^4 - b^2c^2 + a^2b^2u - b^4u + b^2c^2u + a^4v - a^2b^2v - a^2c^2v}{(-a + b + c)(a + b - c)(a - b + c)(a + b + c)(-1 + u)}$$

Les coordonnées du centre C_1 sont ainsi

$$C_1 = \left\{ \frac{a^2 (-a^2 + b^2 + c^2 + a^2u - b^2u - c^2u + a^2v - b^2v + c^2v)}{(a - b - c)(a + b - c)(a - b + c)(a + b + c)(-1 + u)}, \right. \\ \frac{-a^2b^2 + b^4 - b^2c^2 + a^2b^2u - b^4u + b^2c^2u + a^4v - a^2b^2v - a^2c^2v}{(-a + b + c)(a + b - c)(a - b + c)(a + b + c)(-1 + u)}, \\ \left. \frac{c^2 (-a^2 - b^2 + c^2 + a^2u + b^2u - c^2u + 2a^2v)}{(-a + b + c)(a + b - c)(a - b + c)(a + b + c)(-1 + u)} \right\}$$

Le rayon au carré de ce cercle a pour valeur

$$R_{ABF}^2 = \frac{a^2c^2 (b^2 - 2b^2u + b^2u^2 - a^2v - b^2v + c^2v + a^2uv + b^2uv - c^2uv + a^2v^2)}{(-a + b + c)(a + b - c)(a - b + c)(a + b + c)(-1 + u)^2}$$

Un point $M = \{X, Y, Z\}$ appartient à ce cercle si et seulement si sa distance (au carré) au centre est égale à cette valeur, soit

$$0 = -c^2XY + c^2uXY - b^2XZ + b^2uXZ + a^2vXZ - a^2YZ + a^2uYZ + a^2vYZ + a^2vZ^2$$

Equation du cercle Γ_2 passant par les points C, D, F

Les calculs sont identiques.

Les coordonnées du centre C_2 sont ainsi

$$C_2 = \left\{ \frac{a^2 (-2b^2u + 2b^2u^2 - a^2v - b^2v + c^2v + 2a^2uv + 2b^2uv - 2c^2uv + 2a^2v^2)}{(-a + b + c)(a + b - c)(a - b + c)(a + b + c)(-1 + u)}, \right. \\ \frac{C_2^*}{(a - b - c)(a + b - c)(a - b + c)(a + b + c)(-1 + u)}, \\ \left. \frac{C_2^{**}}{(a - b - c)(a + b - c)(a - b + c)(a + b + c)(-1 + u)} \right\}$$

avec

$$C_2^* = -a^2b^2u - b^4u + b^2c^2u + a^2b^2u^2 + b^4u^2 - b^2c^2u^2 - a^4v - b^4v + 2a^2c^2v \\ + 2b^2c^2v - c^4v + a^4uv + 2a^2b^2uv + b^4uv - 2a^2c^2uv - 2b^2c^2uv + c^4uv \\ + a^4v^2 + a^2b^2v^2 - a^2c^2v^2$$

$$\begin{aligned}
C_2^{**} = & -a^4 + 2a^2b^2 - b^4 + 2a^2c^2 + 2b^2c^2 - c^4 + a^4u - 3a^2b^2u + 2b^4u - 2a^2c^2u - 3b^2c^2u \\
& + c^4u + a^2b^2u^2 - b^4u^2 + b^2c^2u^2 - a^2b^2v + b^4v - a^2c^2v - 2b^2c^2v + c^4v + a^4uv \\
& - b^4uv + 2b^2c^2uv - c^4uv + a^4v^2 - a^2b^2v^2 + a^2c^2v^2
\end{aligned}$$

Le rayon au carré de ce cercle a pour valeur

$$R_{CDF}^2 = \frac{a^2 (b^2 u^2 + a^2 uv + b^2 uv - c^2 uv + a^2 v^2) r_{CDF}^*}{(-a + b + c) (a + b - c) (a - b + c) (a + b + c) (-1 + u)^2}$$

avec

$$r_{CDF}^* = b^2 - 2b^2u + b^2u^2 - a^2v - b^2v + c^2v + a^2uv + b^2uv - c^2uv + a^2v^2$$

Un point $M = \{X, Y, Z\}$ appartient à ce cercle si et seulement si sa distance (au carré) au centre est égale à cette valeur, soit

$$\begin{aligned}
0 = & b^2 X^2 - 2b^2 u X^2 + b^2 u^2 X^2 - a^2 v X^2 - b^2 v X^2 + c^2 v X^2 + a^2 uv X^2 + b^2 uv X^2 - c^2 uv X^2 \\
& + b^2 XY - c^2 XY - a^2 u XY - 2b^2 u XY + c^2 u XY + b^2 u^2 XY - 2a^2 v XY - b^2 v XY + c^2 v XY \\
& - c^2 uv XY + a^2 v^2 X^2 + a^2 XY + a^2 v^2 XY + a^2 Y^2 - a^2 u Y^2 - a^2 v Y^2 - b^2 u XZ + b^2 u^2 XZ - a^2 v XZ \\
& + a^2 uv XZ + b^2 uv XZ - c^2 uv XZ + a^2 v^2 XZ - a^2 v YZ - b^2 v XZ + c^2 v XZ + b^2 uv XY + a^2 uv XY
\end{aligned}$$

Equation du cercle Γ_3 passant par les points B, C, E

Les calculs sont identiques.

Les coordonnées du centre C_3 sont ainsi

$$\begin{aligned}
C_3 = \{ & \frac{a^2 (a^2 u - b^2 u - c^2 u + a^2 v - b^2 v + c^2 v)}{(a - b - c) (a + b - c) (a - b + c) (a + b + c) (u + v)}, \\
& \frac{a^2 b^2 u - b^4 u + b^2 c^2 u + a^2 b^2 v - b^4 v + a^2 c^2 v + 2b^2 c^2 v - c^4 v}{(-a + b + c) (a + b - c) (a - b + c) (a + b + c) (u + v)}, \\
& \frac{c^2 (a^2 u + b^2 u - c^2 u + 2a^2 v)}{(-a + b + c) (a + b - c) (a - b + c) (a + b + c) (u + v)} \}
\end{aligned}$$

Le rayon au carré de ce cercle a pour valeur

$$R_{BCE}^2 = \frac{a^2 c^2 (b^2 u^2 + a^2 uv + b^2 uv - c^2 uv + a^2 v^2)}{(-a + b + c) (a + b - c) (a - b + c) (a + b + c) (u + v)^2}$$

Un point $M = \{X, Y, Z\}$ appartient à ce cercle si et seulement si sa distance (au carré) au centre est égale à cette valeur, soit

$$0 = -c^2 v X^2 + c^2 u XY + b^2 u XZ + b^2 v XZ - c^2 v XZ + a^2 u YZ + a^2 v YZ$$

Equation du cercle Γ_4 passant par les points A, D, E

Les calculs sont identiques.

Les coordonnées du centre C_4 sont ainsi

$$\begin{aligned}
C_4 = \{ & \frac{C_4^*}{(-a + b + c) (a + b - c) (a - b + c) (a + b + c) (u + v)}, \\
& \frac{C_4^{**}}{(a - b - c) (a + b - c) (a - b + c) (a + b + c) (u + v)}, \\
& \frac{c^2 (-2b^2 u + 2b^2 u^2 - a^2 v - b^2 v + c^2 v + 2a^2 uv + 2b^2 uv - 2c^2 uv + 2a^2 v^2)}{(a - b - c) (a + b - c) (a - b + c) (a + b + c) (u + v)} \}
\end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned} C_4^{**} &= -a^4 u + a^2 b^2 u + 2a^2 c^2 u + b^2 c^2 u - c^4 u + a^2 b^2 u^2 - b^4 u^2 + b^2 c^2 u^2 - a^4 v \\ &\quad + a^2 b^2 v + a^2 c^2 v + a^4 uv - b^4 uv + 2b^2 c^2 uv - c^4 uv + a^4 v^2 - a^2 b^2 v^2 + a^2 c^2 v^2 \\ C_4^{**} &= -a^2 b^2 u + b^4 u + b^2 c^2 u + a^2 b^2 u^2 - b^4 u^2 - b^2 c^2 u^2 - a^2 b^2 v + b^4 v - b^2 c^2 v \\ &\quad + a^4 uv - b^4 uv - 2a^2 c^2 uv + c^4 uv + a^4 v^2 - a^2 b^2 v^2 - a^2 c^2 v^2 \end{aligned}$$

Le rayon au carré de ce cercle a pour valeur

$$R_{ADE}^2 = \frac{c^2 (b^2 u^2 + a^2 uv + b^2 uv - c^2 uv + a^2 v^2) r_{ADE}^*}{(-a + b + c) (a + b - c) (a - b + c) (a + b + c) (u + v)^2}$$

avec

$$r_{ADE}^* = b^2 - 2b^2 u + b^2 u^2 - a^2 v - b^2 v + c^2 v + a^2 uv + b^2 uv - c^2 uv + a^2 v^2$$

Un point $M = \{X, Y, Z\}$ appartient à ce cercle si et seulement si sa distance (au carré) au centre est égale à cette valeur, soit

$$\begin{aligned} 0 &= c^2 v X Y - c^2 u Y^2 + b^2 u X Z - b^2 u^2 X Z + b^2 v X Z - a^2 u v X Z - b^2 u v X Z + c^2 u v X Z \\ &\quad - a^2 v^2 X Z + a^2 u Y Z - c^2 u Y Z - b^2 u^2 Y Z + a^2 v Y Z - a^2 u v Y Z - b^2 u v Y Z + c^2 u v Y Z \\ &\quad - a^2 v^2 Y Z - b^2 u^2 Z^2 - a^2 u v Z^2 - b^2 u v Z^2 + c^2 u v Z^2 - a^2 v^2 Z^2 \end{aligned}$$

L'équation du cercle Γ_1 implique

$$X = \frac{a^2 Y Z - a^2 u Y Z - a^2 v Y Z - a^2 v Z^2}{-c^2 Y + c^2 u Y - b^2 Z + b^2 u Z + a^2 v Z}$$

En substituant cette valeur dans les équations des cercles Γ_2 et Γ_3 , on obtient

$$-c^2 Y + c^2 u Y - b^2 u Z + b^2 u^2 Z - b^2 v Z + c^2 v Z + a^2 u v Z + b^2 u v Z - c^2 u v Z + a^2 v^2 Z = 0$$

qui implique

$$Z = \frac{c^2 Y - c^2 u Y}{-b^2 u + b^2 u^2 - b^2 v + c^2 v + a^2 uv + b^2 uv - c^2 uv + a^2 v^2}$$

On forme alors le point $M = \{X, Y, Z\}$ avec les valeurs obtenues, Y étant a priori indéterminé. Les coordonnées barycentriques normalisées de M font disparaître Y et on obtient

$$\begin{aligned} M_q &= \left\{ \frac{a^2 (u + v)}{c^2 + a^2 u - b^2 u - c^2 u + b^2 u^2 + a^2 v - b^2 v + c^2 v + a^2 uv + b^2 uv - c^2 uv + a^2 v^2}, \right. \\ &\quad \frac{-b^2 u + b^2 u^2 - b^2 v + c^2 v + a^2 uv + b^2 uv - c^2 uv + a^2 v^2}{c^2 + a^2 u - b^2 u - c^2 u + b^2 u^2 + a^2 v - b^2 v + c^2 v + a^2 uv + b^2 uv - c^2 uv + a^2 v^2}, \\ &\quad \left. \frac{c^2 (-1 + u)}{-c^2 - a^2 u + b^2 u + c^2 u - b^2 u^2 - a^2 v + b^2 v - c^2 v - a^2 uv - b^2 uv + c^2 uv - a^2 v^2} \right\} \end{aligned}$$

On vérifie par l'ordinateur que M_q satisfait l'équation du cercle Γ_4 .

Equation du cercle Γ_{M_q} passant par les points C_1, C_2, C_3

Les coordonnées du centre Ω_q sont

$$\begin{aligned} \Omega_q &= \left\{ \frac{\omega_1 a^2}{(-a + b + c) (a + b - c) (a - b + c) (a + b + c) (-1 + u) (u + v)}, \right. \\ &\quad \frac{\omega_2}{(a - b - c) (a + b - c) (a - b + c) (a + b + c) (-1 + u) (u + v)}, \\ &\quad \left. \frac{\omega_3 c^2}{(a - b - c) (a + b - c) (a - b + c) (a + b + c) (-1 + u) (u + v)} \right\} \end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned}
 \omega_1 &= a^2 u - b^2 u - c^2 u - a^2 u^2 + c^2 u^2 + b^2 u^3 + a^2 v - b^2 v - 2 a^2 u v + a^2 u^2 v \\
 &\quad + 2 b^2 u^2 v - c^2 u^2 v - a^2 v^2 + 2 a^2 u v^2 + b^2 u v^2 - c^2 u v^2 + a^2 v^3 \\
 \omega_2 &= a^2 b^2 u - b^4 u - 2 a^2 b^2 u^2 + b^4 u^2 + b^2 c^2 u^2 + a^2 b^2 u^3 - b^2 c^2 u^3 + a^2 b^2 v - b^4 v + b^2 c^2 v \\
 &\quad - a^4 u v - 2 a^2 b^2 u v + b^4 u v + 2 a^2 c^2 u v - c^4 u v + a^4 u^2 v + 2 a^2 b^2 u^2 v - 2 a^2 c^2 u^2 v \\
 &\quad - b^2 c^2 u^2 v + c^4 u^2 v - a^4 v^2 + 2 a^2 c^2 v^2 + 2 a^4 u v^2 + a^2 b^2 u v^2 - 2 a^2 c^2 u v^2 + a^4 v^3 \\
 \omega_3 &= a^2 u + 2 b^2 u - c^2 u - a^2 u^2 - 3 b^2 u^2 + c^2 u^2 + b^2 u^3 + 2 a^2 v + b^2 v - c^2 v - 4 a^2 u v \\
 &\quad - 2 b^2 u v + 2 c^2 u v + a^2 u^2 v + b^2 u^2 v - c^2 u^2 v - 2 a^2 v^2 + a^2 u v^2
 \end{aligned}$$

Le rayon au carré de ce cercle a pour valeur

$$\begin{aligned}
 R_{C_1 C_2 C_3}^2 &= \frac{a^2 c^2 (b^2 u^2 + a^2 u v + b^2 u v - c^2 u v + a^2 v^2) r_{C_1 C_2 C_3}^*}{(a - b - c)^2 (a + b - c)^2 (a - b + c)^2 (a + b + c)^2 (-1 + u)^2 (u + v)^2} \\
 r_{C_1 C_2 C_3}^* &= (b^2 - 2 b^2 u + b^2 u^2 - a^2 v - b^2 v + c^2 v + a^2 u v + b^2 u v - c^2 u v + a^2 v^2) \cdot \\
 &\quad (c^2 + a^2 u - b^2 u - c^2 u + b^2 u^2 + a^2 v - b^2 v + c^2 v + a^2 u v + b^2 u v - c^2 u v + a^2 v^2)
 \end{aligned}$$

L'égalité $\Omega_q M_q^2 = \Omega_q C_1^2 = R_{C_1 C_2 C_3}^2$ est immédiate par l'ordinateur.

CHAPITRE

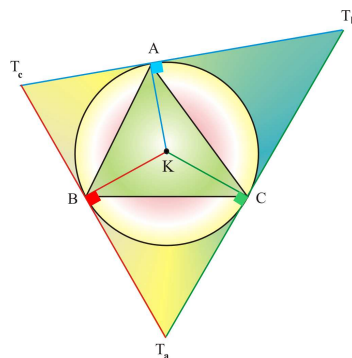
20

Triangle tangentiel

20 Triangle tangentiel

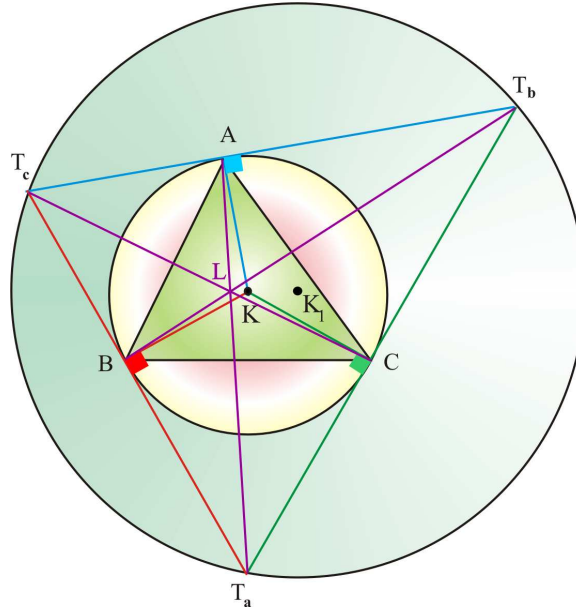
20.1 Triangle tangentiel

Etant donné un triangle ABC , on appelle *triangle tangentiel* le triangle de sommets T_a, T_b, T_c tel que le cercle inscrit au triangle $T_a T_b T_c$ soit égal au cercle circonscrit au triangle ABC . Il suit que nous construisons les points T_a, T_b, T_c comme intersection des tangentes au cercle circonscrit au triangle ABC , ces tangentes étant issues des points A, B, C .

**Exercice 20.1.1**

Soit ABC un triangle, $T_a T_b T_c$ le triangle tangentiel qui lui est associé. Soit K (resp. K_1) le centre du cercle circonscrit au triangle ABC (resp. $T_a T_b T_c$).

1. Déterminer les coordonnées barycentriques des points T_a, T_b, T_c .
2. Montrer que les droites (AT_a) , (BT_b) , (CT_c) se coupent au point de Lemoine du triangle ABC .
3. Soient les points $L_1 = (AB) \cap (T_a T_b)$, $L_2 = (BC) \cap (T_b T_c)$, $L_3 = (AC) \cap (T_a T_c)$. Montrer que ces points sont alignés (Honsberger 1995). Calculer $L_1 L_2^2$, $L_1 L_3^2$, $L_2 L_3^2$.
4. Calculer les distances $T_a T_b^2$, $T_a T_c^2$, $T_b T_c^2$. En déduire les coordonnées barycentriques du point K_1 dans le repère $\{T_a, T_b, T_c\}$, puis dans le repère $\{A, B, C\}$. Déterminer le rayon du cercle circonscrit au triangle tangentiel $T_a T_b T_c$.
5. On désigne par G le centre de gravité du triangle ABC . Montrer que les points G, K, K_1 sont alignés (K_1 appartient donc à la droite d'Euler du triangle ABC - Kimberling 1994).

**Solution:**

Nous déterminons d'abord des points A_0, B_0, C_0 situés sur les tangentes au cercle circonscrit (tangentes issues des sommets du triangle ABC).

Dessin = $\{A, A_0, B, B_0, C, C_0, K\}$

Le repère barycentrique choisi est A, B, C .

Les points composés sont K, A_0, B_0, C_0 .

Les coordonnées barycentriques du point K sont:

$$K = \left\{ \frac{a^2 (a^2 - b^2 - c^2)}{(a - b - c) (a + b - c) (a - b + c) (a + b + c)}, \frac{b^2 (-a^2 + b^2 - c^2)}{(-a + b - c) (a + b - c) (-a + b + c) (a + b + c)}, \frac{c^2 (a^2 + b^2 - c^2)}{(-a + b + c) (a + b - c) (a - b + c) (a + b + c)} \right\}$$

Un point A_0 situé sur la perpendiculaire à (AK) passant par A est

$$A_0 = \{1 + b^2 - c^2, -b^2, c^2\}$$

Un point B_0 situé sur la perpendiculaire à (BK) passant par B est

$$B_0 = \{a^2, 1 - a^2 + c^2, -c^2\}$$

Un point C_0 situé sur la perpendiculaire à (CK) passant par C est

$$C_0 = \{-a^2, b^2, 1 + a^2 - b^2\}$$

Dessin = Dessin $\cup \{T_a\} = \{A, A_0, B, B_0, C, C_0, K, T_a\}$

Détermination du point T_a :

Soit T_a le point $(CC_0) \cap (BB_0)$. Le point T_a est composé.

Comme $T_a \in (CC_0)$, on a, en choisissant l'inconnue ν_1

$$\overrightarrow{OT_a} = \nu_1 \overrightarrow{OC} + (1 - \nu_1) \overrightarrow{OC_0}$$

On déduit:

$$\overrightarrow{OT_a} = a(1) \overrightarrow{OA} + a(2) \overrightarrow{OB} + a(3) \overrightarrow{OC}$$

avec

$$a(1) = a^2 (-1 + \nu_1)$$

$$a(2) = b^2 (1 - \nu_1)$$

$$a(3) = 1 + a^2 - b^2 - a^2 \nu_1 + b^2 \nu_1$$

Comme $T_a \in (BB_0)$, on a, en choisissant l'inconnue μ_1

$$\overrightarrow{OT_a} = \mu_1 \overrightarrow{OB} + (1 - \mu_1) \overrightarrow{OB_0}$$

On déduit:

$$\overrightarrow{OT_a} = b(1) \overrightarrow{OA} + b(2) \overrightarrow{OB} + b(3) \overrightarrow{OC}$$

avec

$$b(1) = a^2 (1 - \mu_1)$$

$$b(2) = 1 - a^2 + c^2 + a^2 \mu_1 - c^2 \mu_1$$

$$b(3) = c^2 (-1 + \mu_1)$$

La résolution du système linéaire d'inconnues ν_1, μ_1 donne

$$\nu_1 = \frac{1 + a^2 - b^2 - c^2}{a^2 - b^2 - c^2} \quad \mu_1 = \frac{1 - a^2 + b^2 + c^2}{-a^2 + b^2 + c^2}$$

On déduit que:

$$T_a = \left\{ \frac{a^2}{a^2 - b^2 - c^2}, \frac{b^2}{-a^2 + b^2 + c^2}, \frac{c^2}{-a^2 + b^2 + c^2} \right\}$$

Dessin = Dessin $\cup \{T_b\} = \{A, A_0, B, B_0, C, C_0, K, T_a, T_b\}$

Détermination du point T_b :

Soit T_b le point $(CC_0) \cap (AA_0)$. Le point T_b est composé.

Comme $T_b \in (CC_0)$, on a, en choisissant l'inconnue ν_1

$$\overrightarrow{OT_b} = \nu_1 \overrightarrow{OC} + (1 - \nu_1) \overrightarrow{OC_0}$$

On déduit:

$$\overrightarrow{OT_b} = c(1) \overrightarrow{OA} + c(2) \overrightarrow{OB} + c(3) \overrightarrow{OC}$$

avec

$$c(1) = a^2 (-1 + \nu_1)$$

$$c(2) = b^2 (1 - \nu_1)$$

$$c(3) = 1 + a^2 - b^2 - a^2 \nu_1 + b^2 \nu_1$$

Comme $T_b \in (AA_0)$, on a, en choisissant l'inconnue μ_1

$$\overrightarrow{OT_b} = \mu_1 \overrightarrow{OA} + (1 - \mu_1) \overrightarrow{OA_0}$$

On déduit:

$$\overrightarrow{OT_b} = d(1) \overrightarrow{OA} + d(2) \overrightarrow{OB} + d(3) \overrightarrow{OC}$$

avec

$$d(1) = 1 + b^2 - c^2 - b^2 \mu_1 + c^2 \mu_1$$

$$d(2) = b^2 (-1 + \mu_1)$$

$$d(3) = c^2 (1 - \mu_1)$$

La résolution du système linéaire d'inconnues ν_1, μ_1 donne

$$\nu_1 = \frac{1 + a^2 - b^2 + c^2}{a^2 - b^2 + c^2} \quad \mu_1 = \frac{-1 + a^2 - b^2 + c^2}{a^2 - b^2 + c^2}$$

On déduit que:

$$T_b = \left\{ \frac{a^2}{a^2 - b^2 + c^2}, \frac{b^2}{-a^2 + b^2 - c^2}, \frac{c^2}{a^2 - b^2 + c^2} \right\}$$

Dessin = Dessin $\cup \{T_c\} = \{A, A_0, B, B_0, C, C_0, K, T_a, T_b, T_c\}$

Détermination du point T_c :

Soit T_c le point $(BB_0) \cap (AA_0)$. Le point T_c est composé.

Comme $T_c \in (BB_0)$, on a, en choisissant l'inconnue ν_1

$$\overrightarrow{OT_c} = \nu_1 \overrightarrow{OB} + (1 - \nu_1) \overrightarrow{OB_0}$$

On déduit:

$$\overrightarrow{OT_c} = e(1) \overrightarrow{OA} + e(2) \overrightarrow{OB} + e(3) \overrightarrow{OC}$$

avec

$$e(1) = a^2 (-1 + \nu_1)$$

$$e(2) = 1 - a^2 + c^2 + a^2 \nu_1 - c^2 \nu_1$$

$$e(3) = c^2 (-1 + \nu_1)$$

Comme $T_c \in (AA_0)$, on a, en choisissant l'inconnue μ_1

$$\overrightarrow{OT_c} = \mu_1 \overrightarrow{OA} + (1 - \mu_1) \overrightarrow{OA_0}$$

On déduit:

$$\overrightarrow{OT_c} = f(1) \overrightarrow{OA} + f(2) \overrightarrow{OB} + f(3) \overrightarrow{OC}$$

avec

$$f(1) = 1 + b^2 - c^2 - b^2 \mu_1 + c^2 \mu_1$$

$$f(2) = b^2 (-1 + \mu_1)$$

$$f(3) = c^2 (1 - \mu_1)$$

La résolution du système linéaire d'inconnues ν_1, μ_1 donne

$$\nu_1 = \frac{-1 + a^2 + b^2 - c^2}{a^2 + b^2 - c^2} \quad \mu_1 = \frac{1 + a^2 + b^2 - c^2}{a^2 + b^2 - c^2}$$

On déduit que:

$$T_c = \left\{ \frac{a^2}{a^2 + b^2 - c^2}, \frac{b^2}{a^2 + b^2 - c^2}, \frac{c^2}{-a^2 - b^2 + c^2} \right\}$$

Dessin = Dessin $\cup \{W\} = \{A, A_0, B, B_0, C, C_0, K, T_a, T_b, T_c, W\}$

Détermination du point W :

Soit W le point $(AT_a) \cap (BT_b)$. Le point W est composé.

Comme $W \in (AT_a)$, on a, en choisissant l'inconnue ν_1

$$\overrightarrow{OW} = \nu_1 \overrightarrow{OA} + (1 - \nu_1) \overrightarrow{OT_a}$$

On déduit:

$$\overrightarrow{OW} = g(1) \overrightarrow{OA} + g(2) \overrightarrow{OB} + g(3) \overrightarrow{OC}$$

avec

$$\begin{aligned} g(1) &= \frac{a^2 - b^2 \nu_1 - c^2 \nu_1}{a^2 - b^2 - c^2} \\ g(2) &= \frac{b^2 (-1 + \nu_1)}{a^2 - b^2 - c^2} \\ g(3) &= \frac{c^2 (-1 + \nu_1)}{a^2 - b^2 - c^2} \end{aligned}$$

Comme $W \in (BT_b)$, on a, en choisissant l'inconnue μ_1

$$\overrightarrow{OW} = \mu_1 \overrightarrow{OB} + (1 - \mu_1) \overrightarrow{OT_b}$$

On déduit:

$$\overrightarrow{OW} = h(1) \overrightarrow{OA} + h(2) \overrightarrow{OB} + h(3) \overrightarrow{OC}$$

avec

$$\begin{aligned} h(1) &= \frac{a^2 (1 - \mu_1)}{a^2 - b^2 + c^2} \\ h(2) &= \frac{-b^2 + a^2 \mu_1 + c^2 \mu_1}{a^2 - b^2 + c^2} \\ h(3) &= \frac{c^2 (1 - \mu_1)}{a^2 - b^2 + c^2} \end{aligned}$$

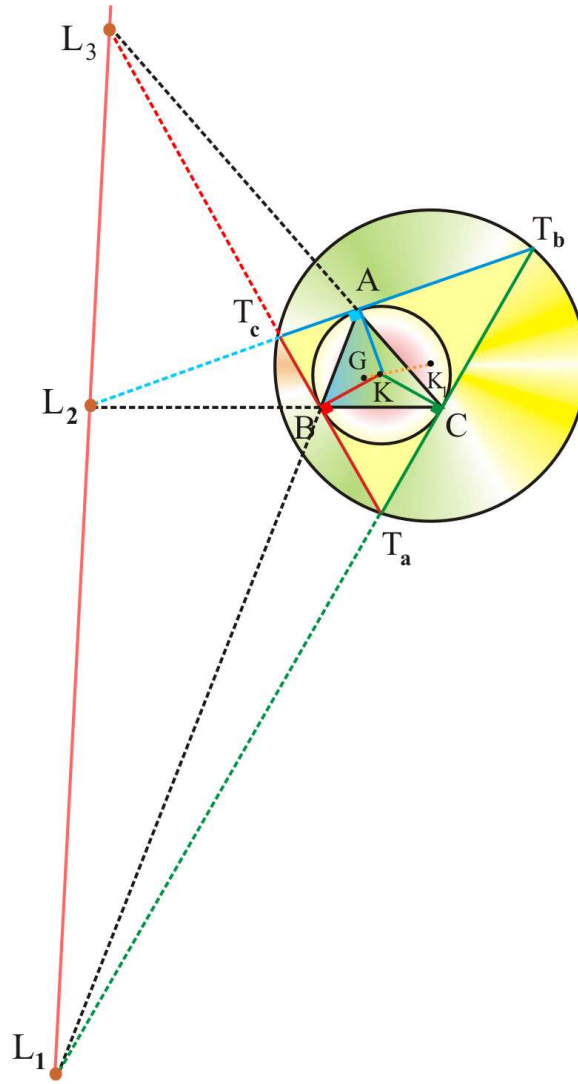
La résolution du système linéaire d'inconnues ν_1, μ_1 donne

$$\nu_1 = \frac{2a^2}{a^2 + b^2 + c^2} \quad \mu_1 = \frac{2b^2}{a^2 + b^2 + c^2}$$

On déduit que:

$$W = \left\{ \frac{a^2}{a^2 + b^2 + c^2}, \frac{b^2}{a^2 + b^2 + c^2}, \frac{c^2}{a^2 + b^2 + c^2} \right\}$$

On obtient le point de Lemoine. On procède de même pour les autres intersections.



Dessin = Dessin $\cup \{L_1\} = \{A, A_0, B, B_0, C, C_0, K, L_1, T_a, T_b, T_c, W\}$

Détermination du point L_1 :

Soit L_1 le point $(AB) \cap (T_a T_b)$. Le point L_1 est composé.

Comme $L_1 \in (AB)$, on a, en choisissant l'inconnue ν_1

$$\overrightarrow{OL_1} = \nu_1 \overrightarrow{OA} + (1 - \nu_1) \overrightarrow{OB}$$

Comme $L_1 \in (T_a T_b)$, on a, en choisissant l'inconnue μ_1

$$\overrightarrow{OL_1} = \mu_1 \overrightarrow{OT_a} + (1 - \mu_1) \overrightarrow{OT_b}$$

On déduit:

$$\overrightarrow{OL_1} = j(1) \overrightarrow{OA} + j(2) \overrightarrow{OB} + j(3) \overrightarrow{OC}$$

avec

$$j(1) = \frac{a^2 (a^2 - b^2 - c^2 + 2c^2 \mu_1)}{(a^2 - b^2 - c^2) (a^2 - b^2 + c^2)}$$

$$j(2) = \frac{b^2 (-a^2 + b^2 + c^2 - 2c^2 \mu_1)}{(a^2 - b^2 - c^2) (a^2 - b^2 + c^2)}$$

$$j(3) = \frac{c^2 (-a^2 + b^2 + c^2 + 2a^2 \mu_1 - 2b^2 \mu_1)}{(-a^2 + b^2 + c^2) (a^2 - b^2 + c^2)}$$

La résolution du système linéaire d'inconnues ν_1, μ_1 donne

$$\nu_1 = \frac{a^2}{a^2 - b^2} \quad \mu_1 = \frac{(a^2 - b^2 - c^2)}{2(a^2 - b^2)}$$

On déduit que:

$$L_1 = \left\{ \frac{a^2}{(a-b)(a+b)}, \frac{b^2}{(-a+b)(a+b)}, 0 \right\}$$

Dessin = Dessin $\cup \{L_2\} = \{A, A_0, B, B_0, C, C_0, K, L_1, L_2, T_a, T_b, T_c, W\}$

Détermination du point L_2 :

Soit L_2 le point $(BC) \cap (T_b T_c)$. Le point L_2 est composé.

Comme $L_2 \in (BC)$, on a, en choisissant l'inconnue ν_1

$$\overrightarrow{OL_2} = \nu_1 \overrightarrow{OB} + (1 - \nu_1) \overrightarrow{OC}$$

Comme $L_2 \in (T_b T_c)$, on a, en choisissant l'inconnue μ_1

$$\overrightarrow{OL_2} = \mu_1 \overrightarrow{OT_b} + (1 - \mu_1) \overrightarrow{OT_c}$$

On déduit:

$$\overrightarrow{OL_2} = l(1) \overrightarrow{OA} + l(2) \overrightarrow{OB} + l(3) \overrightarrow{OC}$$

avec

$$l(1) = \frac{a^2 (a^2 - b^2 + c^2 + 2b^2 \mu_1 - 2c^2 \mu_1)}{(a^2 + b^2 - c^2) (a^2 - b^2 + c^2)}$$

$$l(2) = \frac{b^2 (a^2 - b^2 + c^2 - 2a^2 \mu_1)}{(a^2 + b^2 - c^2) (a^2 - b^2 + c^2)}$$

$$l(3) = \frac{c^2 (-a^2 + b^2 - c^2 + 2a^2 \mu_1)}{(a^2 + b^2 - c^2) (a^2 - b^2 + c^2)}$$

La résolution du système linéaire d'inconnues ν_1, μ_1 donne

$$\nu_1 = \frac{b^2}{b^2 - c^2} \quad \mu_1 = \frac{a^2 - b^2 + c^2}{-2b^2 + 2c^2}$$

On déduit que:

$$L_2 = \left\{ 0, \frac{b^2}{(b-c)(b+c)}, \frac{c^2}{(-b+c)(b+c)} \right\}$$

Dessin = Dessin $\cup \{L_3\} = \{A, A_0, B, B_0, C, C_0, K, L_1, L_2, L_3, T_a, T_b, T_c, W\}$

Détermination du point L_3 :

Soit L_3 le point $(AC) \cap (T_a T_c)$. Le point L_3 est composé.

Comme $L_3 \in (AC)$, on a, en choisissant l'inconnue ν_1

$$\overrightarrow{OL_3} = \nu_1 \overrightarrow{OA} + (1 - \nu_1) \overrightarrow{OC}$$

Comme $L_3 \in (T_a T_c)$, on a, en choisissant l'inconnue μ_1

$$\overrightarrow{OL_3} = \mu_1 \overrightarrow{OT_a} + (1 - \mu_1) \overrightarrow{OT_c}$$

On déduit:

$$\overrightarrow{OL_3} = n(1) \overrightarrow{OA} + n(2) \overrightarrow{OB} + n(3) \overrightarrow{OC}$$

avec

$$\begin{aligned} n(1) &= \frac{a^2 (a^2 - b^2 - c^2 + 2b^2 \mu_1)}{(a^2 - b^2 - c^2) (a^2 + b^2 - c^2)} \\ n(2) &= \frac{b^2 (-a^2 + b^2 + c^2 + 2a^2 \mu_1 - 2c^2 \mu_1)}{(-a^2 + b^2 + c^2) (a^2 + b^2 - c^2)} \\ n(3) &= \frac{c^2 (a^2 - b^2 - c^2 + 2b^2 \mu_1)}{(-a^2 + b^2 + c^2) (a^2 + b^2 - c^2)} \end{aligned}$$

La résolution du système linéaire d'inconnues ν_1, μ_1 donne

$$\nu_1 = \frac{a^2}{a^2 - c^2} \quad \mu_1 = \frac{(a^2 - b^2 - c^2)}{2(a^2 - c^2)}$$

On déduit que:

$$L_3 = \left\{ \frac{a^2}{(a-c)(a+c)}, 0, \frac{c^2}{(-a+c)(a+c)} \right\}$$

Calculons le vecteur $\overrightarrow{L_1 L_2}$. On a:

$$\overrightarrow{L_1 L_2} = o(1) \overrightarrow{OA} + o(2) \overrightarrow{OB} + o(3) \overrightarrow{OC}$$

avec

$$\begin{aligned} o(1) &= \frac{-a^2}{(a-b)(a+b)} \\ o(2) &= \frac{b^2 (a-c)(a+c)}{(a-b)(a+b)(b-c)(b+c)} \\ o(3) &= \frac{c^2}{(-b+c)(b+c)} \end{aligned}$$

Calculons le vecteur $\overrightarrow{L_1 L_3}$. On a:

$$\overrightarrow{L_1 L_3} = p(1) \overrightarrow{OA} + p(2) \overrightarrow{OB} + p(3) \overrightarrow{OC}$$

avec

$$\begin{aligned} p(1) &= \frac{-a^2 (b-c)(b+c)}{(a-b)(a+b)(a-c)(a+c)} \\ p(2) &= \frac{b^2}{(a-b)(a+b)} \\ p(3) &= \frac{c^2}{(-a+c)(a+c)} \end{aligned}$$

On a ainsi

$$\overrightarrow{L_1 L_2} = \frac{-a^2 + c^2}{-b^2 + c^2} \overrightarrow{L_1 L_3}$$

On a alors

$$\begin{aligned} L_1 L_2^2 &= \frac{a^2 b^2 c^2 (a^4 - a^2 b^2 + b^4 - a^2 c^2 - b^2 c^2 + c^4)}{(a-b)^2 (a+b)^2 (b-c)^2 (b+c)^2} \\ L_1 L_3^2 &= \frac{a^2 b^2 c^2 (a^4 - a^2 b^2 + b^4 - a^2 c^2 - b^2 c^2 + c^4)}{(a-b)^2 (a+b)^2 (a-c)^2 (a+c)^2} \\ L_2 L_3^2 &= \frac{a^2 b^2 c^2 (a^4 - a^2 b^2 + b^4 - a^2 c^2 - b^2 c^2 + c^4)}{(a-c)^2 (b-c)^2 (a+c)^2 (b+c)^2} \end{aligned}$$

La distance $T_b T_c^2$ est égale à

$$T_b T_c^2 = \frac{4 a^4 b^2 B C^2 c^2}{(a^2 + b^2 - c^2)^2 (a^2 - b^2 + c^2)^2} + \frac{4 a^4 A B^2 b^2 (b-c) (b+c)}{(a^2 + b^2 - c^2)^2 (a^2 - b^2 + c^2)^2} - \frac{4 a^4 A C^2 (b-c) c^2 (b+c)}{(a^2 + b^2 - c^2)^2 (a^2 - b^2 + c^2)^2}$$

soit

$$T_b T_c^2 = \frac{4 a^6 b^2 c^2}{(a^2 + b^2 - c^2)^2 (a^2 - b^2 + c^2)^2}$$

La distance $T_a T_c^2$ est égale à

$$T_a T_c^2 = \frac{4 a^2 A C^2 b^4 c^2}{(a^2 - b^2 - c^2)^2 (a^2 + b^2 - c^2)^2} + \frac{4 a^2 A B^2 b^4 (a-c) (a+c)}{(a^2 - b^2 - c^2)^2 (a^2 + b^2 - c^2)^2} - \frac{4 b^4 B C^2 (a-c) c^2 (a+c)}{(a^2 - b^2 - c^2)^2 (a^2 + b^2 - c^2)^2}$$

soit

$$T_a T_c^2 = \frac{4 a^2 b^6 c^2}{(a^2 - b^2 - c^2)^2 (a^2 + b^2 - c^2)^2}$$

La distance $T_a T_b^2$ est égale à

$$\begin{aligned} T_a T_b^2 &= \frac{4 a^2 A B^2 b^2 c^4}{(-a^2 + b^2 - c^2)^2 (-a^2 + b^2 + c^2)^2} - \frac{4 a^2 A C^2 (-a+b) (a+b) c^4}{(-a^2 + b^2 - c^2)^2 (-a^2 + b^2 + c^2)^2} \\ &\quad + \frac{4 b^2 (-a+b) (a+b) B C^2 c^4}{(-a^2 + b^2 - c^2)^2 (-a^2 + b^2 + c^2)^2} \end{aligned}$$

soit

$$T_a T_b^2 = \frac{4 a^2 b^2 c^6}{(a^2 - b^2 - c^2)^2 (a^2 - b^2 + c^2)^2}$$

Dessin = Dessin $\cup \{G, K_1\} = \{A, A_0, B, B_0, C, C_0, G, K, K_1, L_1, L_2, L_3, T_a, T_b, T_c, W\}$

Le repère barycentrique choisi est A, B, C .

Les points composés sont K_1, G .

Les coordonnées barycentriques de K_1 dans le repère $\{T_a, T_b, T_c\}$ sont

$$\begin{aligned} K_1 = \{ & \frac{T_b T_c^2 (-T_a T_b^2 - T_a T_c^2 + T_b T_c^2)}{T_a T_b^4 - 2 T_a T_b^2 T_a T_c^2 + T_a T_c^4 - 2 T_a T_b^2 T_b T_c^2 - 2 T_a T_c^2 T_b T_c^2 + T_b T_c^4}, \\ & \frac{T_a T_c^2 (-T_a T_b^2 + T_a T_c^2 - T_b T_c^2)}{T_a T_b^4 - 2 T_a T_b^2 T_a T_c^2 + T_a T_c^4 - 2 T_a T_b^2 T_b T_c^2 - 2 T_a T_c^2 T_b T_c^2 + T_b T_c^4}, \\ & \frac{T_a T_b^2 (T_a T_b^2 - T_a T_c^2 - T_b T_c^2)}{T_a T_b^4 - 2 T_a T_b^2 T_a T_c^2 + T_a T_c^4 - 2 T_a T_b^2 T_b T_c^2 - 2 T_a T_c^2 T_b T_c^2 + T_b T_c^4} \} \end{aligned}$$

soit

$$K_1 = \left\{ \frac{a^4 (a^4 - 2a^2b^2 + b^4 - 2a^2c^2 + c^4)}{(a-b-c)(a+b-c)(a-b+c)(a+b+c)(a^2+b^2-c^2)(a^2-b^2+c^2)}, \right. \\ \frac{b^4 (a^4 - 2a^2b^2 + b^4 - 2b^2c^2 + c^4)}{(-a+b+c)(a+b-c)(a-b+c)(a+b+c)(a^2-b^2-c^2)(a^2+b^2-c^2)}, \\ \left. \frac{c^4 (a^4 + b^4 - 2a^2c^2 - 2b^2c^2 + c^4)}{(-a+b+c)(a+b-c)(a-b+c)(a+b+c)(a^2-b^2-c^2)(a^2-b^2+c^2)} \right\}$$

Ainsi, $\overrightarrow{OK_1} = x^* \overrightarrow{OT_a} + y^* \overrightarrow{OT_b} + z^* \overrightarrow{OT_c}$, les quantités x^*, y^*, z^* étant les coordonnées barycentriques mentionnées. En substituant les coordonnées barycentriques des points T_a, T_b, T_c dans l'expression vectorielle, on obtient $\overrightarrow{OK_1}$ en fonction de $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}$, soit

$$K_1 = \left\{ \frac{a^2 (a^8 - 2a^6b^2 + 2a^2b^6 - b^8 - 2a^6c^2 + 2b^6c^2 - 2b^4c^4 + 2a^2c^6 + 2b^2c^6 - c^8)}{(a-b-c)(a+b-c)(a-b+c)(a+b+c)(a^2-b^2-c^2)(a^2+b^2-c^2)(a^2-b^2+c^2)}, \right. \\ \frac{b^2 (-a^8 + 2a^6b^2 - 2a^2b^6 + b^8 + 2a^6c^2 - 2b^6c^2 - 2a^4c^4 + 2a^2c^6 + 2b^2c^6 - c^8)}{(-a+b-c)(a+b-c)(-a+b+c)(a+b+c)(-a^2+b^2-c^2)(a^2+b^2-c^2)(-a^2+b^2+c^2)}, \\ \left. \frac{c^2 (a^8 - 2a^6b^2 + 2a^4b^4 - 2a^2b^6 + b^8 - 2a^6c^2 - 2b^6c^2 + 2a^2c^6 + 2b^2c^6 - c^8)}{(-a+b+c)(a+b-c)(a-b+c)(a+b+c)(a^2-b^2-c^2)(a^2+b^2-c^2)(a^2-b^2+c^2)} \right\}$$

$$G = \left\{ \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3} \right\}$$

Calculons le vecteur $\overrightarrow{GK}$. On a:

$$\overrightarrow{GK} = q(1) \overrightarrow{OA} + q(2) \overrightarrow{OB} + q(3) \overrightarrow{OC}$$

avec

$$q(1) = \frac{2a^4 - a^2b^2 - b^4 - a^2c^2 + 2b^2c^2 - c^4}{3(a-b-c)(a+b-c)(a-b+c)(a+b+c)} \\ q(2) = \frac{-(a^4 + a^2b^2 - 2b^4 - 2a^2c^2 + b^2c^2 + c^4)}{3(a-b-c)(a+b-c)(a-b+c)(a+b+c)} \\ q(3) = \frac{-(a^4 - 2a^2b^2 + b^4 + a^2c^2 + b^2c^2 - 2c^4)}{3(a-b-c)(a+b-c)(a-b+c)(a+b+c)}$$

Calculons le vecteur $\overrightarrow{GK_1}$. On a:

$$\overrightarrow{GK_1} = r(1) \overrightarrow{OA} + r(2) \overrightarrow{OB} + r(3) \overrightarrow{OC}$$

avec

$$r(1) = \frac{(2a^4 - a^2b^2 - b^4 - a^2c^2 + 2b^2c^2 - c^4) r^*}{3(a-b-c)(a+b-c)(a-b+c)(a+b+c)(a^2-b^2-c^2)(a^2+b^2-c^2)(a^2-b^2+c^2)} \\ r(2) = \frac{(a^4 + a^2b^2 - 2b^4 - 2a^2c^2 + b^2c^2 + c^4) r^*}{3(-a+b+c)(a+b-c)(a-b+c)(a+b+c)(a^2-b^2-c^2)(a^2+b^2-c^2)(a^2-b^2+c^2)} \\ r(3) = \frac{(a^4 - 2a^2b^2 + b^4 + a^2c^2 + b^2c^2 - 2c^4) r^*}{3(-a+b+c)(a+b-c)(a-b+c)(a+b+c)(a^2-b^2-c^2)(a^2+b^2-c^2)(a^2-b^2+c^2)}$$

avec

$$r^* = (a^6 - a^4 b^2 - a^2 b^4 + b^6 - a^4 c^2 - 4 a^2 b^2 c^2 - b^4 c^2 - a^2 c^4 - b^2 c^4 + c^6)$$

On a ainsi

$$\overrightarrow{GK} = \frac{a^6 - a^4 b^2 - a^2 b^4 + b^6 - a^4 c^2 + 2 a^2 b^2 c^2 - b^4 c^2 - a^2 c^4 - b^2 c^4 + c^6}{a^6 - a^4 b^2 - a^2 b^4 + b^6 - a^4 c^2 - 4 a^2 b^2 c^2 - b^4 c^2 - a^2 c^4 - b^2 c^4 + c^6} \overrightarrow{GK_1}$$

Le rayon (au carré) du cercle circonscrit au triangle tangentiel $T_a T_b T_c$ est

$$T_a K_1^2 = \frac{-4 a^6 b^6 c^6}{(a-b-c)(a+b-c)(a-b+c)(a+b+c)(a^2-b^2-c^2)^2(a^2+b^2-c^2)^2(a^2-b^2+c^2)^2}$$

On a alors

$$GK_1^2 = \frac{Cste^2 (a^6 - a^4 b^2 - a^2 b^4 + b^6 - a^4 c^2 + 3 a^2 b^2 c^2 - b^4 c^2 - a^2 c^4 - b^2 c^4 + c^6)}{9 (a-b+c)(a+b-c)(-a+b+c)(a+b+c)(-a^2+b^2-c^2)^2(a^2+b^2-c^2)^2(-a^2+b^2+c^2)^2}$$

avec

$$\begin{aligned} Cste &= (a^6 - a^4 b^2 - a^2 b^4 + b^6 - a^4 c^2 - 4 a^2 b^2 c^2 - b^4 c^2 - a^2 c^4 - b^2 c^4 + c^6) \\ KK_1^2 &= \frac{4 a^4 b^4 c^4 (a^6 - a^4 b^2 - a^2 b^4 + b^6 - a^4 c^2 + 3 a^2 b^2 c^2 - b^4 c^2 - a^2 c^4 - b^2 c^4 + c^6)}{(-a+b+c)(a+b-c)(a-b+c)(a+b+c)(a^2-b^2-c^2)^2(a^2+b^2-c^2)^2(a^2-b^2+c^2)^2} \\ GK^2 &= \frac{-a^6 + a^4 b^2 + a^2 b^4 - b^6 + a^4 c^2 - 3 a^2 b^2 c^2 + b^4 c^2 + a^2 c^4 + b^2 c^4 - c^6}{9 (-a+b-c)(a+b-c)(-a+b+c)(a+b+c)} \end{aligned}$$

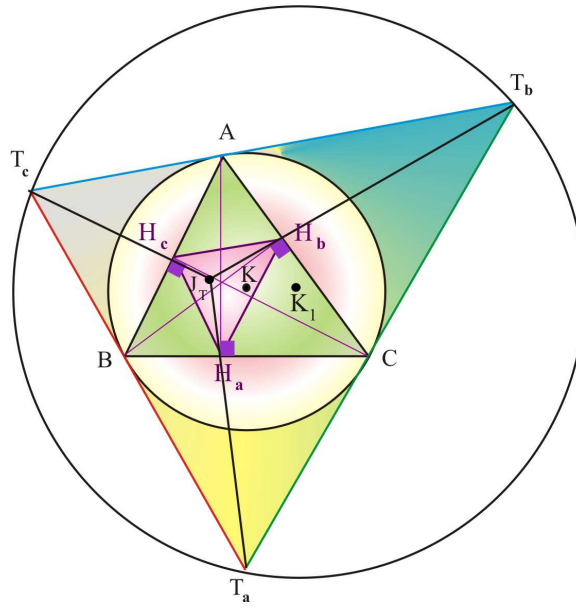
20.2 Centre d'homothétie

Exercice 20.2.1

Soit ABC un triangle, $T_a T_b T_c$ le triangle tangentiel et $H_a H_b H_c$ le triangle orthique (formé avec les pieds H_a, H_b, H_c des hauteurs du triangle ABC).

1. Montrer que les côtés du triangle orthique sont parallèles aux côtés du triangle tangentiel (Johnson 1929).
2. Montrer que les droites $(H_a T_a)$, $(H_b T_b)$, $(H_c T_c)$ se coupent en un même point J_T dont on calculera les coordonnées barycentriques.
3. Montrer que les triangles orthique et tangentiel sont homothétiques. Calculer le rapport de cette homothétie.
4. Comparer les vecteurs $\overrightarrow{J_T K}$ et $\overrightarrow{J_T K_1}$.
5. Calculer les distances $J_T K^2$, $J_T K_1^2$, $J_T G^2$, GK_1^2 , G désignant le centre de gravité du triangle ABC .

Rappelons que K (resp. K_1) est le centre du cercle circonscrit au triangle ABC (resp. $T_a T_b T_c$).

**Solution:**

Dessin = $\{A, B, C, H_a, H_b, H_c, K, T_a, T_b, T_c\}$

Le repère barycentrique choisi est A, B, C .

Les points composés sont $K, T_a, T_b, T_c, H_a, H_b, H_c$.

Les coordonnées barycentriques des points K, T_a, T_b, T_c sont décrites dans l'exercice précédent:

On a aussi:

$$H_a = \left\{0, \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2a^2}, \frac{a^2 - b^2 + c^2}{2a^2}\right\}$$

$$H_b = \left\{\frac{a^2 + b^2 - c^2}{2b^2}, 0, \frac{-a^2 + b^2 + c^2}{2b^2}\right\}$$

$$H_c = \left\{\frac{a^2 - b^2 + c^2}{2c^2}, \frac{-a^2 + b^2 + c^2}{2c^2}, 0\right\}$$

Calculons le vecteur $\overrightarrow{T_a T_b}$. On a:

$$\overrightarrow{T_a T_b} = a(1) \overrightarrow{OA} + a(2) \overrightarrow{OB} + a(3) \overrightarrow{OC}$$

avec

$$a(1) = \frac{-2a^2c^2}{(a^2 - b^2 - c^2)(a^2 - b^2 + c^2)}$$

$$a(2) = \frac{2b^2c^2}{(-a^2 + b^2 - c^2)(-a^2 + b^2 + c^2)}$$

$$a(3) = \frac{2(a-b)(a+b)c^2}{(a^2 - b^2 - c^2)(a^2 - b^2 + c^2)}$$

Calculons le vecteur $\overrightarrow{H_a H_b}$. On a:

$$\overrightarrow{H_a H_b} = b(1) \overrightarrow{OA} + b(2) \overrightarrow{OB} + b(3) \overrightarrow{OC}$$

avec

$$\begin{aligned} b(1) &= \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2b^2} \\ b(2) &= \frac{-a^2 - b^2 + c^2}{2a^2} \\ b(3) &= \frac{(-a+b)(a+b)(a^2+b^2-c^2)}{2a^2b^2} \end{aligned}$$

On a ainsi

$$\overrightarrow{T_a T_b} = \frac{-4a^2b^2c^2}{a^6 - a^4b^2 - a^2b^4 + b^6 - a^4c^2 + 2a^2b^2c^2 - b^4c^2 - a^2c^4 - b^2c^4 + c^6} \overrightarrow{H_a H_b}$$

Calculons le vecteur $\overrightarrow{T_b T_c}$. On a :

$$\overrightarrow{T_b T_c} = c(1) \overrightarrow{OA} + c(2) \overrightarrow{OB} + c(3) \overrightarrow{OC}$$

avec

$$\begin{aligned} c(1) &= \frac{-2a^2(b-c)(b+c)}{(a^2+b^2-c^2)(a^2-b^2+c^2)} \\ c(2) &= \frac{2a^2b^2}{(a^2+b^2-c^2)(a^2-b^2+c^2)} \\ c(3) &= \frac{-2a^2c^2}{(a^2+b^2-c^2)(a^2-b^2+c^2)} \end{aligned}$$

Calculons le vecteur $\overrightarrow{H_b H_c}$. On a :

$$\overrightarrow{H_b H_c} = d(1) \overrightarrow{OA} + d(2) \overrightarrow{OB} + d(3) \overrightarrow{OC}$$

avec

$$\begin{aligned} d(1) &= \frac{(-b+c)(b+c)(-a^2+b^2+c^2)}{2b^2c^2} \\ d(2) &= \frac{-a^2+b^2+c^2}{2c^2} \\ d(3) &= \frac{a^2-b^2-c^2}{2b^2} \end{aligned}$$

On a ainsi

$$\overrightarrow{T_b T_c} = \frac{-4a^2b^2c^2}{a^6 - a^4b^2 - a^2b^4 + b^6 - a^4c^2 + 2a^2b^2c^2 - b^4c^2 - a^2c^4 - b^2c^4 + c^6} \overrightarrow{H_b H_c}$$

Le calcul relatif aux côtés $(T_a T_c)$ et $(H_a H_c)$ est identique.

Dessin = Dessin $\cup \{J_T\} = \{A, B, C, H_a, H_b, H_c, J_T, K, T_a, T_b, T_c\}$

Détermination du point J_T :

Soit J_T le point $(H_a T_a) \cap (H_b T_b)$. Le point J_T est composé.

Comme $J_T \in (H_a T_a)$, on a, en choisissant l'inconnue ν_1

$$\overrightarrow{OJ_T} = \nu_1 \overrightarrow{OH_a} + (1 - \nu_1) \overrightarrow{OT_a}$$

On déduit:

$$\overrightarrow{OJ_T} = e(1) \overrightarrow{OA} + e(2) \overrightarrow{OB} + e(3) \overrightarrow{OC}$$

avec

$$\begin{aligned} e(1) &= \frac{a^2 (1 - \nu_1)}{a^2 - b^2 - c^2} \\ e(2) &= \frac{-2 a^2 b^2 + a^4 \nu_1 + 2 a^2 b^2 \nu_1 - b^4 \nu_1 - 2 a^2 c^2 \nu_1 + c^4 \nu_1}{2 a^2 (a^2 - b^2 - c^2)} \\ e(3) &= \frac{-2 a^2 c^2 + a^4 \nu_1 - 2 a^2 b^2 \nu_1 + b^4 \nu_1 + 2 a^2 c^2 \nu_1 - c^4 \nu_1}{2 a^2 (a^2 - b^2 - c^2)} \end{aligned}$$

Comme $J_T \in (H_b T_b)$, on a, en choisissant l'inconnue μ_1

$$\overrightarrow{OJ_T} = \mu_1 \overrightarrow{OH_b} + (1 - \mu_1) \overrightarrow{OT_b}$$

On déduit:

$$\overrightarrow{OJ_T} = f(1) \overrightarrow{OA} + f(2) \overrightarrow{OB} + f(3) \overrightarrow{OC}$$

avec

$$\begin{aligned} f(1) &= \frac{-2 a^2 b^2 - a^4 \mu_1 + 2 a^2 b^2 \mu_1 + b^4 \mu_1 - 2 b^2 c^2 \mu_1 + c^4 \mu_1}{2 b^2 (-a^2 + b^2 - c^2)} \\ f(2) &= \frac{b^2 (1 - \mu_1)}{-a^2 + b^2 - c^2} \\ f(3) &= \frac{-2 b^2 c^2 + a^4 \mu_1 - 2 a^2 b^2 \mu_1 + b^4 \mu_1 + 2 b^2 c^2 \mu_1 - c^4 \mu_1}{2 b^2 (-a^2 + b^2 - c^2)} \end{aligned}$$

La résolution du système linéaire d'inconnues ν_1, μ_1 donne

$$\begin{aligned} \nu_1 &= \frac{4 a^2 b^2 c^2}{a^6 - a^4 b^2 - a^2 b^4 + b^6 - a^4 c^2 + 6 a^2 b^2 c^2 - b^4 c^2 - a^2 c^4 - b^2 c^4 + c^6} \\ \mu_1 &= \frac{4 a^2 b^2 c^2}{a^6 - a^4 b^2 - a^2 b^4 + b^6 - a^4 c^2 + 6 a^2 b^2 c^2 - b^4 c^2 - a^2 c^4 - b^2 c^4 + c^6} \end{aligned}$$

On déduit que:

$$J_T = \left\{ \frac{a^2 (a^2 + b^2 - c^2) (a^2 - b^2 + c^2)}{a^6 - a^4 b^2 - a^2 b^4 + b^6 - a^4 c^2 + 6 a^2 b^2 c^2 - b^4 c^2 - a^2 c^4 - b^2 c^4 + c^6}, \right. \\ \left. \frac{b^2 (a^2 + b^2 - c^2) (-a^2 + b^2 + c^2)}{a^6 - a^4 b^2 - a^2 b^4 + b^6 - a^4 c^2 + 6 a^2 b^2 c^2 - b^4 c^2 - a^2 c^4 - b^2 c^4 + c^6}, \right. \\ \left. \frac{c^2 (a^2 - b^2 + c^2) (-a^2 + b^2 + c^2)}{a^6 - a^4 b^2 - a^2 b^4 + b^6 - a^4 c^2 + 6 a^2 b^2 c^2 - b^4 c^2 - a^2 c^4 - b^2 c^4 + c^6} \right\}$$

Dessin = Dessin $\cup \{J_{T_1}\} = \{A, B, C, H_a, H_b, H_c, J_T, J_{T_1}, K, T_a, T_b, T_c\}$

Détermination du point J_{T_1} :

Soit J_{T_1} le point $(H_a T_a) \cap (H_c T_c)$. Le point J_{T_1} est composé.

Comme $J_{T_1} \in (H_a T_a)$, on a, en choisissant l'inconnue ν_1

$$\overrightarrow{OJ_{T_1}} = \nu_1 \overrightarrow{OH_a} + (1 - \nu_1) \overrightarrow{OT_a}$$

On déduit:

$$\overrightarrow{OJ_{T_1}} = g(1) \overrightarrow{OA} + g(2) \overrightarrow{OB} + g(3) \overrightarrow{OC}$$

avec

$$\begin{aligned} g(1) &= \frac{a^2 (1 - \nu_1)}{a^2 - b^2 - c^2} \\ g(2) &= \frac{-2a^2 b^2 + a^4 \nu_1 + 2a^2 b^2 \nu_1 - b^4 \nu_1 - 2a^2 c^2 \nu_1 + c^4 \nu_1}{2a^2 (a^2 - b^2 - c^2)} \\ g(3) &= \frac{-2a^2 c^2 + a^4 \nu_1 - 2a^2 b^2 \nu_1 + b^4 \nu_1 + 2a^2 c^2 \nu_1 - c^4 \nu_1}{2a^2 (a^2 - b^2 - c^2)} \end{aligned}$$

Comme $J_{T_1} \in (H_c T_c)$, on a, en choisissant l'inconnue μ_1

$$\overrightarrow{OJ_{T_1}} = \mu_1 \overrightarrow{OH_c} + (1 - \mu_1) \overrightarrow{OT_c}$$

On déduit:

$$\overrightarrow{OJ_{T_1}} = h(1) \overrightarrow{OA} + h(2) \overrightarrow{OB} + h(3) \overrightarrow{OC}$$

avec

$$\begin{aligned} h(1) &= \frac{-2a^2 c^2 - a^4 \mu_1 + b^4 \mu_1 + 2a^2 c^2 \mu_1 - 2b^2 c^2 \mu_1 + c^4 \mu_1}{2c^2 (-a^2 - b^2 + c^2)} \\ h(2) &= \frac{-2b^2 c^2 + a^4 \mu_1 - b^4 \mu_1 - 2a^2 c^2 \mu_1 + 2b^2 c^2 \mu_1 + c^4 \mu_1}{2c^2 (-a^2 - b^2 + c^2)} \\ h(3) &= \frac{c^2 (1 - \mu_1)}{-a^2 - b^2 + c^2} \end{aligned}$$

La résolution du système linéaire d'inconnues ν_1, μ_1 donne

$$\begin{aligned} \nu_1 &= \frac{4a^2 b^2 c^2}{a^6 - a^4 b^2 - a^2 b^4 + b^6 - a^4 c^2 + 6a^2 b^2 c^2 - b^4 c^2 - a^2 c^4 - b^2 c^4 + c^6} \\ \mu_1 &= \frac{4a^2 b^2 c^2}{a^6 - a^4 b^2 - a^2 b^4 + b^6 - a^4 c^2 + 6a^2 b^2 c^2 - b^4 c^2 - a^2 c^4 - b^2 c^4 + c^6} \end{aligned}$$

On déduit que:

$$\begin{aligned} J_{T_1} = \{ & \frac{a^2 (a^2 + b^2 - c^2) (a^2 - b^2 + c^2)}{a^6 - a^4 b^2 - a^2 b^4 + b^6 - a^4 c^2 + 6a^2 b^2 c^2 - b^4 c^2 - a^2 c^4 - b^2 c^4 + c^6}, \\ & \frac{b^2 (a^2 + b^2 - c^2) (-a^2 + b^2 + c^2)}{a^6 - a^4 b^2 - a^2 b^4 + b^6 - a^4 c^2 + 6a^2 b^2 c^2 - b^4 c^2 - a^2 c^4 - b^2 c^4 + c^6}, \\ & \frac{c^2 (a^2 - b^2 + c^2) (-a^2 + b^2 + c^2)}{a^6 - a^4 b^2 - a^2 b^4 + b^6 - a^4 c^2 + 6a^2 b^2 c^2 - b^4 c^2 - a^2 c^4 - b^2 c^4 + c^6} \} \end{aligned}$$

On a donc $J_T = J_{T_1}$, donc les droites $(H_a T_a)$, $(H_b T_b)$, $(H_c T_c)$ se coupent en un même point J_T .
Calculons le vecteur $\overrightarrow{J_T H_a}$. On a:

$$\overrightarrow{J_T H_a} = i(1) \overrightarrow{OA} + i(2) \overrightarrow{OB} + i(3) \overrightarrow{OC}$$

avec

$$\begin{aligned} i(1) &= \frac{-a^2 (a^2 + b^2 - c^2) (a^2 - b^2 + c^2)}{a^6 - a^4 b^2 - a^2 b^4 + b^6 - a^4 c^2 + 6 a^2 b^2 c^2 - b^4 c^2 - a^2 c^4 - b^2 c^4 + c^6} \\ i(2) &= \frac{(a^2 + b^2 - c^2) (a^2 - b^2 + c^2) (a^4 + 2 a^2 b^2 - b^4 - 2 a^2 c^2 + c^4)}{2 a^2 (a^6 - a^4 b^2 - a^2 b^4 + b^6 - a^4 c^2 + 6 a^2 b^2 c^2 - b^4 c^2 - a^2 c^4 - b^2 c^4 + c^6)} \\ i(3) &= \frac{(a^2 + b^2 - c^2) (a^2 - b^2 + c^2) (a^4 - 2 a^2 b^2 + b^4 + 2 a^2 c^2 - c^4)}{2 a^2 (a^6 - a^4 b^2 - a^2 b^4 + b^6 - a^4 c^2 + 6 a^2 b^2 c^2 - b^4 c^2 - a^2 c^4 - b^2 c^4 + c^6)} \end{aligned}$$

Calculons le vecteur $\overrightarrow{J_T T_a}$. On a:

$$\overrightarrow{J_T T_a} = j(1) \overrightarrow{OA} + j(2) \overrightarrow{OB} + j(3) \overrightarrow{OC}$$

avec

$$\begin{aligned} j(1) &= \frac{4 a^4 b^2 c^2}{(a^2 - b^2 - c^2) (a^6 - a^4 b^2 - a^2 b^4 + b^6 - a^4 c^2 + 6 a^2 b^2 c^2 - b^4 c^2 - a^2 c^4 - b^2 c^4 + c^6)} \\ j(2) &= \frac{-2 b^2 c^2 (-a^4 - 2 a^2 b^2 + b^4 + 2 a^2 c^2 - c^4)}{(-a^2 + b^2 + c^2) (a^6 - a^4 b^2 - a^2 b^4 + b^6 - a^4 c^2 + 6 a^2 b^2 c^2 - b^4 c^2 - a^2 c^4 - b^2 c^4 + c^6)} \\ j(3) &= \frac{2 b^2 c^2 (a^4 - 2 a^2 b^2 + b^4 + 2 a^2 c^2 - c^4)}{(-a^2 + b^2 + c^2) (a^6 - a^4 b^2 - a^2 b^4 + b^6 - a^4 c^2 + 6 a^2 b^2 c^2 - b^4 c^2 - a^2 c^4 - b^2 c^4 + c^6)} \end{aligned}$$

On a ainsi

$$\overrightarrow{J_T H_a} = \frac{(-a^2 + b^2 + c^2) (a^4 - b^4 + 2 b^2 c^2 - c^4)}{4 a^2 b^2 c^2} \overrightarrow{J_T T_a}$$

ce qui fournit le rapport de l'homothétie de centre J_T .

Dessin = Dessin $\cup \{G, K_1\} = \{A, B, C, G, H_a, H_b, H_c, J_T, J_{T_1}, K, K_1, T_a, T_b, T_c\}$

Le repère barycentrique choisi est A, B, C .

Les points composés sont K_1, G .

Les coordonnées barycentriques de ces points sont décrites dans l'exercice précédent:

Calculons le vecteur $\overrightarrow{J_T K}$. On a:

$$\overrightarrow{J_T K} = m(1) \overrightarrow{OA} + m(2) \overrightarrow{OB} + m(3) \overrightarrow{OC}$$

avec

$$\begin{aligned} m(1) &= \frac{4 a^2 b^2 c^2 (2 a^4 - a^2 b^2 - b^4 - a^2 c^2 + 2 b^2 c^2 - c^4)}{(a - b - c) (a + b - c) (a - b + c) (a + b + c) m_*} \\ m(2) &= \frac{-4 a^2 b^2 c^2 (a^4 + a^2 b^2 - 2 b^4 - 2 a^2 c^2 + b^2 c^2 + c^4)}{(a - b - c) (a + b - c) (a - b + c) (a + b + c) m_*} \\ m(3) &= \frac{-4 a^2 b^2 c^2 (a^4 - 2 a^2 b^2 + b^4 + a^2 c^2 + b^2 c^2 - 2 c^4)}{(a - b - c) (a + b - c) (a - b + c) (a + b + c) m_*} \end{aligned}$$

avec

$$m_* = (a^6 - a^4 b^2 - a^2 b^4 + b^6 - a^4 c^2 + 6 a^2 b^2 c^2 - b^4 c^2 - a^2 c^4 - b^2 c^4 + c^6)$$

Calculons le vecteur $\overrightarrow{J_T K_1}$. On a:

$$\overrightarrow{J_T K_1} = n(1) \overrightarrow{OA} + n(2) \overrightarrow{OB} + n(3) \overrightarrow{OC}$$

avec

$$\begin{aligned} n(1) &= 2a^2b^2c^2(2a^4 - a^2b^2 - b^4 - a^2c^2 + 2b^2c^2 - c^4)n^* \\ n(2) &= -2a^2b^2c^2(a^4 + a^2b^2 - 2b^4 - 2a^2c^2 + b^2c^2 + c^4)n^* \\ n(3) &= -2a^2b^2c^2(a^4 - 2a^2b^2 + b^4 + a^2c^2 + b^2c^2 - 2c^4)n^* \end{aligned}$$

et

$$n^* = \frac{(a^6 - a^4b^2 - a^2b^4 + b^6 - a^4c^2 - 2a^2b^2c^2 - b^4c^2 - a^2c^4 - b^2c^4 + c^6)}{n_* (a^6 - a^4b^2 - a^2b^4 + b^6 - a^4c^2 + 6a^2b^2c^2 - b^4c^2 - a^2c^4 - b^2c^4 + c^6)}$$

et

$$n_* = (a - b - c)(a + b - c)(a - b + c)(a + b + c)(a^2 - b^2 - c^2)(a^2 + b^2 - c^2)(a^2 - b^2 + c^2)$$

On a ainsi

$$\overrightarrow{J_T K} = \frac{2(a^6 - a^4b^2 - a^2b^4 + b^6 - a^4c^2 + 2a^2b^2c^2 - b^4c^2 - a^2c^4 - b^2c^4 + c^6)}{a^6 - a^4b^2 - a^2b^4 + b^6 - a^4c^2 - 2a^2b^2c^2 - b^4c^2 - a^2c^4 - b^2c^4 + c^6} \overrightarrow{J_T K_1}$$

On a

$$\begin{aligned} J_T K^2 &= \frac{16a^4b^4c^4w^*}{(-a + b + c)(a + b - c)(a - b + c)(a + b + c)m_*^2} \\ J_T K_1^2 &= \frac{4a^4b^4c^4(a^6 - a^4b^2 - a^2b^4 + b^6 - a^4c^2 - 2a^2b^2c^2 - b^4c^2 - a^2c^4 - b^2c^4 + c^6)^2w^*}{n_*(-a^2 + b^2 + c^2)(a^2 + b^2 - c^2)(a^2 - b^2 + c^2)m_*^2} \end{aligned}$$

en posant

$$w^* = (a^6 - a^4b^2 - a^2b^4 + b^6 - a^4c^2 + 3a^2b^2c^2 - b^4c^2 - a^2c^4 - b^2c^4 + c^6)$$

donc

$$\frac{J_T K^2}{J_T K_1^2} = \frac{4(a^2 - b^2 - c^2)^2(a^2 + b^2 - c^2)^2(a^2 - b^2 + c^2)^2}{(a^6 - a^4b^2 - a^2b^4 + b^6 - a^4c^2 - 2a^2b^2c^2 - b^4c^2 - a^2c^4 - b^2c^4 + c^6)^2}$$

Et

$$J_T G^2 = \frac{(a - b + c)(a + b - c)(-a + b + c)(a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2)^2w^*}{9m_*^2}$$

$$GK_1^2 = \frac{(a^6 - a^4b^2 - a^2b^4 + b^6 - a^4c^2 - 4a^2b^2c^2 - b^4c^2 - a^2c^4 - b^2c^4 + c^6)^2w^*}{9(a - b + c)(a + b - c)(-a + b + c)(a + b + c)(-a^2 + b^2 - c^2)^2(a^2 + b^2 - c^2)^2(-a^2 + b^2 + c^2)^2}$$

CHAPITRE

21

Groupe orthocentrique

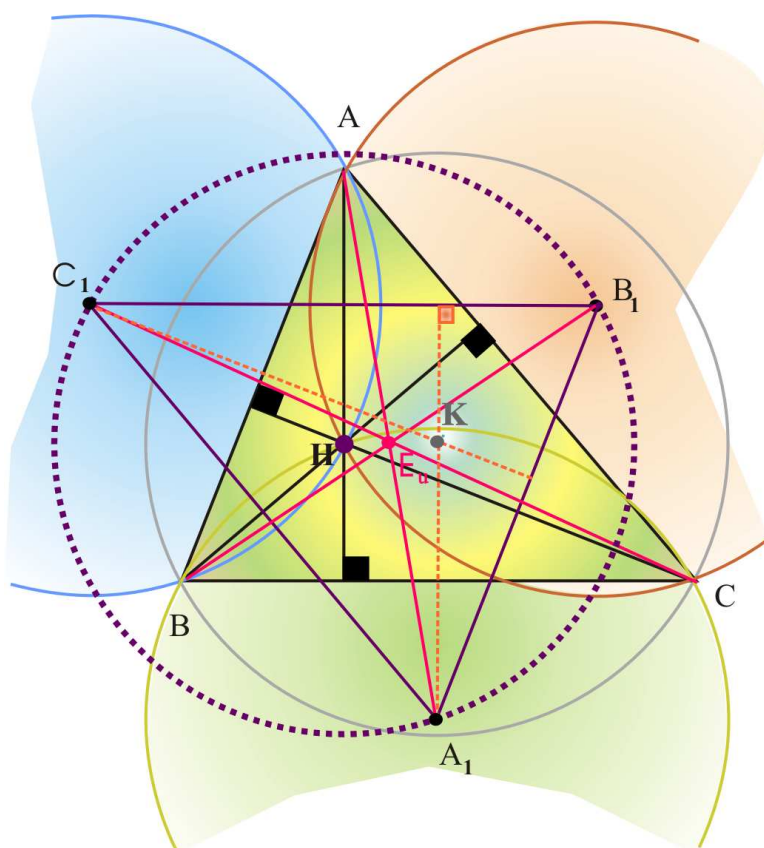
21 Groupe orthocentrique

21.1 Dualités dans un triangle

Exercice 21.1.1

Soit ABC un triangle, H son orthocentre, K le centre du cercle circonscrit. On désigne par A_1 le centre du cercle circonscrit au triangle BCH , par B_1 le centre du cercle circonscrit au triangle ACH , par C_1 le centre du cercle circonscrit au triangle ABH .

1. Déterminer les coordonnées barycentriques des points A_1, B_1, C_1 et les rayons des cercles indiqués.
2. Calculer $A_1B_1^2$, $A_1C_1^2$, $B_1C_1^2$, en déduire que le triangle $A_1B_1C_1$ est semblable au triangle ABC , les côtés des deux triangles étant parallèles. Préciser les coordonnées barycentriques du centre de gravité du triangle A_1, B_1, C_1 .
3. Montrer que les milieux des segments $[AA_1]$, $[BB_1]$, $[CC_1]$ coïncident avec le centre E_u du cercle d'Euler du triangle ABC .
4. Montrer que le point K est l'orthocentre du triangle $A_1B_1C_1$, que le point H est le centre du cercle circonscrit à ce même triangle.
5. Préciser les coordonnées barycentriques des centres de gravité G, G_a, G_b, G_c des triangles ABC, BCH, ACH, ABH .
6. Montrer que les droites d'Euler des quatre triangles sont concourantes en un même point que l'on reconnaîtra.
7. Montrer que l'orthocentre du triangle $G_aG_bG_c$ est le point G .
8. Etudier le cercle circonscrit au triangle $G_aG_bG_c$. Quel est le centre de ce cercle? Indiquer les coordonnées barycentriques du centre de gravité du triangle $G_aG_bG_c$.

**Solution:**

La figure formée par quatre points A, B, C, D dont chacun est l'orthocentre du triangle formé par les trois autres, est appelée *quadrangle orthocentroidal*. On utilise également le terme *groupe orthocentrique*.

Dessin $= \{A, A_1, B, B_1, C, C_1, H, K\}$

Le repère barycentrique choisi est A, B, C .

Les points composés sont H, A_1, B_1, C_1, K .

Les coordonnées barycentriques des points H et K sont classiques.

Equation du cercle passant par les points B, C, H

Le centre $A_1 = \{x, y, 1 - x, y\}$ de ce cercle doit vérifier $A_1B^2 - A_1C^2 = 0$ et $A_1B^2 - A_1H^2 = 0$, soit

$$\begin{cases} a^2 + (-a^2 - b^2 + c^2)x - 2a^2y = 0 \\ -a^4 + a^2b^2 + 2a^2c^2 + b^2c^2 - c^4 + (a^4 - 2a^2b^2 + b^4 - 2a^2c^2 - 2b^2c^2 + c^4)y = 0 \end{cases}$$

La résolution de ce système linéaire donne

$$x = \frac{a^2 (a^2 - b^2 - c^2)}{(-a + b + c) (a + b - c) (a - b + c) (a + b + c)}$$

$$y = \frac{a^4 - a^2b^2 - 2a^2c^2 - b^2c^2 + c^4}{(a - b - c) (a + b - c) (a - b + c) (a + b + c)}$$

Les coordonnées du centre sont ainsi

$$A_1 = \left\{ \frac{a^2 (a^2 - b^2 - c^2)}{(-a + b + c) (a + b - c) (a - b + c) (a + b + c)}, \right. \\ \frac{a^4 - a^2 b^2 - 2 a^2 c^2 - b^2 c^2 + c^4}{(a - b - c) (a + b - c) (a - b + c) (a + b + c)}, \\ \left. \frac{a^4 - 2 a^2 b^2 + b^4 - a^2 c^2 - b^2 c^2}{(a - b - c) (a + b - c) (a - b + c) (a + b + c)} \right\}$$

Le rayon au carré de ce cercle a pour valeur

$$r_{BCH}^2 = \frac{a^2 b^2 c^2}{(-a + b + c) (a + b - c) (a - b + c) (a + b + c)}$$

Un point $M = \{X, Y, Z\}$ appartient à ce cercle si et seulement si sa distance (au carré) au centre est égale à cette valeur, soit

$$0 = a^2 X^2 - b^2 X^2 - c^2 X^2 + a^2 X Y - b^2 X Y + a^2 X Z - c^2 X Z + a^2 Y Z$$

Equation du cercle passant par les points A, C, H

Le centre $B_1 = \{x, y, 1 - x, y\}$ de ce cercle doit vérifier $B_1 A^2 - B_1 C^2 = 0$ et $B_1 A^2 - B_1 H^2 = 0$, soit

$$\begin{cases} b^2 - 2b^2 x + (-a^2 - b^2 + c^2) y = 0 \\ a^2 b^2 - b^4 + a^2 c^2 + 2b^2 c^2 - c^4 + (a^4 - 2a^2 b^2 + b^4 - 2a^2 c^2 - 2b^2 c^2 + c^4) x = 0 \end{cases}$$

La résolution de ce système linéaire donne

$$x = \frac{a^2 b^2 - b^4 + a^2 c^2 + 2b^2 c^2 - c^4}{(-a + b + c) (a + b - c) (a - b + c) (a + b + c)} \\ y = \frac{b^2 (-a^2 + b^2 - c^2)}{(a - b + c) (a + b - c) (-a + b + c) (a + b + c)}$$

Les coordonnées du centre sont ainsi

$$B_1 = \left\{ \frac{a^2 b^2 - b^4 + a^2 c^2 + 2b^2 c^2 - c^4}{(-a + b + c) (a + b - c) (a - b + c) (a + b + c)}, \right. \\ \frac{b^2 (-a^2 + b^2 - c^2)}{(a - b + c) (a + b - c) (-a + b + c) (a + b + c)}, \\ \left. \frac{a^4 - 2a^2 b^2 + b^4 - a^2 c^2 - b^2 c^2}{(-a + b - c) (a + b - c) (-a + b + c) (a + b + c)} \right\}$$

Le rayon au carré de ce cercle a pour valeur

$$r_{ACH}^2 = \frac{a^2 b^2 c^2}{(-a + b + c) (a + b - c) (a - b + c) (a + b + c)}$$

Un point $M = \{X, Y, Z\}$ appartient à ce cercle si et seulement si sa distance (au carré) au centre est égale à cette valeur, soit

$$0 = -a^2 X Y + b^2 X Y - a^2 Y^2 + b^2 Y^2 - c^2 Y^2 + b^2 X Z + b^2 Y Z - c^2 Y Z$$

Equation du cercle passant par les points A, B, H

Le centre $C_1 = \{x, y, 1 - x, y\}$ de ce cercle doit vérifier $C_1A^2 - C_1B^2 = 0$ et $C_1A^2 - C_1H^2 = 0$, soit

$$\begin{cases} -a^2 + b^2 + (a^2 - b^2 - c^2)x + (a^2 - b^2 + c^2)y = 0 \\ a^2b^2 - b^4 + a^2c^2 + 2b^2c^2 - c^4 + (a^4 - 2a^2b^2 + b^4 - 2a^2c^2 - 2b^2c^2 + c^4)x = 0 \end{cases}$$

La résolution de ce système linéaire donne

$$x = \frac{a^2b^2 - b^4 + a^2c^2 + 2b^2c^2 - c^4}{(-a + b + c)(a + b - c)(a - b + c)(a + b + c)}$$

$$y = \frac{a^4 - a^2b^2 - 2a^2c^2 - b^2c^2 + c^4}{(a - b - c)(a + b - c)(a - b + c)(a + b + c)}$$

Les coordonnées du centre sont ainsi

$$C_1 = \left\{ \frac{a^2b^2 - b^4 + a^2c^2 + 2b^2c^2 - c^4}{(-a + b + c)(a + b - c)(a - b + c)(a + b + c)}, \right. \\ \frac{a^4 - a^2b^2 - 2a^2c^2 - b^2c^2 + c^4}{(a - b - c)(a + b - c)(a - b + c)(a + b + c)}, \\ \left. \frac{c^2(a^2 + b^2 - c^2)}{(a - b - c)(a + b - c)(a - b + c)(a + b + c)} \right\}$$

Le rayon au carré de ce cercle a pour valeur

$$r_{ABH}^2 = \frac{a^2b^2c^2}{(-a + b + c)(a + b - c)(a - b + c)(a + b + c)}$$

Un point $M = \{X, Y, Z\}$ appartient à ce cercle si et seulement si sa distance (au carré) au centre est égale à cette valeur, soit

$$0 = c^2XY - a^2XZ + c^2XZ - b^2YZ + c^2YZ - a^2Z^2 - b^2Z^2 + c^2Z^2$$

La distance $A_1B_1^2$ est égale à

$$A_1B_1^2 = c^2$$

La distance $A_1C_1^2$ est égale à

$$A_1C_1^2 = b^2$$

La distance $B_1C_1^2$ est égale à

$$B_1C_1^2 = a^2$$

Calculons le vecteur $\overrightarrow{AB}$. On a:

$$\overrightarrow{AB} = a(1)\overrightarrow{OA} + a(2)\overrightarrow{OB} + a(3)\overrightarrow{OC}$$

avec

$$a(1) = -1$$

$$a(2) = 1$$

$$a(3) = 0$$

Calculons le vecteur $\overrightarrow{A_1B_1}$. On a:

$$\overrightarrow{A_1B_1} = b(1) \overrightarrow{OA} + b(2) \overrightarrow{OB} + b(3) \overrightarrow{OC}$$

avec

$$b(1) = 1$$

$$b(2) = -1$$

$$b(3) = 0$$

On a ainsi

$$\overrightarrow{AB} = (-1) \overrightarrow{A_1B_1}$$

Calculons le vecteur $\overrightarrow{AC}$. On a:

$$\overrightarrow{AC} = c(1) \overrightarrow{OA} + c(2) \overrightarrow{OB} + c(3) \overrightarrow{OC}$$

avec

$$c(1) = -1$$

$$c(2) = 0$$

$$c(3) = 1$$

Calculons le vecteur $\overrightarrow{A_1C_1}$. On a:

$$\overrightarrow{A_1C_1} = d(1) \overrightarrow{OA} + d(2) \overrightarrow{OB} + d(3) \overrightarrow{OC}$$

avec

$$d(1) = 1$$

$$d(2) = 0$$

$$d(3) = -1$$

On a ainsi

$$\overrightarrow{AC} = (-1) \overrightarrow{A_1C_1}$$

Calculons le vecteur $\overrightarrow{BC}$. On a:

$$\overrightarrow{BC} = e(1) \overrightarrow{OA} + e(2) \overrightarrow{OB} + e(3) \overrightarrow{OC}$$

avec

$$e(1) = 0$$

$$e(2) = -1$$

$$e(3) = 1$$

Calculons le vecteur $\overrightarrow{B_1C_1}$. On a:

$$\overrightarrow{B_1C_1} = f(1) \overrightarrow{OA} + f(2) \overrightarrow{OB} + f(3) \overrightarrow{OC}$$

avec

$$f(1) = 0$$

$$f(2) = 1$$

$$f(3) = -1$$

On a ainsi

$$\overrightarrow{BC} = (-1) \overrightarrow{B_1C_1}$$

Les coordonnées barycentriques du centre de gravité du triangle $A_1B_1C_1$ s'obtiennent en faisant la moyenne pondérée des coordonnées barycentriques des points A_1, B_1, C_1 , ce qui fournit le point

$$\left\{ \frac{a^4 + a^2 b^2 - 2 b^4 + a^2 c^2 + 4 b^2 c^2 - 2 c^4}{3 (-a + b + c) (a + b - c) (a - b + c) (a + b + c)}, \right. \\ \frac{-2 a^4 + a^2 b^2 + b^4 + 4 a^2 c^2 + b^2 c^2 - 2 c^4}{3 (a - b + c) (a + b - c) (-a + b + c) (a + b + c)}, \\ \left. \frac{2 a^4 - 4 a^2 b^2 + 2 b^4 - a^2 c^2 - b^2 c^2 - c^4}{3 (a - b - c) (a + b - c) (a - b + c) (a + b + c)} \right\}$$

La moyenne pondérée des coordonnées barycentriques des points A, A_1 (resp. B, B_1, C, C_1) fournit constamment le point

$$E_u = \left\{ \frac{-(a^2 b^2 - b^4 + a^2 c^2 + 2 b^2 c^2 - c^4)}{2 (a - b - c) (a + b - c) (a - b + c) (a + b + c)}, \right. \\ \frac{a^4 - a^2 b^2 - 2 a^2 c^2 - b^2 c^2 + c^4}{2 (a - b - c) (a + b - c) (a - b + c) (a + b + c)}, \\ \left. \frac{a^4 - 2 a^2 b^2 + b^4 - a^2 c^2 - b^2 c^2}{2 (a - b - c) (a + b - c) (a - b + c) (a + b + c)} \right\}$$

qui est le centre du cercle d'Euler.

Pour un point M de coordonnées barycentriques $\{x, y, 1 - x - y\}$, on a

$$(-2) \overrightarrow{MA_1} \cdot \overrightarrow{B_1C_1} = -a^2 + a^2 x + b^2 x - c^2 x + 2 a^2 y$$

donc $\overrightarrow{KA_1} \cdot \overrightarrow{B_1C_1} = 0$. De même,

$$(-2) \overrightarrow{MB_1} \cdot \overrightarrow{A_1C_1} = -b^2 + 2 b^2 x + a^2 y + b^2 y - c^2 y$$

$$(-2) \overrightarrow{MC_1} \cdot \overrightarrow{A_1B_1} = a^2 - b^2 - a^2 x + b^2 x + c^2 x - a^2 y + b^2 y - c^2 y$$

Ainsi, $\overrightarrow{KB_1} \cdot \overrightarrow{A_1C_1} = \overrightarrow{KC_1} \cdot \overrightarrow{A_1B_1} = 0$ donc K est l'orthocentre du triangle $A_1B_1C_1$.

Equation du cercle passant par les points A_1, B_1, C_1

Le centre $M = \{x, y, 1 - x - y\}$ de ce cercle doit vérifier $MA_1^2 - MB_1^2 = 0$ et $MA_1^2 - MC_1^2 = 0$, soit

$$\begin{cases} (-a^2 + b^2 + c^2) x + (-a^2 + b^2 - c^2) y = 0 \\ -a^2 - b^2 + c^2 + 2 b^2 x + (a^2 + b^2 - c^2) y = 0 \end{cases}$$

La résolution de ce système linéaire donne

$$x = \frac{(a^2 + b^2 - c^2) (a^2 - b^2 + c^2)}{(-a + b + c) (a + b - c) (a - b + c) (a + b + c)}$$

$$y = \frac{(a^2 - b^2 - c^2)(a^2 + b^2 - c^2)}{(a - b - c)(a + b - c)(a - b + c)(a + b + c)}$$

Les coordonnées du centre sont ainsi

$$\left\{ \frac{(a^2 + b^2 - c^2)(a^2 - b^2 + c^2)}{(-a + b + c)(a + b - c)(a - b + c)(a + b + c)}, \right. \\ \frac{(a^2 - b^2 - c^2)(a^2 + b^2 - c^2)}{(a - b - c)(a + b - c)(a - b + c)(a + b + c)}, \\ \left. \frac{(a^2 - b^2 - c^2)(a^2 - b^2 + c^2)}{(a - b - c)(a + b - c)(a - b + c)(a + b + c)} \right\}$$

Ce sont les coordonnées barycentriques de l'orthocentre H .

Le rayon au carré de ce cercle a pour valeur

$$r_{A_1 B_1 C_1}^2 = \frac{a^2 b^2 c^2}{(-a + b + c)(a + b - c)(a - b + c)(a + b + c)}$$

Un point $M = \{X, Y, Z\}$ appartient à ce cercle si et seulement si sa distance (au carré) au centre est égale à cette valeur, soit

$$0 = a^6 X^2 - 2a^4 b^2 X^2 + a^2 b^4 X^2 - 2a^4 c^2 X^2 + a^2 b^2 c^2 X^2 + a^2 c^4 X^2 + a^6 XY - a^4 b^2 XY - a^2 b^4 XY \\ + b^6 XY - a^4 c^2 XY - b^4 c^2 XY - a^2 c^4 XY - b^2 c^4 XY + c^6 XY + a^4 b^2 Y^2 - 2a^2 b^4 Y^2 + b^6 Y^2 \\ + a^2 b^2 c^2 Y^2 - 2b^4 c^2 Y^2 + b^2 c^4 Y^2 + a^6 XZ - a^4 b^2 XZ - a^2 b^4 XZ + b^6 XZ - a^4 c^2 XZ - b^4 c^2 XZ \\ - a^2 c^4 XZ - b^2 c^4 XZ + c^6 XZ + a^6 YZ - a^4 b^2 YZ - a^2 b^4 YZ + b^6 YZ - a^4 c^2 YZ - b^4 c^2 YZ \\ - a^2 c^4 YZ - b^2 c^4 YZ + c^6 YZ + a^4 c^2 Z^2 + a^2 b^2 c^2 Z^2 + b^4 c^2 Z^2 - 2a^2 c^4 Z^2 - 2b^2 c^4 Z^2 + c^6 Z^2$$

Dessin = Dessin $\cup \{G, G_a, G_b, G_c\} = \{A, A_1, B, B_1, C, C_1, G, G_a, G_b, G_c, H, K\}$

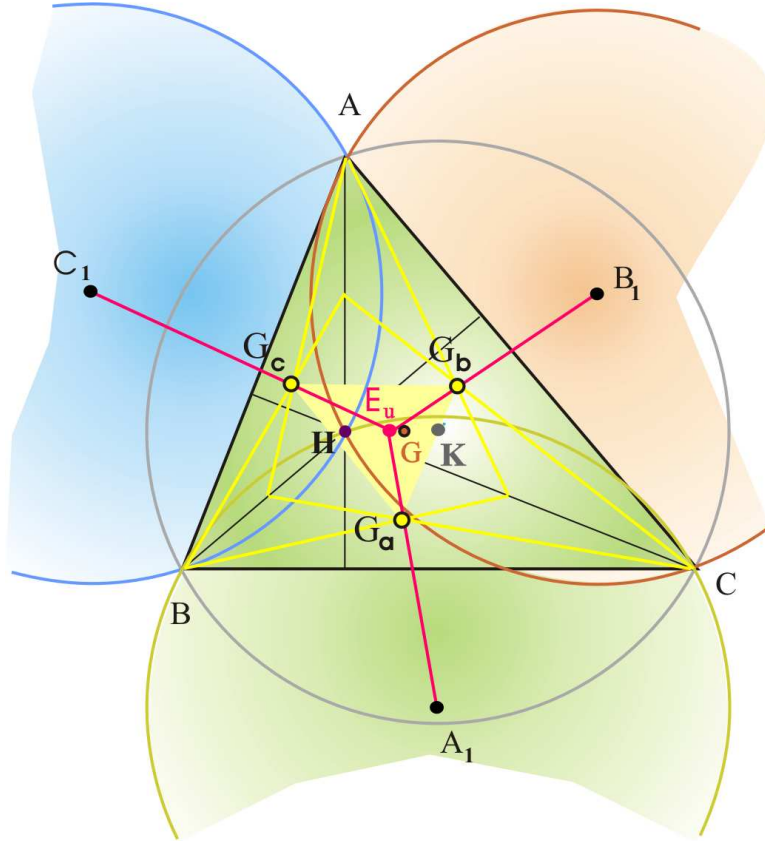
Le repère barycentrique choisi est A, B, C .

Les points composés sont G_a, G_b, G_c, G .

Les coordonnées barycentriques des points composés sont:

$$G_a = \left\{ \frac{(-a^2 - b^2 + c^2)(a^2 - b^2 + c^2)}{3(a - b - c)(a + b - c)(a - b + c)(a + b + c)}, \right. \\ \frac{2(a^4 - a^2 b^2 - 2a^2 c^2 - b^2 c^2 + c^4)}{3(a - b - c)(a + b - c)(a - b + c)(a + b + c)}, \\ \left. \frac{2(a^4 - 2a^2 b^2 + b^4 - a^2 c^2 - b^2 c^2)}{3(a - b - c)(a + b - c)(a - b + c)(a + b + c)} \right\} \\ G_b = \left\{ \frac{-2(a^2 b^2 - b^4 + a^2 c^2 + 2b^2 c^2 - c^4)}{3(a - b - c)(a + b - c)(a - b + c)(a + b + c)}, \right. \\ \frac{(a^2 - b^2 - c^2)(a^2 + b^2 - c^2)}{3(a - b - c)(a + b - c)(a - b + c)(a + b + c)}, \\ \left. \frac{2(a^4 - 2a^2 b^2 + b^4 - a^2 c^2 - b^2 c^2)}{3(a - b - c)(a + b - c)(a - b + c)(a + b + c)} \right\}$$

$$G_c = \left\{ \frac{-2(a^2 b^2 - b^4 + a^2 c^2 + 2b^2 c^2 - c^4)}{3(a-b-c)(a+b-c)(a-b+c)(a+b+c)}, \right. \\ \left. \frac{2(a^4 - a^2 b^2 - 2a^2 c^2 - b^2 c^2 + c^4)}{3(a-b-c)(a+b-c)(a-b+c)(a+b+c)}, \right. \\ \left. \frac{(a^2 - b^2 - c^2)(a^2 - b^2 + c^2)}{3(a-b-c)(a+b-c)(a-b+c)(a+b+c)} \right\} \\ G = \left\{ \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3} \right\}$$



Dessin = Dessin $\cup \{W\} = \{A, A_1, B, B_1, C, C_1, G, G_a, G_b, G_c, H, K, W\}$

Détermination du point W :

Soit W le point $(G_a A_1) \cap (G_b B_1)$. Le point W est composé.

Comme $W \in (G_a A_1)$, on a, en choisissant l'inconnue ν_1

$$\overrightarrow{OW} = (1 - \nu_1) \overrightarrow{OA_1} + \nu_1 \overrightarrow{OG_a}$$

On déduit:

$$\overrightarrow{OW} = g(1) \overrightarrow{OA} + g(2) \overrightarrow{OB} + g(3) \overrightarrow{OC}$$

avec

$$g(1) = \frac{-3a^4 + 3a^2 b^2 + 3a^2 c^2 + 2a^4 \nu_1 - 3a^2 b^2 \nu_1 + b^4 \nu_1 - 3a^2 c^2 \nu_1 - 2b^2 c^2 \nu_1 + c^4 \nu_1}{3(a-b-c)(a+b-c)(a-b+c)(a+b+c)}$$

$$g(2) = \frac{(a^4 - a^2 b^2 - 2 a^2 c^2 - b^2 c^2 + c^4) (3 - \nu_1)}{3 (a - b - c) (a + b - c) (a - b + c) (a + b + c)}$$

$$g(3) = \frac{(a^4 - 2 a^2 b^2 + b^4 - a^2 c^2 - b^2 c^2) (3 - \nu_1)}{3 (a - b - c) (a + b - c) (a - b + c) (a + b + c)}$$

Comme $W \in (G_b B_1)$, on a, en choisissant l'inconnue μ_1

$$\overrightarrow{OW} = (1 - \mu_1) \overrightarrow{OB_1} + \mu_1 \overrightarrow{OG_b}$$

On déduit:

$$\overrightarrow{OW} = h(1) \overrightarrow{OA} + h(2) \overrightarrow{OB} + h(3) \overrightarrow{OC}$$

avec

$$h(1) = \frac{(a^2 b^2 - b^4 + a^2 c^2 + 2 b^2 c^2 - c^4) (-3 + \mu_1)}{3 (a - b - c) (a + b - c) (a - b + c) (a + b + c)}$$

$$h(2) = \frac{3 a^2 b^2 - 3 b^4 + 3 b^2 c^2 + a^4 \mu_1 - 3 a^2 b^2 \mu_1 + 2 b^4 \mu_1 - 2 a^2 c^2 \mu_1 - 3 b^2 c^2 \mu_1 + c^4 \mu_1}{3 (a - b - c) (a + b - c) (a - b + c) (a + b + c)}$$

$$h(3) = \frac{(a^4 - 2 a^2 b^2 + b^4 - a^2 c^2 - b^2 c^2) (3 - \mu_1)}{3 (a - b - c) (a + b - c) (a - b + c) (a + b + c)}$$

La résolution du système linéaire d'inconnues ν_1, μ_1 donne

$$\nu_1 = \frac{3}{2} \quad \mu_1 = \frac{3}{2}$$

On déduit que:

$$W = \left\{ \frac{-(a^2 b^2 - b^4 + a^2 c^2 + 2 b^2 c^2 - c^4)}{2 (a - b - c) (a + b - c) (a - b + c) (a + b + c)}, \right. \\ \left. \frac{a^4 - a^2 b^2 - 2 a^2 c^2 - b^2 c^2 + c^4}{2 (a - b - c) (a + b - c) (a - b + c) (a + b + c)}, \right. \\ \left. \frac{a^4 - 2 a^2 b^2 + b^4 - a^2 c^2 - b^2 c^2}{2 (a - b - c) (a + b - c) (a - b + c) (a + b + c)} \right\}$$

Dessin = Dessin $\cup \{W_1\} = \{A, A_1, B, B_1, C, C_1, G, G_a, G_b, G_c, H, K, W, W_1\}$

Détermination du point W_1 :

Soit W_1 le point $(G_c C_1) \cap (GK)$. Le point W_1 est composé.

Comme $W_1 \in (G_c C_1)$, on a, en choisissant l'inconnue ν_1

$$\overrightarrow{OW_1} = (1 - \nu_1) \overrightarrow{OC_1} + \nu_1 \overrightarrow{OG_c}$$

On déduit:

$$\overrightarrow{OW_1} = i(1) \overrightarrow{OA} + i(2) \overrightarrow{OB} + i(3) \overrightarrow{OC}$$

avec

$$i(1) = \frac{(a^2 b^2 - b^4 + a^2 c^2 + 2 b^2 c^2 - c^4) (-3 + \nu_1)}{3 (a - b - c) (a + b - c) (a - b + c) (a + b + c)}$$

$$i(2) = \frac{(a^4 - a^2 b^2 - 2 a^2 c^2 - b^2 c^2 + c^4) (3 - \nu_1)}{3 (a - b - c) (a + b - c) (a - b + c) (a + b + c)}$$

$$i(3) = \frac{3a^2c^2 + 3b^2c^2 - 3c^4 + a^4\nu_1 - 2a^2b^2\nu_1 + b^4\nu_1 - 3a^2c^2\nu_1 - 3b^2c^2\nu_1 + 2c^4\nu_1}{3(a-b-c)(a+b-c)(a-b+c)(a+b+c)}$$

Comme $W_1 \in (GK)$, on a, en choisissant l'inconnue μ_1

$$\overrightarrow{OW_1} = \mu_1 \overrightarrow{OG} + (1 - \mu_1) \overrightarrow{OK}$$

On déduit:

$$\overrightarrow{OW_1} = j(1) \overrightarrow{OA} + j(2) \overrightarrow{OB} + j(3) \overrightarrow{OC}$$

avec

$$\begin{aligned} j(1) &= \frac{3a^4 - 3a^2b^2 - 3a^2c^2 - 2a^4\mu_1 + a^2b^2\mu_1 + b^4\mu_1 + a^2c^2\mu_1 - 2b^2c^2\mu_1 + c^4\mu_1}{3(a-b-c)(a+b-c)(a-b+c)(a+b+c)} \\ j(2) &= \frac{-3a^2b^2 + 3b^4 - 3b^2c^2 + a^4\mu_1 + a^2b^2\mu_1 - 2b^4\mu_1 - 2a^2c^2\mu_1 + b^2c^2\mu_1 + c^4\mu_1}{3(a-b-c)(a+b-c)(a-b+c)(a+b+c)} \\ j(3) &= \frac{-3a^2c^2 - 3b^2c^2 + 3c^4 + a^4\mu_1 - 2a^2b^2\mu_1 + b^4\mu_1 + a^2c^2\mu_1 + b^2c^2\mu_1 - 2c^4\mu_1}{3(a-b-c)(a+b-c)(a-b+c)(a+b+c)} \end{aligned}$$

La résolution du système linéaire d'inconnues ν_1, μ_1 donne

$$\nu_1 = \frac{3}{2} \quad \mu_1 = \frac{3}{2}$$

On déduit que:

$$W_1 = \left\{ \frac{-(a^2b^2 - b^4 + a^2c^2 + 2b^2c^2 - c^4)}{2(a-b-c)(a+b-c)(a-b+c)(a+b+c)}, \right. \\ \left. \frac{a^4 - a^2b^2 - 2a^2c^2 - b^2c^2 + c^4}{2(a-b-c)(a+b-c)(a-b+c)(a+b+c)}, \right. \\ \left. \frac{a^4 - 2a^2b^2 + b^4 - a^2c^2 - b^2c^2}{2(a-b-c)(a+b-c)(a-b+c)(a+b+c)} \right\}$$

Ainsi, $W = W_1$ est égal au centre E_u du cercle d'Euler du triangle ABC .

Pour un point M de coordonnées barycentriques $\{x, y, 1 - x - y\}$, on a

$$(-2) \overrightarrow{MG_a} \cdot \overrightarrow{G_bG_c} = \frac{-3a^2 - b^2 + c^2 + 3a^2x + 3b^2x - 3c^2x + 6a^2y}{9}$$

donc $\overrightarrow{GG_a} \cdot \overrightarrow{G_bG_c} = 0$. De même,

$$(-2) \overrightarrow{MG_b} \cdot \overrightarrow{G_aG_c} = \frac{-a^2 - 3b^2 + c^2 + 6b^2x + 3a^2y + 3b^2y - 3c^2y}{9}$$

$$(-2) \overrightarrow{MG_c} \cdot \overrightarrow{G_aG_b} = \frac{2a^2 - 2b^2 - 3a^2x + 3b^2x + 3c^2x - 3a^2y + 3b^2y - 3c^2y}{9}$$

Ainsi, $\overrightarrow{GG_b} \cdot \overrightarrow{G_aG_c} = \overrightarrow{GG_c} \cdot \overrightarrow{G_aG_b} = 0$ donc G est l'orthocentre du triangle $G_aG_bG_c$.

Equation du cercle passant par les points G_a, G_b, G_c

Le centre $M = \{x, y, 1 - x - y\}$ de ce cercle doit vérifier $MG_a^2 - MG_b^2 = 0$ et $MG_a^2 - MG_c^2 = 0$, soit

$$\begin{cases} a^2 - b^2 + (-3a^2 + 3b^2 + 3c^2)x + (-3a^2 + 3b^2 - 3c^2)y = 0 \\ -2a^2 - 3b^2 + 2c^2 + 6b^2x + (3a^2 + 3b^2 - 3c^2)y = 0 \end{cases}$$

La résolution de ce système linéaire donne

$$x = \frac{-(a^4 + a^2 b^2 - 2b^4 + a^2 c^2 + 4b^2 c^2 - 2c^4)}{3(a-b-c)(a+b-c)(a-b+c)(a+b+c)}$$

$$y = \frac{2a^4 - a^2 b^2 - b^4 - 4a^2 c^2 - b^2 c^2 + 2c^4}{3(a-b-c)(a+b-c)(a-b+c)(a+b+c)}$$

Les coordonnées du centre sont ainsi

$$\left\{ \begin{aligned} & \frac{-(a^4 + a^2 b^2 - 2b^4 + a^2 c^2 + 4b^2 c^2 - 2c^4)}{3(a-b-c)(a+b-c)(a-b+c)(a+b+c)}, \\ & \frac{2a^4 - a^2 b^2 - b^4 - 4a^2 c^2 - b^2 c^2 + 2c^4}{3(a-b-c)(a+b-c)(a-b+c)(a+b+c)}, \\ & \frac{2a^4 - 4a^2 b^2 + 2b^4 - a^2 c^2 - b^2 c^2 - c^4}{3(a-b-c)(a+b-c)(a-b+c)(a+b+c)} \end{aligned} \right\}$$

Ce sont donc les coordonnées barycentriques du centre de gravité du triangle A_1, B_1, C_1 .

Le rayon au carré de ce cercle a pour valeur

$$r_{G_a G_b G_c}^2 = \frac{a^2 b^2 c^2}{9(-a+b+c)(a+b-c)(a-b+c)(a+b+c)}$$

Un point $M = \{X, Y, Z\}$ appartient à ce cercle si et seulement si sa distance (au carré) au centre est égale à cette valeur, soit

$$\begin{aligned} 0 = & 4a^6 X^2 - 10a^4 b^2 X^2 + 8a^2 b^4 X^2 - 2b^6 X^2 - 10a^4 c^2 X^2 + 8a^2 b^2 c^2 X^2 + 2b^4 c^2 X^2 + 8a^2 c^4 X^2 \\ & + 2b^2 c^4 X^2 - 2c^6 X^2 + 2a^6 XY - 2a^4 b^2 XY - 2a^2 b^4 XY + 2b^6 XY + a^4 c^2 XY - 2a^2 b^2 c^2 XY \\ & + b^4 c^2 XY - 8a^2 c^4 XY - 8b^2 c^4 XY + 5c^6 XY - 2a^6 Y^2 + 8a^4 b^2 Y^2 - 10a^2 b^4 Y^2 + 4b^6 Y^2 \\ & + 8a^2 b^2 c^2 Y^2 - 10b^4 c^2 Y^2 + 2a^2 c^4 Y^2 + 8b^2 c^4 Y^2 - 2c^6 Y^2 + 2a^6 XZ + a^4 b^2 XZ - 8a^2 b^4 XZ \\ & + 5b^6 XZ - 2a^4 c^2 XZ - 2a^2 b^2 c^2 XZ - 8b^4 c^2 XZ - 2a^2 c^4 XZ + b^2 c^4 XZ + 2c^6 XZ + 5a^6 YZ \\ & - 8a^4 b^2 YZ + a^2 b^4 YZ + 2b^6 YZ - 8a^4 c^2 YZ - 2a^2 b^2 c^2 YZ - 2b^4 c^2 YZ + a^2 c^4 YZ - 2b^2 c^4 YZ \\ & - 2a^6 Z^2 + 2a^4 b^2 Z^2 + 2a^2 b^4 Z^2 - 2b^6 Z^2 + 8a^4 c^2 Z^2 + 8a^2 b^2 c^2 Z^2 + 8b^4 c^2 Z^2 - 10a^2 c^4 Z^2 \\ & - 10b^2 c^4 Z^2 + 4c^6 Z^2 + 2c^6 YZ + 2a^4 c^2 Y^2 \end{aligned}$$

Les coordonnées barycentriques du centre de gravité du triangle $G_a G_b G_c$ s'obtiennent par moyenne pondérée des coordonnées barycentriques des points G_a, G_b, G_c , ce qui fournit le point

$$\left\{ \begin{aligned} & \frac{-(a^4 + 4a^2 b^2 - 5b^4 + 4a^2 c^2 + 10b^2 c^2 - 5c^4)}{9(a-b-c)(a+b-c)(a-b+c)(a+b+c)}, \\ & \frac{5a^4 - 4a^2 b^2 - b^4 - 10a^2 c^2 - 4b^2 c^2 + 5c^4}{9(a-b-c)(a+b-c)(a-b+c)(a+b+c)}, \\ & \frac{5a^4 - 10a^2 b^2 + 5b^4 - 4a^2 c^2 - 4b^2 c^2 - c^4}{9(a-b-c)(a+b-c)(a-b+c)(a+b+c)} \end{aligned} \right\}$$

CHAPITRE

22

Cercles d'Apollonius

22 Cercles d'Apollonius

22.1 Cercles d'Apollonius

Exercice 22.1.1

Soit ABC un triangle non-isocèle, Γ le cercle circonscrit de centre K .

La bissectrice intérieure (resp. extérieure) issue du sommet A coupe le côté (BC) en M_1 (resp. N_1).

La bissectrice intérieure (resp. extérieure) issue du sommet B coupe le côté (AC) en M_2 (resp. N_2).

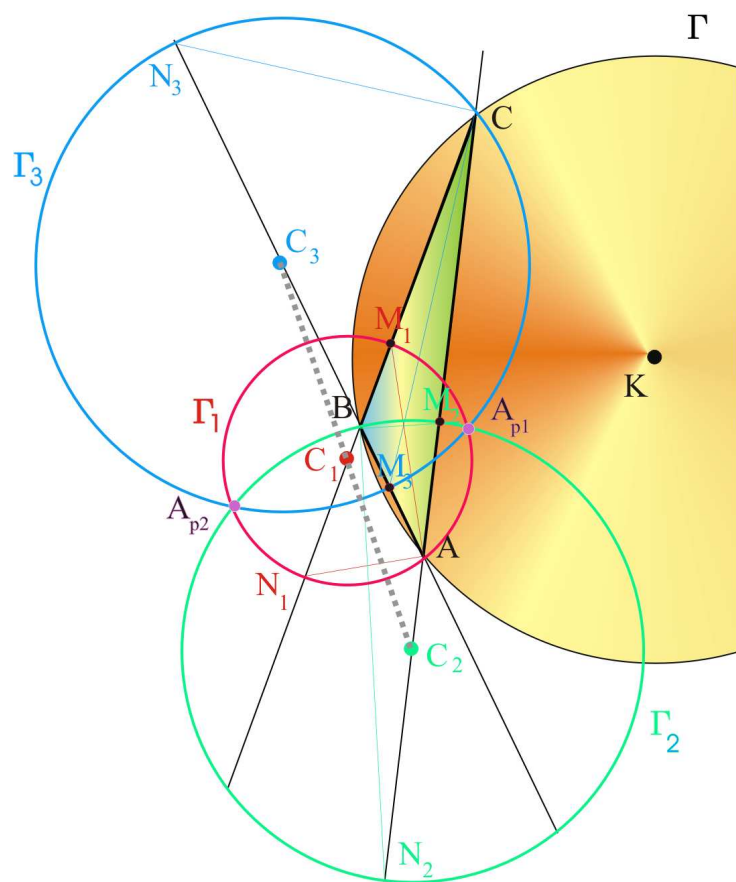
La bissectrice intérieure (resp. extérieure) issue du sommet C coupe le côté (AB) en M_3 (resp. N_3).

Soient $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$ les cercles de diamètres respectifs $[M_1, N_1], [M_2, N_2], [M_3, N_3]$.

1. Déterminer les coordonnées barycentriques des centres C_1, C_2, C_3 des cercles $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$. Montrer que ces points sont alignés. Préciser les équations des cercles $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$ et la valeur des rayons respectifs de ces cercles. Montrer que les points communs aux cercles Γ_1, Γ_2 appartiennent à Γ_3 . On pose $\{A_{p1}, A_{p2}\} = \Gamma_1 \cap \Gamma_2$.
2. Montrer que les droites $(AC_1), (BC_2), (CC_3)$ sont tangentes au cercle Γ .
3. Montrer que le cercle Γ est orthogonal aux cercles $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$.
4. On pose $\Gamma \cap \Gamma_1 = \{A, K_1\}, \Gamma \cap \Gamma_2 = \{B, K_2\}, \Gamma \cap \Gamma_3 = \{C, K_3\}$. Préciser les coordonnées barycentriques des points K_1, K_2, K_3 .
5. Montrer que les droites $(AK_1), (BK_2), (CK_3)$ sont concourantes au point de Lemoine.
6. Déterminer les coordonnées barycentriques des points A_{p1}, A_{p2} et du point P projection orthogonale de ces points sur la droite passant par C_1, C_2, C_3 .
7. Montrer que le point de Lemoine et le point K appartiennent à la droite $(A_{p1}A_{p2})$ et que cette droite est orthogonale à la droite passant par C_1, C_2, C_3 .

Exercice 22.1.2 suite de l'énoncé

- 8 Calculer les distances $A_{p1}A_{p2}^2$, AA_{p1}^2 , BA_{p1}^2 , CA_{p1}^2 , KA_{p1}^2 , AA_{p2}^2 , BA_{p2}^2 , CA_{p2}^2 , KA_{p2}^2 .
- 9 Déterminer les points d'intersection R_1, R_2 des droites (AA_{p1}) et (AA_{p2}) avec la droite (C_1C_2) des centres. Calculer $R_1R_2^2$.
- 10 Même question avec les points d'intersection P_1, P_2 des droites (BA_{p1}) et (BA_{p2}) avec la droite (C_1C_2) des centres (resp. les points d'intersection Q_1, Q_2 des droites (CA_{p1}) et (CA_{p2}) avec la droite (C_1C_2) des centres).


Solution:

Dessin = $\{A, B, C, K, M_1, M_2, M_3, N_1, N_2, N_3\}$

Le repère barycentrique choisi est A, B, C .

Les points composés sont $M_1, N_1, M_2, N_2, M_3, N_3, K$.

On déduit les coordonnées barycentriques des points composés:

$$M_1 = \left\{0, \frac{b}{b+c}, \frac{c}{b+c}\right\}$$

$$\begin{aligned}
M_2 &= \left\{ \frac{a}{a+c}, 0, \frac{c}{a+c} \right\} \\
M_3 &= \left\{ \frac{a}{a+b}, \frac{b}{a+b}, 0 \right\} \\
N_1 &= \left\{ 0, \frac{b}{b-c}, \frac{-c}{b-c} \right\} \\
N_2 &= \left\{ \frac{a}{a-c}, 0, \frac{-c}{a-c} \right\} \\
N_3 &= \left\{ \frac{a}{a-b}, \frac{-b}{a-b}, 0 \right\} \\
K &= \left\{ \frac{a^2 (a^2 - b^2 - c^2)}{(a-b-c)(a+b-c)(a-b+c)(a+b+c)}, \right. \\
&\quad \frac{b^2 (-a^2 + b^2 - c^2)}{(-a+b-c)(a+b-c)(-a+b+c)(a+b+c)}, \\
&\quad \left. \frac{c^2 (a^2 + b^2 - c^2)}{(-a+b+c)(a+b-c)(a-b+c)(a+b+c)} \right\}
\end{aligned}$$

Dessin = Dessin $\cup \{C_1, C_2, C_3\} = \{A, B, C, C_1, C_2, C_3, K, M_1, M_2, M_3, N_1, N_2, N_3\}$

Le repère barycentrique choisi est A, B, C .

Les points composés sont C_1, C_2, C_3 .

Equation du cercle passant par les points A, M_1, N_1

Le centre $M = \{x, y, 1-x, y\}$ de ce cercle doit vérifier $MA^2 - MM_1^2 = 0$ et $MA^2 - MN_1^2 = 0$, soit

$$\begin{cases} -b^2 + (b^2 + bc)x + (b^2 - c^2)y = 0 \\ -b^2 + (b^2 - bc)x + (b^2 - c^2)y = 0 \end{cases}$$

La résolution de ce système linéaire donne

$$x = 0 \quad y = \frac{b^2}{b^2 - c^2}$$

Les coordonnées du centre C_1 sont ainsi

$$C_1 = \left\{ 0, \frac{b^2}{(b-c)(b+c)}, \frac{-c^2}{(b-c)(b+c)} \right\}$$

Le rayon r_1 de ce cercle a pour valeur

$$r_1^2 = \frac{a^2 b^2 c^2}{(b-c)^2 (b+c)^2}$$

Un point $M = \{X, Y, Z\}$ appartient à ce cercle si et seulement si sa distance (au carré) au centre est égale à cette valeur, soit

$$0 = a^2 c^2 X Y + b^2 c^2 X Y - c^4 X Y + a^2 c^2 Y^2 - a^2 b^2 X Z + b^4 X Z - b^2 c^2 X Z - a^2 b^2 Z^2$$

Equation du cercle passant par les points B, M_2, N_2

Le centre $M = \{x, y, 1 - x, y\}$ de ce cercle doit vérifier $MB^2 - M_2^2 = 0$ et $MB^2 - MN_2^2 = 0$, soit

$$\begin{cases} -a^2 + (a^2 - c^2) x + (a^2 + a c) y = 0 \\ -a^2 + (a^2 - c^2) x + (a^2 - a c) y = 0 \end{cases}$$

La résolution de ce système linéaire donne

$$x = \frac{a^2}{a^2 - c^2} \quad y = 0$$

Les coordonnées du centre C_2 sont ainsi

$$C_2 = \left\{ \frac{a^2}{(a - c)(a + c)}, 0, \frac{-c^2}{(a - c)(a + c)} \right\}$$

Le rayon r_2 de ce cercle a pour valeur

$$r_2^2 = \frac{a^2 b^2 c^2}{(a - c)^2 (a + c)^2}$$

Un point $M = \{X, Y, Z\}$ appartient à ce cercle si et seulement si sa distance (au carré) au centre est égale à cette valeur, soit

$$0 = b^2 c^2 X^2 + a^2 c^2 X Y + b^2 c^2 X Y - c^4 X Y + a^4 Y Z - a^2 b^2 Y Z - a^2 c^2 Y Z - a^2 b^2 Z^2$$

Equation du cercle passant par les points C, M_3, N_3

Le centre $M = \{x, y, 1 - x, y\}$ de ce cercle doit vérifier $MC^2 - MM_3^2 = 0$ et $MC^2 - MN_3^2 = 0$, soit

$$\begin{cases} -a b + (a b + b^2) x + (a^2 + a b) y = 0 \\ a b + (-a b + b^2) x + (a^2 - a b) y = 0 \end{cases}$$

La résolution de ce système linéaire donne

$$x = \frac{a^2}{a^2 - b^2} \quad y = \frac{b^2}{-a^2 + b^2}$$

Les coordonnées du centre C_3 sont ainsi

$$C_3 = \left\{ \frac{a^2}{(a - b)(a + b)}, \frac{b^2}{(-a + b)(a + b)}, 0 \right\}$$

Le rayon r_3 de ce cercle a pour valeur

$$r_3^2 = \frac{a^2 b^2 c^2}{(a - b)^2 (a + b)^2}$$

Un point $M = \{X, Y, Z\}$ appartient à ce cercle si et seulement si sa distance (au carré) au centre est égale à cette valeur, soit

$$0 = b^2 c^2 X^2 - a^2 c^2 Y^2 + a^2 b^2 X Z - b^4 X Z + b^2 c^2 X Z + a^4 Y Z - a^2 b^2 Y Z - a^2 c^2 Y Z$$

On a directement

$$\begin{aligned}\overrightarrow{C_1C_2} &= \frac{a^2}{(a-c)(a+c)} \overrightarrow{OA} - \frac{b^2}{(b-c)(b+c)} \overrightarrow{OB} - \frac{(a-b)(a+b)c^2}{(a-c)(a+c)(-b+c)(b+c)} \overrightarrow{OC} \\ \overrightarrow{C_1C_3} &= \frac{a^2}{(a-b)(a+b)} \overrightarrow{OA} + \frac{b^2(a-c)(a+c)}{(-a+b)(a+b)(b-c)(b+c)} \overrightarrow{OB} + \frac{c^2}{(b-c)(b+c)} \overrightarrow{OC}\end{aligned}$$

donc

$$\overrightarrow{C_1C_3} = \frac{(a-c)(a+c)}{(a-b)(a+b)} \overrightarrow{C_1C_2}$$

Ainsi, les équations des cercles $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$ sont

$$\begin{aligned}a^2 c^2 XY + b^2 c^2 XY - c^4 XY + a^2 c^2 Y^2 - a^2 b^2 XZ + b^4 XZ - b^2 c^2 XZ - a^2 b^2 Z^2 &= 0 \\ b^2 c^2 X^2 + a^2 c^2 XY + b^2 c^2 XY - c^4 XY + a^4 YZ - a^2 b^2 YZ - a^2 c^2 YZ - a^2 b^2 Z^2 &= 0 \\ b^2 c^2 X^2 - a^2 c^2 Y^2 + a^2 b^2 XZ - b^4 XZ + b^2 c^2 XZ + a^4 YZ - a^2 b^2 YZ - a^2 c^2 YZ &= 0\end{aligned}$$

La troisième équation est la différence des deux premières, les trois cercles se rencontrent aux points communs à Γ_1 et Γ_2 (ces points existent sur le dessin, les coordonnées barycentriques de M et N sont calculables avec des expressions très complexes).

Equation du cercle passant par les points A, B, C

Le centre $M = \{x, y, 1-x, y\}$ de ce cercle doit vérifier $MA^2 - MB^2 = 0$ et $MA^2 - MC^2 = 0$, soit

$$\begin{cases} -a^2 + b^2 + (a^2 - b^2 - c^2)x + (a^2 - b^2 + c^2)y = 0 \\ b^2 - 2b^2x + (-a^2 - b^2 + c^2)y = 0 \end{cases}$$

La résolution de ce système linéaire donne

$$x = \frac{a^2(a^2 - b^2 - c^2)}{(a-b-c)(a+b-c)(a-b+c)(a+b+c)} \quad y = \frac{b^2(-a^2 + b^2 - c^2)}{(-a+b-c)(a+b-c)(-a+b+c)(a+b+c)}$$

Les coordonnées du centre K sont classiques ainsi que la valeur R du rayon du cercle circonscrit

$$R^2 = \frac{a^2 b^2 c^2}{(-a+b+c)(a+b-c)(a-b+c)(a+b+c)}$$

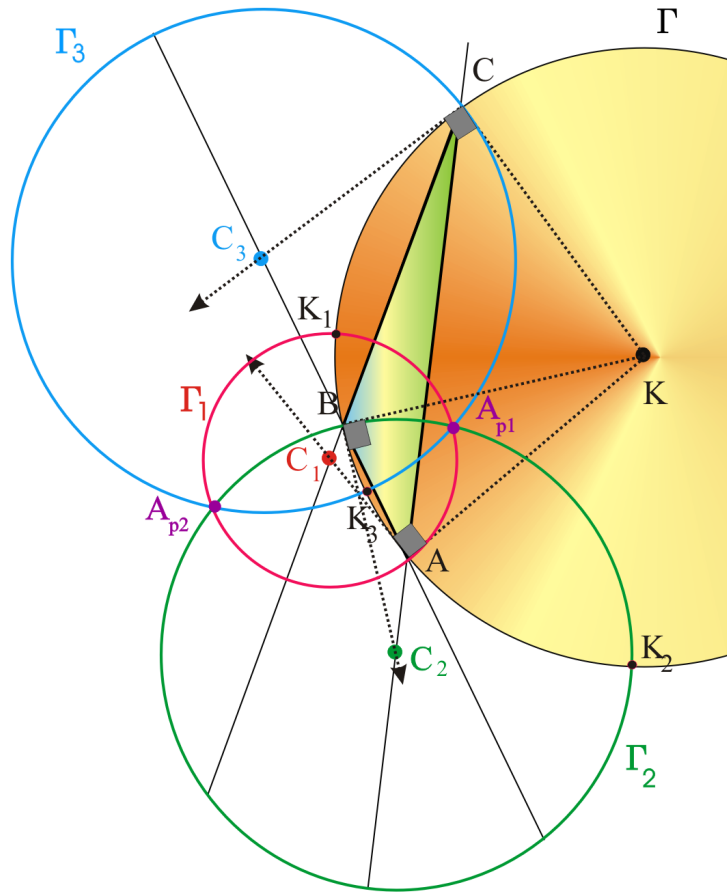
Rappelons qu'un point $M = \{X, Y, Z\}$ appartient à ce cercle si et seulement si sa distance (au carré) au centre est égale à cette valeur, soit

$$0 = c^2 XY + b^2 XZ + a^2 YZ$$

Pour un point $M = \{X, Y, 1-X-Y\}$, le produit scalaire $(-2) \overrightarrow{AK} \cdot \overrightarrow{AM}$ a pour valeur

$$-b^2 + b^2 X + b^2 Y - c^2 Y$$

donc $(-2) \overrightarrow{AK} \cdot \overrightarrow{AC_1} = 0$. De même, $(-2) \overrightarrow{BK} \cdot \overrightarrow{BC_2} = 0$, $(-2) \overrightarrow{CK} \cdot \overrightarrow{CC_3} = 0$. Le cercle Γ est orthogonal aux cercles $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$.



Dessin = Dessin $\cup \{K_1, K_2, K_3\} = \{A, B, C, C_1, C_2, C_3, K, K_1, K_2, K_3, M_1, M_2, M_3, N_1, N_2, N_3\}$

Le repère barycentrique choisi est A, B, C .

Les points composés sont K_1, K_2, K_3 .

Le point K_1 satisfait le système d'équations

$$\begin{cases} a^2 c^2 X Y + b^2 c^2 X Y - c^4 X Y + a^2 c^2 Y^2 - a^2 b^2 X Z + b^4 X Z - b^2 c^2 X Z - a^2 b^2 Z^2 = 0 \\ c^2 X Y + b^2 X Z + a^2 Y Z = 0 \end{cases}$$

La seconde équation fournit $Z = \frac{-c^2 X Y}{b^2 X + a^2 Y}$ et, en reportant dans la première équation, il vient

$$\frac{a^2 c^2 Y (2 b^2 X + a^2 Y) (b^2 X^2 + a^2 X Y + b^2 X Y - c^2 X Y + a^2 Y^2)}{(b^2 X + a^2 Y)^2} = 0$$

La solution $Y = 0$ fournit le point A , la solution $Y = -2 b^2, X = a^2$ fournit le point $K_1 = \{a^2, -2 b^2, -2 c^2\}$, l'expression $b^2 X^2 + a^2 X Y + b^2 X Y - c^2 X Y + a^2 Y^2$ n'étant jamais nulle (poser $Y = t X$).

On déduit les coordonnées barycentriques des points composés:

$$K_1 = \left\{ \frac{a^2}{a^2 - 2 b^2 - 2 c^2}, \frac{2 b^2}{-a^2 + 2 b^2 + 2 c^2}, \frac{2 c^2}{-a^2 + 2 b^2 + 2 c^2} \right\}$$

De même

$$K_2 = \left\{ \frac{2 a^2}{2 a^2 - b^2 + 2 c^2}, \frac{b^2}{-2 a^2 + b^2 - 2 c^2}, \frac{2 c^2}{2 a^2 - b^2 + 2 c^2} \right\}$$

$$K_3 = \left\{ \frac{2a^2}{2a^2 + 2b^2 - c^2}, \frac{2b^2}{2a^2 + 2b^2 - c^2}, \frac{c^2}{-2a^2 - 2b^2 + c^2} \right\}$$

Dessin = Dessin $\cup \{L\} = \{A, B, C, C_1, C_2, C_3, K, K_1, K_2, K_3, L, M_1, M_2, M_3, N_1, N_2, N_3\}$

Détermination du point L :

Soit L le point $(AK_1) \cap (BK_2)$. Le point L est composé.

Comme $L \in (AK_1)$, on a, en choisissant l'inconnue ν_1

$$\overrightarrow{OL} = \nu_1 \overrightarrow{OA} + (1 - \nu_1) \overrightarrow{OK_1}$$

On déduit:

$$\overrightarrow{OL} = a(1) \overrightarrow{OA} + a(2) \overrightarrow{OB} + a(3) \overrightarrow{OC}$$

avec

$$a(1) = \frac{a^2 - 2b^2\nu_1 - 2c^2\nu_1}{a^2 - 2b^2 - 2c^2}$$

$$a(2) = \frac{2b^2(-1 + \nu_1)}{a^2 - 2b^2 - 2c^2}$$

$$a(3) = \frac{2c^2(-1 + \nu_1)}{a^2 - 2b^2 - 2c^2}$$

Comme $L \in (BK_2)$, on a, en choisissant l'inconnue μ_1

$$\overrightarrow{OL} = \mu_1 \overrightarrow{OB} + (1 - \mu_1) \overrightarrow{OK_2}$$

On déduit:

$$\overrightarrow{OL} = b(1) \overrightarrow{OA} + b(2) \overrightarrow{OB} + b(3) \overrightarrow{OC}$$

avec

$$b(1) = \frac{2a^2(1 - \mu_1)}{2a^2 - b^2 + 2c^2}$$

$$b(2) = \frac{-b^2 + 2a^2\mu_1 + 2c^2\mu_1}{2a^2 - b^2 + 2c^2}$$

$$b(3) = \frac{2c^2(1 - \mu_1)}{2a^2 - b^2 + 2c^2}$$

La résolution du système linéaire d'inconnues ν_1, μ_1 donne

$$\nu_1 = \frac{3a^2}{2(a^2 + b^2 + c^2)} \quad \mu_1 = \frac{3b^2}{2(a^2 + b^2 + c^2)}$$

On déduit que:

$$L = \left\{ \frac{a^2}{a^2 + b^2 + c^2}, \frac{b^2}{a^2 + b^2 + c^2}, \frac{c^2}{a^2 + b^2 + c^2} \right\}$$

Dessin = Dessin $\cup \{L_1\} = \{A, B, C, C_1, C_2, C_3, K, K_1, K_2, K_3, L, L_1, M_1, M_2, M_3, N_1, N_2, N_3\}$

Détermination du point L_1 :

Soit L_1 le point $(AK_1) \cap (CK_3)$. Le point L_1 est composé.

Comme $L_1 \in (AK_1)$, on a, en choisissant l'inconnue ν_1

$$\overrightarrow{OL_1} = \nu_1 \overrightarrow{OA} + (1 - \nu_1) \overrightarrow{OK_1}$$

On déduit:

$$\overrightarrow{OL_1} = c(1) \overrightarrow{OA} + c(2) \overrightarrow{OB} + c(3) \overrightarrow{OC}$$

avec

$$\begin{aligned} c(1) &= \frac{a^2 - 2b^2\nu_1 - 2c^2\nu_1}{a^2 - 2b^2 - 2c^2} \\ c(2) &= \frac{2b^2(-1 + \nu_1)}{a^2 - 2b^2 - 2c^2} \\ c(3) &= \frac{2c^2(-1 + \nu_1)}{a^2 - 2b^2 - 2c^2} \end{aligned}$$

Comme $L_1 \in (CK_3)$, on a, en choisissant l'inconnue μ_1

$$\overrightarrow{OL_1} = \mu_1 \overrightarrow{OC} + (1 - \mu_1) \overrightarrow{OK_3}$$

On déduit:

$$\overrightarrow{OL_1} = d(1) \overrightarrow{OA} + d(2) \overrightarrow{OB} + d(3) \overrightarrow{OC}$$

avec

$$\begin{aligned} d(1) &= \frac{2a^2(1 - \mu_1)}{2a^2 + 2b^2 - c^2} \\ d(2) &= \frac{2b^2(1 - \mu_1)}{2a^2 + 2b^2 - c^2} \\ d(3) &= \frac{-c^2 + 2a^2\mu_1 + 2b^2\mu_1}{2a^2 + 2b^2 - c^2} \end{aligned}$$

La résolution du système linéaire d'inconnues ν_1, μ_1 donne

$$\nu_1 = \frac{3a^2}{2(a^2 + b^2 + c^2)} \quad \mu_1 = \frac{3c^2}{2(a^2 + b^2 + c^2)}$$

On déduit que:

$$L_1 = \left\{ \frac{a^2}{a^2 + b^2 + c^2}, \frac{b^2}{a^2 + b^2 + c^2}, \frac{c^2}{a^2 + b^2 + c^2} \right\}$$

On a donc $L = L_1$ qui est le point de Lemoine.

Dessin = Dessin $\cup \{A_{p1}, A_{p2}, P\} = \{A, A_{p1}, A_{p2}, B, C, C_1, C_2, C_3, K, K_1, K_2, K_3, L, L_1, M_1, M_2, M_3, N_1, N_2, N_3, P\}$

Le repère barycentrique choisi est A, B, C .

Les points composés sont A_{p1}, A_{p2}, P .

Déterminons les coordonnées barycentriques $\{X, Y, Z\}$ des points A_{p1} et A_{p2} . Nous devons résoudre le système

$$\begin{cases} a^2 c^2 X Y + b^2 c^2 X Y - c^4 X Y + a^2 c^2 Y^2 - a^2 b^2 X Z + b^4 X Z - b^2 c^2 X Z - a^2 b^2 Z^2 = 0 \\ b^2 c^2 X^2 + a^2 c^2 X Y + b^2 c^2 X Y - c^4 X Y + a^4 Y Z - a^2 b^2 Y Z - a^2 c^2 Y Z - a^2 b^2 Z^2 = 0 \end{cases}$$

La première équation fournit

$$X = \frac{-a^2 c^2 Y^2 + a^2 b^2 Z^2}{a^2 c^2 Y + b^2 c^2 Y - c^4 Y - a^2 b^2 Z + b^4 Z - b^2 c^2 Z}$$

En faisant le choix $Z = 1$, la seconde equation devient:

$$0 = a^4 b^4 - 2 a^2 b^6 + b^8 + a^2 b^4 c^2 - 2 b^6 c^2 + b^4 c^4 - 2 a^4 b^2 c^2 Y + a^2 b^4 c^2 Y + b^6 c^2 Y + a^2 b^2 c^4 Y \\ - 2 b^4 c^4 Y + b^2 c^6 Y + a^4 c^4 Y^2 + a^2 b^2 c^4 Y^2 + b^4 c^4 Y^2 - 2 a^2 c^6 Y^2 - 2 b^2 c^6 Y^2 + c^8 Y^2$$

d'où l'on déduit les deux valeurs possibles pour Y . En normalisant les coordonnées barycentriques $\{X, Y, Z\}$, nous obtenons

$$A_{p1} = \left\{ \frac{a^2 \left(-\sqrt{\lambda} (2a^2 - b^2 - c^2) + \sqrt{3} (-a^2 b^2 + b^4 - a^2 c^2 + c^4) \right)}{-2\sqrt{\lambda} (a^4 - a^2 b^2 + b^4 - a^2 c^2 - b^2 c^2 + c^4)}, \right. \\ \frac{b^2 \left(-\sqrt{\lambda} (a^2 - 2b^2 + c^2) - \sqrt{3} (a^4 - a^2 b^2 - b^2 c^2 + c^4) \right)}{2\sqrt{\lambda} (a^4 - a^2 b^2 + b^4 - a^2 c^2 - b^2 c^2 + c^4)}, \\ \left. \frac{c^2 \left(-\sqrt{\lambda} (a^2 + b^2 - 2c^2) + \sqrt{3} (-a^4 - b^4 + a^2 c^2 + b^2 c^2) \right)}{2\sqrt{\lambda} (a^4 - a^2 b^2 + b^4 - a^2 c^2 - b^2 c^2 + c^4)} \right\} \\ A_{p2} = \left\{ \frac{a^2 \left(\sqrt{\lambda} (-2a^2 + b^2 + c^2) + \sqrt{3} (a^2 b^2 - b^4 + a^2 c^2 - c^4) \right)}{-2\sqrt{\lambda} (a^4 - a^2 b^2 + b^4 - a^2 c^2 - b^2 c^2 + c^4)}, \right. \\ \frac{b^2 \left(\sqrt{\lambda} (a^2 - 2b^2 + c^2) - \sqrt{3} (a^4 - a^2 b^2 - b^2 c^2 + c^4) \right)}{-2\sqrt{\lambda} (a^4 - a^2 b^2 + b^4 - a^2 c^2 - b^2 c^2 + c^4)}, \\ \left. \frac{c^2 \left(\sqrt{\lambda} (a^2 + b^2 - 2c^2) - \sqrt{3} (a^4 + b^4 - a^2 c^2 - b^2 c^2) \right)}{-2\sqrt{\lambda} (a^4 - a^2 b^2 + b^4 - a^2 c^2 - b^2 c^2 + c^4)} \right\}$$

avec

$$\lambda = -a^4 + 2a^2 b^2 - b^4 + 2a^2 c^2 + 2b^2 c^2 - c^4 \\ = (-a + b + c) (a + b - c) (a - b + c) (a + b + c)$$

La projection de A_{p1} ou A_{p2} sur la droite passant par C_1, C_2, C_3 est le point P de coordonnées barycentriques

$$P = \left\{ \frac{a^2 (2a^2 - b^2 - c^2)}{2(a^4 - a^2 b^2 + b^4 - a^2 c^2 - b^2 c^2 + c^4)}, \right. \\ \frac{-b^2 (a^2 - 2b^2 + c^2)}{2(a^4 - a^2 b^2 + b^4 - a^2 c^2 - b^2 c^2 + c^4)}, \\ \left. \frac{-c^2 (a^2 + b^2 - 2c^2)}{2(a^4 - a^2 b^2 + b^4 - a^2 c^2 - b^2 c^2 + c^4)} \right\}$$

Calculons le vecteur $\overrightarrow{LA_{p1}}$. On a:

$$\overrightarrow{LA_{p1}} = e(1) \overrightarrow{OA} + e(2) \overrightarrow{OB} + e(3) \overrightarrow{OC}$$

avec

$$e(1) = \frac{a^2 \left(\sqrt{3} a^2 + 3\sqrt{\lambda} + \sqrt{3} b^2 + \sqrt{3} c^2 \right) (a^2 b^2 - b^4 + a^2 c^2 - c^4)}{2\sqrt{\lambda} (a^2 + b^2 + c^2) (a^4 - a^2 b^2 + b^4 - a^2 c^2 - b^2 c^2 + c^4)}$$

$$e(2) = \frac{-b^2 \left(\sqrt{3} a^2 + 3 \sqrt{\lambda} + \sqrt{3} b^2 + \sqrt{3} c^2 \right) (a^4 - a^2 b^2 - b^2 c^2 + c^4)}{2 \sqrt{\lambda} (a^2 + b^2 + c^2) (a^4 - a^2 b^2 + b^4 - a^2 c^2 - b^2 c^2 + c^4)}$$

$$e(3) = \frac{-c^2 \left(\sqrt{3} a^2 + 3 \sqrt{\lambda} + \sqrt{3} b^2 + \sqrt{3} c^2 \right) (a^4 + b^4 - a^2 c^2 - b^2 c^2)}{2 \sqrt{\lambda} (a^2 + b^2 + c^2) (a^4 - a^2 b^2 + b^4 - a^2 c^2 - b^2 c^2 + c^4)}$$

Calculons le vecteur $\overrightarrow{LA_{p2}}$. On a:

$$\overrightarrow{LA_{p2}} = f(1) \overrightarrow{OA} + f(2) \overrightarrow{OB} + f(3) \overrightarrow{OC}$$

avec

$$f(1) = \frac{a^2 \left(-\sqrt{3} a^2 + 3 \sqrt{\lambda} - \sqrt{3} b^2 - \sqrt{3} c^2 \right) (a^2 b^2 - b^4 + a^2 c^2 - c^4)}{2 \sqrt{\lambda} (a^2 + b^2 + c^2) (a^4 - a^2 b^2 + b^4 - a^2 c^2 - b^2 c^2 + c^4)}$$

$$f(2) = \frac{-b^2 \left(-\sqrt{3} a^2 + 3 \sqrt{\lambda} - \sqrt{3} b^2 - \sqrt{3} c^2 \right) (a^4 - a^2 b^2 - b^2 c^2 + c^4)}{2 \sqrt{\lambda} (a^2 + b^2 + c^2) (a^4 - a^2 b^2 + b^4 - a^2 c^2 - b^2 c^2 + c^4)}$$

$$f(3) = \frac{-c^2 \left(-\sqrt{3} a^2 + 3 \sqrt{\lambda} - \sqrt{3} b^2 - \sqrt{3} c^2 \right) (a^4 + b^4 - a^2 c^2 - b^2 c^2)}{2 \sqrt{\lambda} (a^2 + b^2 + c^2) (a^4 - a^2 b^2 + b^4 - a^2 c^2 - b^2 c^2 + c^4)}$$

On a ainsi

$$\overrightarrow{LA_{p1}} = \frac{\sqrt{3} a^2 + 3 \sqrt{\lambda} + \sqrt{3} b^2 + \sqrt{3} c^2}{-\sqrt{3} a^2 + 3 \sqrt{\lambda} - \sqrt{3} b^2 - \sqrt{3} c^2} \overrightarrow{LA_{p2}}$$

Calculons le vecteur $\overrightarrow{KP}$. On a:

$$\overrightarrow{KP} = g(1) \overrightarrow{OA} + g(2) \overrightarrow{OB} + g(3) \overrightarrow{OC}$$

avec

$$g(1) = \frac{-a^2 (a^2 + b^2 + c^2) (a^2 b^2 - b^4 + a^2 c^2 - c^4)}{2 (a - b - c) (a + b - c) (a - b + c) (a + b + c) (a^4 - a^2 b^2 + b^4 - a^2 c^2 - b^2 c^2 + c^4)}$$

$$g(2) = \frac{b^2 (a^2 + b^2 + c^2) (a^4 - a^2 b^2 - b^2 c^2 + c^4)}{2 (a - b - c) (a + b - c) (a - b + c) (a + b + c) (a^4 - a^2 b^2 + b^4 - a^2 c^2 - b^2 c^2 + c^4)}$$

$$g(3) = \frac{c^2 (a^2 + b^2 + c^2) (a^4 + b^4 - a^2 c^2 - b^2 c^2)}{2 (a - b - c) (a + b - c) (a - b + c) (a + b + c) (a^4 - a^2 b^2 + b^4 - a^2 c^2 - b^2 c^2 + c^4)}$$

Calculons le vecteur $\overrightarrow{KL}$. On a:

$$\overrightarrow{KL} = h(1) \overrightarrow{OA} + h(2) \overrightarrow{OB} + h(3) \overrightarrow{OC}$$

avec

$$h(1) = \frac{-2 a^2 (a^2 b^2 - b^4 + a^2 c^2 - c^4)}{(a - b - c) (a + b - c) (a - b + c) (a + b + c) (a^2 + b^2 + c^2)}$$

$$h(2) = \frac{2 b^2 (a^4 - a^2 b^2 - b^2 c^2 + c^4)}{(a - b - c) (a + b - c) (a - b + c) (a + b + c) (a^2 + b^2 + c^2)}$$

$$h(3) = \frac{2c^2(a^4 + b^4 - a^2c^2 - b^2c^2)}{(a-b-c)(a+b-c)(a-b+c)(a+b+c)(a^2+b^2+c^2)}$$

On a ainsi

$$\overrightarrow{KP} = \frac{(a^2 + b^2 + c^2)^2}{4(a^4 - a^2b^2 + b^4 - a^2c^2 - b^2c^2 + c^4)} \overrightarrow{KL}$$

Pour un point $M = \{X, Y, 1 - X - Y\}$, le produit scalaire $(-2) \overrightarrow{C_1C_2} \cdot \overrightarrow{KM}$ a pour valeur

$$\frac{-a^4b^2 + a^2b^4 + a^4b^2X - a^2b^4X - b^4c^2X + b^2c^4X + a^4b^2Y - a^2b^4Y + a^4c^2Y - a^2c^4Y}{(a-c)(a+c)(b-c)(b+c)}$$

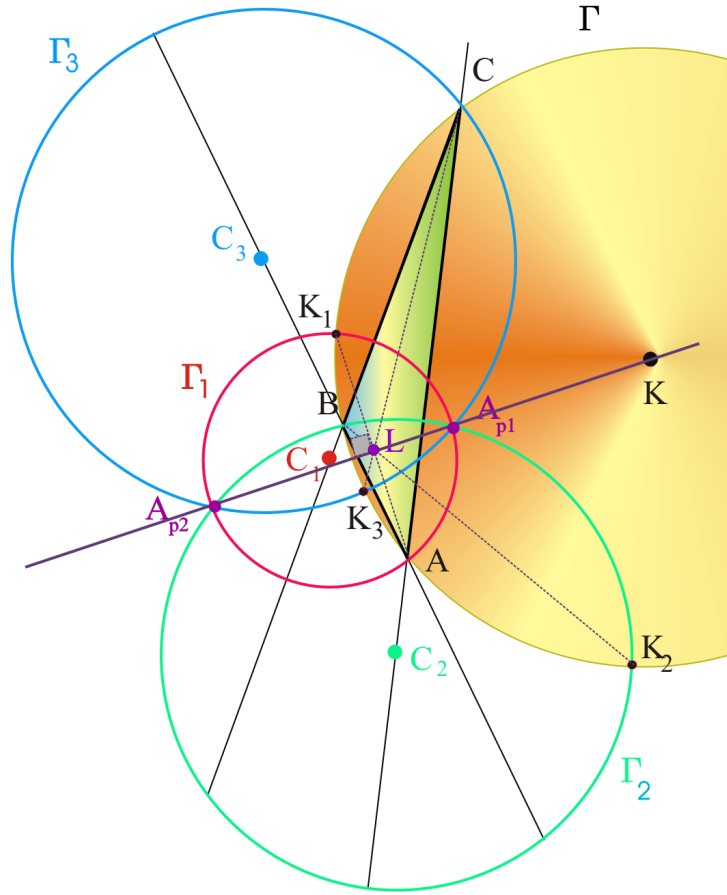
donc $(-2) \overrightarrow{C_1C_2} \cdot \overrightarrow{KA_{p1}} = 0$ et $(-2) \overrightarrow{C_1C_2} \cdot \overrightarrow{KA_{p2}} = 0$.

On obtient

$$\begin{aligned} A_{p1}A_{p2}^2 &= \frac{3a^2b^2c^2}{a^4 - a^2b^2 + b^4 - a^2c^2 - b^2c^2 + c^4} \\ AA_{p1}^2 &= \frac{b^2c^2(a^2 + \sqrt{3}\sqrt{\lambda} + b^2 + c^2)}{2(a^4 - a^2b^2 + b^4 - a^2c^2 - b^2c^2 + c^4)} \\ BA_{p1}^2 &= \frac{a^2c^2(a^2 + \sqrt{3}\sqrt{\lambda} + b^2 + c^2)}{2(a^4 - a^2b^2 + b^4 - a^2c^2 - b^2c^2 + c^4)} \\ CA_{p1}^2 &= \frac{a^2b^2(a^2 + \sqrt{3}\sqrt{\lambda} + b^2 + c^2)}{2(a^4 - a^2b^2 + b^4 - a^2c^2 - b^2c^2 + c^4)} \\ KA_{p1}^2 &= \frac{a^2b^2c^2\left(\sqrt{\lambda}(-a^2 - b^2 - c^2) + \sqrt{3}(a^4 - 2a^2b^2 + b^4 - 2a^2c^2 - 2b^2c^2 + c^4)\right)^2}{4(a-b-c)^2(a+b-c)^2(a-b+c)^2(a+b+c)^2(a^4 - a^2b^2 + b^4 - a^2c^2 - b^2c^2 + c^4)} \\ AA_{p2}^2 &= \frac{b^2c^2(a^2 - \sqrt{3}\sqrt{\lambda} + b^2 + c^2)}{2(a^4 - a^2b^2 + b^4 - a^2c^2 - b^2c^2 + c^4)} \\ BA_{p2}^2 &= \frac{a^2c^2(a^2 - \sqrt{3}\sqrt{\lambda} + b^2 + c^2)}{2(a^4 - a^2b^2 + b^4 - a^2c^2 - b^2c^2 + c^4)} \\ CA_{p2}^2 &= \frac{a^2b^2(a^2 - \sqrt{3}\sqrt{\lambda} + b^2 + c^2)}{2(a^4 - a^2b^2 + b^4 - a^2c^2 - b^2c^2 + c^4)} \\ KA_{p2}^2 &= \frac{a^2b^2c^2\left(\sqrt{\lambda}(a^2 + b^2 + c^2) + \sqrt{3}(a^4 - 2a^2b^2 + b^4 - 2a^2c^2 - 2b^2c^2 + c^4)\right)^2}{4(a-b-c)^2(a+b-c)^2(a-b+c)^2(a+b+c)^2(a^4 - a^2b^2 + b^4 - a^2c^2 - b^2c^2 + c^4)} \end{aligned}$$

donc, après calculs

$$KA_{p1}^2 KA_{p2}^2 = \frac{a^4b^4c^4}{(a-b-c)^2(a+b-c)^2(a-b+c)^2(a+b+c)^2}$$



Dessin = Dessin $\cup \{R_1\} = \{A, A_{p1}, A_{p2}, B, C, C_1, C_2, C_3, K, K_1, K_2, K_3, L, L_1, M_1, M_2, M_3, N_1, N_2, N_3, P, R_1\}$

Détermination du point R_1 :

Soit R_1 le point $(AA_{p1}) \cap (C_1C_2)$. Le point R_1 est composé.

Comme $R_1 \in (AA_{p1})$, on a, en choisissant l'inconnue ν_1

$$\overrightarrow{OR_1} = \nu_1 \overrightarrow{OA} + (1 - \nu_1) \overrightarrow{OA_{p1}}$$

On déduit:

$$\overrightarrow{OR_1} = i(1) \overrightarrow{OA} + i(2) \overrightarrow{OB} + i(3) \overrightarrow{OC}$$

avec

$$i(1) = \frac{\text{Num}(i(1))}{2\sqrt{\lambda} (a^4 - a^2 b^2 + b^4 - a^2 c^2 - b^2 c^2 + c^4)}$$

$$i(2) = \frac{b^2 \left(\sqrt{3} a^4 + a^2 \sqrt{\lambda} - \sqrt{3} a^2 b^2 - 2\sqrt{\lambda} b^2 + \sqrt{\lambda} c^2 - \sqrt{3} b^2 c^2 + \sqrt{3} c^4 \right) (-1 + \nu_1)}{2\sqrt{\lambda} (a^4 - a^2 b^2 + b^4 - a^2 c^2 - b^2 c^2 + c^4)}$$

$$i(3) = \frac{c^2 \left(\sqrt{3} a^4 + a^2 \sqrt{\lambda} + \sqrt{\lambda} b^2 + \sqrt{3} b^4 - \sqrt{3} a^2 c^2 - 2\sqrt{\lambda} c^2 - \sqrt{3} b^2 c^2 \right) (-1 + \nu_1)}{2\sqrt{\lambda} (a^4 - a^2 b^2 + b^4 - a^2 c^2 - b^2 c^2 + c^4)}$$

avec

$$\begin{aligned} Num(i(1)) = & \sqrt{\lambda} (2a^4 - a^2b^2 - a^2c^2 + (-a^2b^2 + 2b^4 - a^2c^2 - 2b^2c^2 + 2c^4) \nu_1) \\ & + \sqrt{3} (a^4b^2 - a^2b^4 + a^4c^2 - a^2c^4 + (-a^4b^2 + a^2b^4 - a^4c^2 + a^2c^4) \nu_1) \end{aligned}$$

Comme $R_1 \in (C_1C_2)$, on a, en choisissant l'inconnue μ_1

$$\overrightarrow{OR_1} = \mu_1 \overrightarrow{OC_1} + (1 - \mu_1) \overrightarrow{OC_2}$$

On déduit:

$$\overrightarrow{OR_1} = j(1) \overrightarrow{OA} + j(2) \overrightarrow{OB} + j(3) \overrightarrow{OC}$$

avec

$$\begin{aligned} j(1) &= \frac{a^2 (1 - \mu_1)}{(a - c) (a + c)} \\ j(2) &= \frac{b^2 \mu_1}{(b - c) (b + c)} \\ j(3) &= \frac{c^2 (b^2 - c^2 + a^2 \mu_1 - b^2 \mu_1)}{(a - c) (a + c) (-b + c) (b + c)} \end{aligned}$$

La résolution du système linéaire d'inconnues ν_1, μ_1 donne

$$\nu_1 = \frac{\sqrt{3} a^2}{\sqrt{3} a^2 + \sqrt{\lambda}}$$

$$\mu_1 = \frac{\sqrt{\lambda} (b - c) (b + c) (-a^2 + 2b^2 - c^2) + \sqrt{3} (b - c) (b + c) (-a^4 + a^2b^2 + b^2c^2 - c^4)}{2\sqrt{3} a^2 (a^4 - a^2b^2 + b^4 - a^2c^2 - b^2c^2 + c^4) + 2\sqrt{\lambda} (a^4 - a^2b^2 + b^4 - a^2c^2 - b^2c^2 + c^4)}$$

On déduit que:

$$\begin{aligned} R_1 = & \left\{ \frac{a^2 \left(\sqrt{\lambda} (2a^2 - b^2 - c^2) + \sqrt{3} (2a^4 - a^2b^2 + b^4 - a^2c^2 - 2b^2c^2 + c^4) \right)}{2 \left(\sqrt{3} a^2 + \sqrt{\lambda} \right) (a^4 - a^2b^2 + b^4 - a^2c^2 - b^2c^2 + c^4)}, \right. \\ & \frac{-b^2 \left(\sqrt{\lambda} (a^2 - 2b^2 + c^2) + \sqrt{3} (a^4 - a^2b^2 - b^2c^2 + c^4) \right)}{2 \left(\sqrt{3} a^2 + \sqrt{\lambda} \right) (a^4 - a^2b^2 + b^4 - a^2c^2 - b^2c^2 + c^4)}, \\ & \left. \frac{-c^2 \left(\sqrt{\lambda} (a^2 + b^2 - 2c^2) + \sqrt{3} (a^4 + b^4 - a^2c^2 - b^2c^2) \right)}{2 \left(\sqrt{3} a^2 + \sqrt{\lambda} \right) (a^4 - a^2b^2 + b^4 - a^2c^2 - b^2c^2 + c^4)} \right\} \end{aligned}$$

Dessin = Dessin $\cup \{R_2\} = \{A, A_{p1}, A_{p2}, B, C, C_1, C_2, C_3, K, K_1, K_2, K_3, L, L_1, M_1, M_2, M_3, N_1, N_2, N_3, P, R_1, R_2\}$

Détermination du point R_2 :

Soit R_2 le point $(AA_{p2}) \cap (C_1C_2)$. Le point R_2 est composé.

Comme $R_2 \in (AA_{p2})$, on a, en choisissant l'inconnue ν_1

$$\overrightarrow{OR_2} = \nu_1 \overrightarrow{OA} + (1 - \nu_1) \overrightarrow{OA_{p2}}$$

On déduit:

$$\overrightarrow{OR_2} = k(1) \overrightarrow{OA} + k(2) \overrightarrow{OB} + k(3) \overrightarrow{OC}$$

avec

$$k(1) = \frac{Num(k(1))}{2\sqrt{\lambda} (a^4 - a^2 b^2 + b^4 - a^2 c^2 - b^2 c^2 + c^4)}$$

$$k(2) = \frac{b^2 \left(-\sqrt{3} a^4 + a^2 \sqrt{\lambda} + \sqrt{3} a^2 b^2 - 2\sqrt{\lambda} b^2 + \sqrt{\lambda} c^2 + \sqrt{3} b^2 c^2 - \sqrt{3} c^4 \right) (-1 + \nu_1)}{2\sqrt{\lambda} (a^4 - a^2 b^2 + b^4 - a^2 c^2 - b^2 c^2 + c^4)}$$

$$k(3) = \frac{c^2 \left(-\sqrt{3} a^4 + a^2 \sqrt{\lambda} + \sqrt{\lambda} b^2 - \sqrt{3} b^4 + \sqrt{3} a^2 c^2 - 2\sqrt{\lambda} c^2 + \sqrt{3} b^2 c^2 \right) (-1 + \nu_1)}{2\sqrt{\lambda} (a^4 - a^2 b^2 + b^4 - a^2 c^2 - b^2 c^2 + c^4)}$$

avec

$$Num(k(1)) = \sqrt{\lambda} (2a^4 - a^2 b^2 - a^2 c^2 + (-a^2 b^2 + 2b^4 - a^2 c^2 - 2b^2 c^2 + 2c^4) \nu_1) \\ + \sqrt{3} (-a^4 b^2 + a^2 b^4 - a^4 c^2 + a^2 c^4 + (a^4 b^2 - a^2 b^4 + a^4 c^2 - a^2 c^4) \nu_1)$$

Comme $R_2 \in (C_1 C_2)$, on a, en choisissant l'inconnue μ_1

$$\overrightarrow{OR_2} = \mu_1 \overrightarrow{OC_1} + (1 - \mu_1) \overrightarrow{OC_2}$$

On déduit:

$$\overrightarrow{OR_2} = l(1) \overrightarrow{OA} + l(2) \overrightarrow{OB} + l(3) \overrightarrow{OC}$$

avec

$$l(1) = \frac{a^2 (1 - \mu_1)}{(a - c) (a + c)}$$

$$l(2) = \frac{b^2 \mu_1}{(b - c) (b + c)}$$

$$l(3) = \frac{c^2 (b^2 - c^2 + a^2 \mu_1 - b^2 \mu_1)}{(a - c) (a + c) (-b + c) (b + c)}$$

La résolution du système linéaire d'inconnues ν_1, μ_1 donne

$$\nu_1 = \frac{\sqrt{3} a^2}{\sqrt{3} a^2 - \sqrt{\lambda}}$$

$$\mu_1 = \frac{\sqrt{\lambda} (b - c) (b + c) (a^2 - 2b^2 + c^2) + \sqrt{3} (b - c) (b + c) (-a^4 + a^2 b^2 + b^2 c^2 - c^4)}{2\sqrt{3} a^2 (a^4 - a^2 b^2 + b^4 - a^2 c^2 - b^2 c^2 + c^4) - 2\sqrt{\lambda} (a^4 - a^2 b^2 + b^4 - a^2 c^2 - b^2 c^2 + c^4)}$$

On déduit que:

$$R_2 = \left\{ \frac{a^2 \left(\sqrt{\lambda} (-2a^2 + b^2 + c^2) + \sqrt{3} (2a^4 - a^2 b^2 + b^4 - a^2 c^2 - 2b^2 c^2 + c^4) \right)}{2 \left(\sqrt{3} a^2 - \sqrt{\lambda} \right) (a^4 - a^2 b^2 + b^4 - a^2 c^2 - b^2 c^2 + c^4)}, \right. \\ \frac{-b^2 (\sqrt{\lambda} (-a^2 + 2b^2 - c^2) + \sqrt{3} (a^4 - a^2 b^2 - b^2 c^2 + c^4))}{2 \left(\sqrt{3} a^2 - \sqrt{\lambda} \right) (a^4 - a^2 b^2 + b^4 - a^2 c^2 - b^2 c^2 + c^4)}, \\ \left. \frac{-c^2 \left(\sqrt{\lambda} (-a^2 - b^2 + 2c^2) + \sqrt{3} (a^4 + b^4 - a^2 c^2 - b^2 c^2) \right)}{2 \left(\sqrt{3} a^2 - \sqrt{\lambda} \right) (a^4 - a^2 b^2 + b^4 - a^2 c^2 - b^2 c^2 + c^4)} \right\}$$

On a alors

$$R_1 R_2^2 = \frac{6 a^2 b^2 (a-b-c) (b-c)^2 (a+b-c) c^2 (a-b+c) (b+c)^2 (a+b+c)}{\left(\sqrt{3} a^2 - \sqrt{\lambda}\right)^2 \left(\sqrt{3} a^2 + \sqrt{\lambda}\right)^2 (a^4 - a^2 b^2 + b^4 - a^2 c^2 - b^2 c^2 + c^4)}$$

Dessin = Dessin $\cup \{P_1\} = \{A, A_{p1}, A_{p2}, B, C, C_1, C_2, C_3, K, K_1, K_2, K_3, L, L_1, M_1, M_2, M_3, N_1, N_2, N_3, P, P_1, R_1, R_2\}$

Détermination du point P_1 :

Soit P_2 le point $(BA_{p1}) \cap (C_1 C_2)$. On obtient:

$$P_1 = \left\{ \frac{a^2 \left(\sqrt{\lambda} (2a^2 - b^2 - c^2) + \sqrt{3} (a^2 b^2 - b^4 + a^2 c^2 - c^4) \right)}{2 \left(\sqrt{\lambda} + \sqrt{3} b^2 \right) (a^4 - a^2 b^2 + b^4 - a^2 c^2 - b^2 c^2 + c^4)}, \right. \\ \left. \frac{b^2 \left(\sqrt{\lambda} (-a^2 + 2b^2 - c^2) + \sqrt{3} (a^4 - a^2 b^2 + 2b^4 - 2a^2 c^2 - b^2 c^2 + c^4) \right)}{2 \left(\sqrt{\lambda} + \sqrt{3} b^2 \right) (a^4 - a^2 b^2 + b^4 - a^2 c^2 - b^2 c^2 + c^4)}, \right. \\ \left. \frac{-c^2 \left(\sqrt{\lambda} (a^2 + b^2 - 2c^2) + \sqrt{3} (a^4 + b^4 - a^2 c^2 - b^2 c^2) \right)}{2 \left(\sqrt{\lambda} + \sqrt{3} b^2 \right) (a^4 - a^2 b^2 + b^4 - a^2 c^2 - b^2 c^2 + c^4)} \right\}$$

Dessin = Dessin $\cup \{P_2\} = \{A, A_{p1}, A_{p2}, B, C, C_1, C_2, C_3, K, K_1, K_2, K_3, L, L_1, M_1, M_2, M_3, N_1, N_2, N_3, P, P_1, P_2, R_1, R_2\}$

Détermination du point P_2 :

Soit P_2 le point $(BA_{p2}) \cap (C_1 C_2)$. On obtient

$$P_2 = \left\{ \frac{a^2 \left(\sqrt{\lambda} (2a^2 - b^2 - c^2) + \sqrt{3} (-a^2 b^2) + b^4 - a^2 c^2 + c^4 \right)}{2 \left(\sqrt{\lambda} - \sqrt{3} b^2 \right) (a^4 - a^2 b^2 + b^4 - a^2 c^2 - b^2 c^2 + c^4)}, \right. \\ \left. \frac{-b^2 \left(\sqrt{\lambda} (a^2 - 2b^2 + c^2) + \sqrt{3} (a^4 - a^2 b^2 + 2b^4 - 2a^2 c^2 - b^2 c^2 + c^4) \right)}{2 \left(\sqrt{\lambda} - \sqrt{3} b^2 \right) (a^4 - a^2 b^2 + b^4 - a^2 c^2 - b^2 c^2 + c^4)}, \right. \\ \left. \frac{-c^2 \left(\sqrt{\lambda} (a^2 + b^2 - 2c^2) + \sqrt{3} (-a^4 - b^4 + a^2 c^2 + b^2 c^2) \right)}{2 \left(\sqrt{\lambda} - \sqrt{3} b^2 \right) (a^4 - a^2 b^2 + b^4 - a^2 c^2 - b^2 c^2 + c^4)} \right\}$$

On a alors:

$$P_1 P_2^2 = \frac{-3 a^2 b^2 (a-c)^2 (a-b-c) (a+b-c) c^2 (a+c)^2 (a-b+c) (a+b+c)}{\left(\sqrt{\lambda} - \sqrt{3} b^2\right)^2 \left(\sqrt{\lambda} + \sqrt{3} b^2\right)^2 (a^4 - a^2 b^2 + b^4 - a^2 c^2 - b^2 c^2 + c^4)}$$

Dessin = Dessin $\cup \{Q_1\} = \{A, A_{p1}, A_{p2}, B, C, C_1, C_2, C_3, K, K_1, K_2, K_3, L, L_1, M_1, M_2, M_3, N_1, N_2, N_3, P, P_1, P_2, Q_1, R_1, R_2\}$

Détermination du point Q_1 :

Soit Q_1 le point $(CA_{p1}) \cap (C_1C_2)$. On obtient:

$$Q_1 = \left\{ \frac{a^2 (\sqrt{\lambda} (2a^2 - b^2 - c^2) + \sqrt{3} (a^2 b^2 - b^4 + a^2 c^2 - c^4))}{2 (\sqrt{\lambda} + \sqrt{3} c^2) (a^4 - a^2 b^2 + b^4 - a^2 c^2 - b^2 c^2 + c^4)}, \right. \\ \frac{b^2 (\sqrt{\lambda} (-a^2 + 2b^2 - c^2) + \sqrt{3} (-a^4 + a^2 b^2 + b^2 c^2 - c^4))}{2 (\sqrt{\lambda} + \sqrt{3} c^2) (a^4 - a^2 b^2 + b^4 - a^2 c^2 - b^2 c^2 + c^4)}, \\ \left. \frac{c^2 (\sqrt{\lambda} (-a^2 - b^2 + 2c^2) + \sqrt{3} (a^4 - 2a^2 b^2 + b^4 - a^2 c^2 - b^2 c^2 + 2c^4))}{2 (\sqrt{\lambda} + \sqrt{3} c^2) (a^4 - a^2 b^2 + b^4 - a^2 c^2 - b^2 c^2 + c^4)} \right\}$$

Dessin = Dessin $\cup \{Q_2\} = \{A, A_{p1}, A_{p2}, B, C, C_1, C_2, C_3, K, K_1, K_2, K_3, L, L_1, M_1, M_2, M_3, N_1, N_2, N_3, P, P_1, P_2, Q_1, Q_2, R_1, R_2\}$

Détermination du point Q_2 :

Soit Q_2 le point $(CA_{p2}) \cap (C_1C_2)$. On obtient:

$$Q_2 = \left\{ \frac{a^2 (\sqrt{\lambda} (2a^2 - b^2 - c^2) + \sqrt{3} (-a^2 b^2) + b^4 - a^2 c^2 + c^4))}{2 (\sqrt{\lambda} - \sqrt{3} c^2) (a^4 - a^2 b^2 + b^4 - a^2 c^2 - b^2 c^2 + c^4)}, \right. \\ \frac{b^2 (\sqrt{\lambda} (-a^2 + 2b^2 - c^2) + \sqrt{3} (a^4 - a^2 b^2 - b^2 c^2 + c^4))}{2 (\sqrt{\lambda} - \sqrt{3} c^2) (a^4 - a^2 b^2 + b^4 - a^2 c^2 - b^2 c^2 + c^4)}, \\ \left. \frac{-c^2 (\sqrt{\lambda} (a^2 + b^2 - 2c^2) + \sqrt{3} (a^4 - 2a^2 b^2 + b^4 - a^2 c^2 - b^2 c^2 + 2c^4))}{2 (\sqrt{\lambda} - \sqrt{3} c^2) (a^4 - a^2 b^2 + b^4 - a^2 c^2 - b^2 c^2 + c^4)} \right\}$$

On a alors:

$$Q_1 Q_2^2 = \frac{-3 a^2 (a-b)^2 b^2 (a+b)^2 (a-b-c) (a+b-c) c^2 (a-b+c) (a+b+c)}{(\sqrt{\lambda} - \sqrt{3} c^2)^2 (\sqrt{\lambda} + \sqrt{3} c^2)^2 (a^4 - a^2 b^2 + b^4 - a^2 c^2 - b^2 c^2 + c^4)}$$

CHAPITRE

23

Théorèmes de Varignon et Wittenbauer

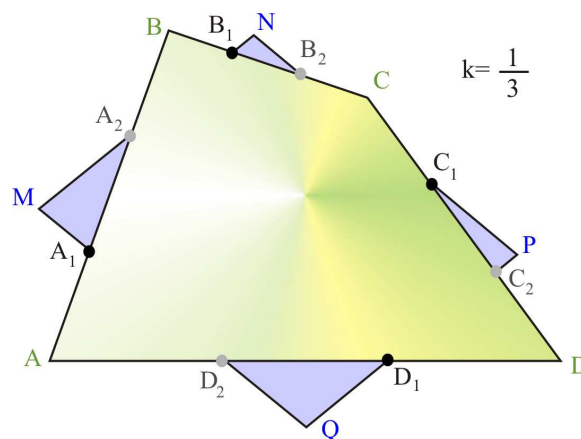
23 Théorèmes de Varignon et Wittenbauer

23.1 Théorèmes de Varignon et Wittenbauer

Exercice 23.1.1

Soient $ABCD$ un quadrilatère et k un réel fixé. On place sur chaque côté du quadrilatère deux points, l'un d'eux est le barycentre des 2 sommets définissant le côté mentionné, affectés des coefficients $\{k, 1-k\}$, l'autre est le barycentre de ces mêmes sommets affectés des coefficients $\{1-k, k\}$. On définit ainsi 8 points $A_1, A_2 \in (AB)$, $B_1, B_2 \in (BC)$, $C_1, C_2 \in (CD)$, $D_1, D_2 \in (DA)$. En joignant les couples de droites issues de ces points, on définit M le point $(D_2A_1) \cap (A_2B_1)$, N le point $(A_2B_1) \cap (B_2C_1)$, P le point $(B_2C_1) \cap (C_2D_1)$, Q le point $(C_2D_1) \cap (D_2A_1)$. Montrer que la figure $MNPQ$ est un parallélogramme.

Les théorèmes de Varignon et Wittenbauer correspondent à $k = \frac{1}{2}$ et $k = \frac{1}{3}$.

**Solution:**

Le repère barycentrique choisi est A, B, C .

Soient $x, y \in \mathbb{R}$ et $D = \{x, y, 1-x-y\}$.

Dessin = $\{A, A_1, A_2, B, B_1, B_2, C, C_1, C_2, D, D_1, D_2\}$

Les points composés sont $A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2, D_1, D_2$.

On a les équations vectorielles

$$\begin{aligned}\vec{0} &= \overrightarrow{A_1B} (1-k) + \overrightarrow{A_1A} k \\ \vec{0} &= \overrightarrow{A_2A} (1-k) + \overrightarrow{A_2B} k \\ \vec{0} &= \overrightarrow{B_1C} (1-k) + \overrightarrow{B_1B} k \\ \vec{0} &= \overrightarrow{B_2B} (1-k) + \overrightarrow{B_2C} k \\ \vec{0} &= \overrightarrow{C_1D} (1-k) + \overrightarrow{C_1C} k \\ \vec{0} &= \overrightarrow{C_2C} (1-k) + \overrightarrow{C_2D} k \\ \vec{0} &= \overrightarrow{D_1A} (1-k) + \overrightarrow{D_1D} k \\ \vec{0} &= \overrightarrow{D_2D} (1-k) + \overrightarrow{D_2A} k\end{aligned}$$

et, par découpages automatiques et résolution de système linéaire, on déduit les coordonnées barycentriques des points composés:

$$\begin{aligned}A_1 &= \{k, 1-k, 0\} \\ A_2 &= \{1-k, k, 0\} \\ B_1 &= \{0, k, 1-k\} \\ B_2 &= \{0, 1-k, k\} \\ C_1 &= \{(1-k)x, (1-k)y, 1-x+kx-y+ky\} \\ C_2 &= \{kx, ky, 1-kx-ky\} \\ D_1 &= \{1-k+kx, ky, -k(-1+x+y)\} \\ D_2 &= \{k+x-kx, (1-k)y, (-1+k)(-1+x+y)\}\end{aligned}$$

Dessin = Dessin $\cup \{M\} = \{A, A_1, A_2, B, B_1, B_2, C, C_1, C_2, D, D_1, D_2, M\}$

Détermination du point M :

Soit M le point $(D_2A_1) \cap (A_2B_1)$. Le point M est composé.

Comme $M \in (D_2A_1)$, on a, en choisissant les inconnues ν_1

$$\overrightarrow{OM} = (1-\nu_1) \overrightarrow{OA_1} + \nu_1 \overrightarrow{OD_2}$$

On déduit:

$$\overrightarrow{OM} = a(1) \overrightarrow{OA} + a(2) \overrightarrow{OB} + a(3) \overrightarrow{OC}$$

avec

$$\begin{aligned}a(1) &= k + \nu_1 x - k \nu_1 x \\ a(2) &= (1-k)(1-\nu_1 + \nu_1 y) \\ a(3) &= (-1+k) \nu_1 (-1+x+y)\end{aligned}$$

Comme $M \in (A_2B_1)$, on a, en choisissant les inconnues μ_1

$$\overrightarrow{OM} = \mu_1 \overrightarrow{OA_2} + (1-\mu_1) \overrightarrow{OB_1}$$

On déduit:

$$\overrightarrow{OM} = b(1) \overrightarrow{OA} + b(2) \overrightarrow{OB} + b(3) \overrightarrow{OC}$$

avec

$$b(1) = (1 - k) \mu_1$$

$$b(2) = k$$

$$b(3) = (-1 + k) (-1 + \mu_1)$$

La résolution du système linéaire d'inconnues ν_1, μ_1 donne

$$\mu_1 = \frac{x - k (-1 + 2x + y)}{(-1 + k) (-1 + y)} \quad \nu_1 = \frac{1 - 2k}{(-1 + k) (-1 + y)}$$

On déduit que:

$$M = \left\{ \frac{-k - x + 2kx + ky}{-1 + y}, k, -\frac{(-1 + 2k) (-1 + x + y)}{-1 + y} \right\}$$

Dessin = Dessin $\cup \{N\} = \{A, A_1, A_2, B, B_1, B_2, C, C_1, C_2, D, D_1, D_2, M, N\}$

Détermination du point N :

Soit N le point $(A_2B_1) \cap (B_2C_1)$. Le point N est composé.

Comme $N \in (A_2B_1)$, on a, en choisissant les inconnues ν_1

$$\overrightarrow{ON} = \nu_1 \overrightarrow{OA_2} + (1 - \nu_1) \overrightarrow{OB_1}$$

On déduit:

$$\overrightarrow{ON} = c(1) \overrightarrow{OA} + c(2) \overrightarrow{OB} + c(3) \overrightarrow{OC}$$

avec

$$c(1) = (1 - k) \nu_1$$

$$c(2) = k$$

$$c(3) = (-1 + k) (-1 + \nu_1)$$

Comme $N \in (B_2C_1)$, on a, en choisissant les inconnues μ_1

$$\overrightarrow{ON} = \mu_1 \overrightarrow{OB_2} + (1 - \mu_1) \overrightarrow{OC_1}$$

On déduit:

$$\overrightarrow{ON} = d(1) \overrightarrow{OA} + d(2) \overrightarrow{OB} + d(3) \overrightarrow{OC}$$

avec

$$d(1) = (-1 + k) (-1 + \mu_1) x$$

$$d(2) = (-1 + k) (-\mu_1 - y + \mu_1 y)$$

$$d(3) = 1 - x + kx - y + ky + \mu_1 (-1 + k + x - kx + y - ky)$$

La résolution du système linéaire d'inconnues ν_1, μ_1 donne

$$\nu_1 = \frac{x - 2kx}{(-1 + k) (-1 + y)} \quad \mu_1 = \frac{k - y + ky}{(-1 + k) (-1 + y)}$$

On déduit que:

$$N = \left\{ \frac{(-1+2k)x}{-1+y}, k, -\frac{1-k-x+2ky-y+ky}{-1+y} \right\}$$

Dessin = Dessin $\cup \{P\} = \{A, A_1, A_2, B, B_1, B_2, C, C_1, C_2, D, D_1, D_2, M, N, P\}$

Détermination du point P :

Soit P le point $(B_2C_1) \cap (C_2D_1)$. Le point P est composé.

Comme $P \in (B_2C_1)$, on a, en choisissant les inconnues ν_1

$$\overrightarrow{OP} = \nu_1 \overrightarrow{OB_2} + (1 - \nu_1) \overrightarrow{OC_1}$$

On déduit:

$$\overrightarrow{OP} = e(1) \overrightarrow{OA} + e(2) \overrightarrow{OB} + e(3) \overrightarrow{OC}$$

avec

$$e(1) = (-1+k)(-1+\nu_1)x$$

$$e(2) = (-1+k)(-\nu_1 - y + \nu_1 y)$$

$$e(3) = 1 - x + kx - y + ky + \nu_1(-1+k+x-kx+y-ky)$$

Comme $P \in (C_2D_1)$, on a, en choisissant les inconnues μ_1

$$\overrightarrow{OP} = \mu_1 \overrightarrow{OC_2} + (1 - \mu_1) \overrightarrow{OD_1}$$

On déduit:

$$\overrightarrow{OP} = f(1) \overrightarrow{OA} + f(2) \overrightarrow{OB} + f(3) \overrightarrow{OC}$$

avec

$$f(1) = 1 - k - \mu_1 + k\mu_1 + kx$$

$$f(2) = ky$$

$$f(3) = k + \mu_1 - k\mu_1 - kx - ky$$

La résolution du système linéaire d'inconnues ν_1, μ_1 donne

$$\mu_1 = \frac{-1+x+y-k(-1+2x+y)}{(-1+k)(1-y)} \quad \nu_1 = \frac{y-2ky}{-1+k+y-ky}$$

On déduit que:

$$P = \left\{ \frac{x(1-k-ky)}{1-y}, ky, \frac{1-x+kx-y-ky+ky+ky^2}{1-y} \right\}$$

Dessin = Dessin $\cup \{Q\} = \{A, A_1, A_2, B, B_1, B_2, C, C_1, C_2, D, D_1, D_2, M, N, P, Q\}$

Détermination du point Q :

Soit Q le point $(C_2D_1) \cap (D_2A_1)$. Le point Q est composé.

Comme $Q \in (C_2D_1)$, on a, en choisissant les inconnues ν_1

$$\overrightarrow{OQ} = \nu_1 \overrightarrow{OC_2} + (1 - \nu_1) \overrightarrow{OD_1}$$

On déduit:

$$\overrightarrow{OQ} = g(1) \overrightarrow{OA} + g(2) \overrightarrow{OB} + g(3) \overrightarrow{OC}$$

avec

$$g(1) = 1 - k - \nu_1 + k \nu_1 + k x$$

$$g(2) = k y$$

$$g(3) = k + \nu_1 - k \nu_1 - k x - k y$$

Comme $Q \in (D_2 A_1)$, on a, en choisissant les inconnues μ_1

$$\overrightarrow{OQ} = (1 - \mu_1) \overrightarrow{OA_1} + \mu_1 \overrightarrow{OD_2}$$

On déduit:

$$\overrightarrow{OQ} = h(1) \overrightarrow{OA} + h(2) \overrightarrow{OB} + h(3) \overrightarrow{OC}$$

avec

$$h(1) = k + \mu_1 x - k \mu_1 x$$

$$h(2) = (1 - k) (1 - \mu_1 + \mu_1 y)$$

$$h(3) = (-1 + k) \mu_1 (-1 + x + y)$$

La résolution du système linéaire d'inconnues ν_1, μ_1 donne

$$\nu_1 = \frac{(-1 + 2k) (-1 + x + y)}{(-1 + k) (-1 + y)} \quad \mu_1 = \frac{-1 + k + k y}{(1 - k) (-1 + y)}$$

On déduit que:

$$Q = \left\{ \frac{k + x - k x - k y - k x y}{1 - y}, k y, \frac{(-1 + x + y) (-1 + k + k y)}{1 - y} \right\}$$

Calculons le vecteur $\overrightarrow{MN}$. On a:

$$\overrightarrow{MN} = i(1) \overrightarrow{OA} + i(2) \overrightarrow{OB} + i(3) \overrightarrow{OC}$$

avec

$$i(1) = -k \quad i(2) = 0 \quad i(3) = k$$

Calculons le vecteur $\overrightarrow{QP}$. On a:

$$\overrightarrow{QP} = j(1) \overrightarrow{OA} + j(2) \overrightarrow{OB} + j(3) \overrightarrow{OC}$$

avec

$$j(1) = -k \quad j(2) = 0 \quad j(3) = k$$

On a ainsi

$$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{QP}$$

La distance MN^2 est égale à

$$MN^2 = AC^2 k^2 = b^2 k^2$$

La distance NP^2 est égale à

$$NP^2 = -AB^2 k^2 x (-1 + y) + AC^2 k^2 x (-1 + x + y) + BC^2 k^2 (-1 + y) (-1 + x + y)$$

soit

$$NP^2 = k^2 (a^2 - a^2 x - b^2 x + c^2 x + b^2 x^2 - 2a^2 y + a^2 xy + b^2 xy - c^2 xy + a^2 y^2)$$

La distance BD^2 est égale à

$$BD^2 = -AB^2 x (-1 + y) + AC^2 x (-1 + x + y) + BC^2 (-1 + y) (-1 + x + y)$$

soit

$$BD^2 = a^2 - a^2 x - b^2 x + c^2 x + b^2 x^2 - 2a^2 y + a^2 xy + b^2 xy - c^2 xy + a^2 y^2$$

2). Autres parallélogrammes.

Calculons le vecteur $\overrightarrow{B_1C_2}$. On a:

$$\overrightarrow{B_1C_2} = o(1) \overrightarrow{OA} + o(2) \overrightarrow{OB} + o(3) \overrightarrow{OC}$$

avec

$$o(1) = kx$$

$$o(2) = k(-1 + y)$$

$$o(3) = k(1 - x - y)$$

Calculons le vecteur $\overrightarrow{A_2D_1}$. On a:

$$\overrightarrow{A_2D_1} = p(1) \overrightarrow{OA} + p(2) \overrightarrow{OB} + p(3) \overrightarrow{OC}$$

avec

$$p(1) = kx$$

$$p(2) = k(-1 + y)$$

$$p(3) = k(1 - x - y)$$

On a ainsi

$$\overrightarrow{B_1C_2} = \overrightarrow{A_2D_1}$$

Calculons le vecteur $\overrightarrow{A_1B_2}$. On a:

$$\overrightarrow{A_1B_2} = q(1) \overrightarrow{OA} + q(2) \overrightarrow{OB} + q(3) \overrightarrow{OC}$$

avec

$$q(1) = -k \quad q(2) = 0 \quad q(3) = k$$

Calculons le vecteur $\overrightarrow{D_2C_1}$. On a:

$$\overrightarrow{D_2C_1} = r(1) \overrightarrow{OA} + r(2) \overrightarrow{OB} + r(3) \overrightarrow{OC}$$

avec

$$r(1) = -k \quad r(2) = 0 \quad r(3) = k$$

On a ainsi

$$\overrightarrow{A_1B_2} = \overrightarrow{D_2C_1}$$

3). **Dessin** = Dessin $\cup \{M_1\} = \{A, A_1, A_2, B, B_1, B_2, C, C_1, C_2, D, D_1, D_2, M_1\}$

Détermination du point M_1 :

Soit M_1 le point $(D_1A_2) \cap (A_1B_2)$. Le point M_1 est composé.

Comme $M_1 \in (D_1A_2)$, on a, en choisissant les inconnues ν_1

$$\overrightarrow{OM_1} = (1 - \nu_1) \overrightarrow{OA_2} + \nu_1 \overrightarrow{OD_1}$$

On déduit:

$$\overrightarrow{OM_1} = a(1) \overrightarrow{OA} + a(2) \overrightarrow{OB} + a(3) \overrightarrow{OC}$$

avec

$$a(1) = 1 - k + k \nu_1 x$$

$$a(2) = k (1 - \nu_1 + \nu_1 y)$$

$$a(3) = k \nu_1 (1 - x - y)$$

Comme $M_1 \in (A_1B_2)$, on a, en choisissant les inconnues μ_1

$$\overrightarrow{OM_1} = \mu_1 \overrightarrow{OA_1} + (1 - \mu_1) \overrightarrow{OB_2}$$

On déduit:

$$\overrightarrow{OM_1} = b(1) \overrightarrow{OA} + b(2) \overrightarrow{OB} + b(3) \overrightarrow{OC}$$

avec

$$b(1) = k \mu_1$$

$$b(2) = 1 - k$$

$$b(3) = k (1 - \mu_1)$$

La résolution du système linéaire d'inconnues ν_1, μ_1 donne

$$\mu_1 = \frac{-1 + x + y - k (-1 + 2x + y)}{k (-1 + y)} \quad \nu_1 = \frac{1 - 2k}{k (-1 + y)}$$

On déduit que:

$$M_1 = \left\{ \frac{1 - k - x + 2kx - y + ky}{1 - y}, 1 - k, \frac{(-1 + 2k)(-1 + x + y)}{-1 + y} \right\}$$

Dessin = Dessin $\cup \{N_1\} = \{A, A_1, A_2, B, B_1, B_2, C, C_1, C_2, D, D_1, D_2, M_1, N_1\}$

Détermination du point N_1 :

Soit N_1 le point $(A_1B_2) \cap (B_1C_2)$. Le point N_1 est composé.

Comme $N_1 \in (A_1B_2)$, on a, en choisissant les inconnues ν_1

$$\overrightarrow{ON_1} = \nu_1 \overrightarrow{OA_1} + (1 - \nu_1) \overrightarrow{OB_2}$$

On déduit:

$$\overrightarrow{ON_1} = c(1) \overrightarrow{OA} + c(2) \overrightarrow{OB} + c(3) \overrightarrow{OC}$$

avec

$$c(1) = k \nu_1$$

$$c(2) = 1 - k$$

$$c(3) = k (1 - \nu_1)$$

Comme $N_1 \in (B_1C_2)$, on a, en choisissant les inconnues μ_1

$$\overrightarrow{ON_1} = \mu_1 \overrightarrow{OB_1} + (1 - \mu_1) \overrightarrow{OC_2}$$

On déduit:

$$\overrightarrow{ON_1} = d(1) \overrightarrow{OA} + d(2) \overrightarrow{OB} + d(3) \overrightarrow{OC}$$

avec

$$d(1) = k (1 - \mu_1) x$$

$$d(2) = (k (\mu_1 + y - \mu_1 y))$$

$$d(3) = 1 - k \mu_1 - k x + k \mu_1 x - k y + k \mu_1 y$$

La résolution du système linéaire d'inconnues ν_1, μ_1 donne

$$\nu_1 = \frac{x - 2 k x}{k (-1 + y)} \quad \mu_1 = \frac{-1 + k + k y}{k (-1 + y)}$$

On déduit que:

$$N_1 = \left\{ \frac{(1 - 2 k) x}{-1 + y}, 1 - k, \frac{-k - x + 2 k x + k y}{-1 + y} \right\}$$

Dessin = Dessin $\cup \{P_1\} = \{A, A_1, A_2, B, B_1, B_2, C, C_1, C_2, D, D_1, D_2, M_1, N_1, P_1\}$

Détermination du point P_1 :

Soit P_1 le point $(B_1C_2) \cap (C_1D_2)$. Le point P_1 est composé.

Comme $P_1 \in (B_1C_2)$, on a, en choisissant les inconnues ν_1

$$\overrightarrow{OP_1} = \nu_1 \overrightarrow{OB_1} + (1 - \nu_1) \overrightarrow{OC_2}$$

On déduit:

$$\overrightarrow{OP_1} = e(1) \overrightarrow{OA} + e(2) \overrightarrow{OB} + e(3) \overrightarrow{OC}$$

avec

$$e(1) = k (1 - \nu_1) x$$

$$e(2) = k (\nu_1 + y - \nu_1 y)$$

$$e(3) = 1 - k \nu_1 - k x + k \nu_1 x - k y + k \nu_1 y$$

Comme $P_1 \in (C_1D_2)$, on a, en choisissant les inconnues μ_1

$$\overrightarrow{OP_1} = \mu_1 \overrightarrow{OC_1} + (1 - \mu_1) \overrightarrow{OD_2}$$

On déduit:

$$\overrightarrow{OP_1} = f(1) \overrightarrow{OA} + f(2) \overrightarrow{OB} + f(3) \overrightarrow{OC}$$

avec

$$f(1) = k - k \mu_1 + x - k x$$

$$f(2) = (1 - k) y$$

$$f(3) = 1 - k + k \mu_1 - x + k x - y + k y$$

La résolution du système linéaire d'inconnues ν_1, μ_1 donne

$$\mu_1 = \frac{x - k(-1 + 2x + y)}{k - ky} \quad \nu_1 = \frac{y - 2ky}{k - ky}$$

On déduit que:

$$P_1 = \left\{ \frac{x(k - y + ky)}{1 - y}, (1 - k)y, \frac{-1 + kx + 2y - ky - xy + kxy - y^2 + ky^2}{-1 + y} \right\}$$

Dessin = Dessin $\cup \{Q_1\} = \{A, A_1, A_2, B, B_1, B_2, C, C_1, C_2, D, D_1, D_2, M_1, N_1, P_1, Q_1\}$

Détermination du point Q_1 :

Soit Q_1 le point $(C_1D_2) \cap (D_1A_2)$. Le point Q_1 est composé.

Comme $Q_1 \in (C_1D_2)$, on a, en choisissant les inconnues ν_1

$$\overrightarrow{OQ_1} = \nu_1 \overrightarrow{OC_1} + (1 - \nu_1) \overrightarrow{OD_2}$$

On déduit:

$$\overrightarrow{OQ_1} = g(1) \overrightarrow{OA} + g(2) \overrightarrow{OB} + g(3) \overrightarrow{OC}$$

avec

$$g(1) = k - k\nu_1 + x - kx$$

$$g(2) = (1 - k)y$$

$$g(3) = 1 - k + k\nu_1 - x + kx - y + ky$$

Comme $Q_1 \in (D_1A_2)$, on a, en choisissant les inconnues μ_1

$$\overrightarrow{OQ_1} = (1 - \mu_1) \overrightarrow{OA_2} + \mu_1 \overrightarrow{OD_1}$$

On déduit:

$$\overrightarrow{OQ_1} = h(1) \overrightarrow{OA} + h(2) \overrightarrow{OB} + h(3) \overrightarrow{OC}$$

avec

$$h(1) = 1 - k + k\mu_1 x$$

$$h(2) = k(1 - \mu_1 + \mu_1 y)$$

$$h(3) = k\mu_1(1 - x - y)$$

La résolution du système linéaire d'inconnues ν_1, μ_1 donne

$$\nu_1 = \frac{(-1 + 2k)(-1 + x + y)}{k(-1 + y)} \quad \mu_1 = \frac{k - y + ky}{k - ky}$$

On déduit que:

$$Q_1 = \left\{ \frac{1 - k + kx - y + ky - xy + kxy}{1 - y}, (1 - k)y, \frac{(-1 + x + y)(k - y + ky)}{-1 + y} \right\}$$

Calculons le vecteur $\overrightarrow{M_1N_1}$. On a:

$$\overrightarrow{M_1N_1} = i(1) \overrightarrow{OA} + i(2) \overrightarrow{OB} + i(3) \overrightarrow{OC}$$

avec

$$i(1) = -1 + k \quad i(2) = 0 \quad i(3) = 1 - k$$

Calculons le vecteur $\overrightarrow{Q_1P_1}$. On a:

$$\overrightarrow{Q_1P_1} = j(1) \overrightarrow{OA} + j(2) \overrightarrow{OB} + j(3) \overrightarrow{OC}$$

avec

$$j(1) = -1 + k \quad j(2) = 0 \quad j(3) = 1 - k$$

On a ainsi

$$\overrightarrow{M_1N_1} = \overrightarrow{Q_1P_1}$$

On a alors

$$M_1N_1^2 = b^2 (-1 + k)^2$$

et

$$N_1P_1^2 = (-1 + k)^2 (a^2 - a^2 x - b^2 x + c^2 x + b^2 x^2 - 2 a^2 y + a^2 x y + b^2 x y - c^2 x y + a^2 y^2)$$

CHAPITRE

24

Cercles de Brocard

24 Cercles de Brocard

24.1 Cercles de Brocard

Exercice 24.1.1

Soient ABC un triangle, k_1, k_2, k_3 des réels,

$M_1 \in (AB)$ barycentre de $\{(A, k_1), (B, 1 - k_1)\}$

$M_2 \in (BC)$ barycentre de $\{(B, k_2), (C, 1 - k_2)\}$

$M_3 \in (CA)$ barycentre de $\{(C, k_3), (A, 1 - k_3)\}$

On désigne par

Γ_A le cercle passant par les points A, M_1, M_3

Γ_B le cercle passant par les points B, M_1, M_2

Γ_C le cercle passant par les points C, M_3, M_2

1. Montrer que les cercles $\Gamma_A, \Gamma_B, \Gamma_C$ passent par un même point M dont on précisera les coordonnées barycentriques. Préciser les rayons et les centres de ces cercles.
2. Préciser les centres J_A, J_B, J_C et les rayons des cercles $\Gamma_A, \Gamma_B, \Gamma_C$. Déterminer les coordonnées barycentriques du centre J du cercle circonscrit au triangle J_A, J_B, J_C et le rayon de ce cercle.

Solution:

Soit $M = \{x, y, 1 - x - y\}$ un point quelconque. La condition $M \in \Gamma_A$ se traduit par l'équation

$$0 = [(-1 + k_1) k_3] (b^2 x^2 + x (-2b^2 + b^2 k_3 + a^2 y + b^2 y - c^2 y) + (b^2 - b^2 k_3 + -a^2 y - b^2 y + c^2 k_1 y + b^2 k_3 y + a^2 y^2))$$

et $M \in \Gamma_B$ se traduit par

$$0 = -[k_1 (-1 + k_2)] (-b^2 x^2 + x (b^2 - c^2 + c^2 k_1 + a^2 k_2 - a^2 y - b^2 y + c^2 y) + (-a^2 k_2 + a^2 y + a^2 k_2 y - a^2 y^2))$$

En supprimant les termes entre crochets, on déduit par addition des deux équations

$$b^2 - a^2 k_2 - b^2 k_3 + (-b^2 - c^2 + c^2 k_1 + a^2 k_2 + b^2 k_3) x + (-b^2 + c^2 k_1 + a^2 k_2 + b^2 k_3) y = 0$$

donc

$$x = \frac{-b^2 + a^2 k_2 + b^2 k_3}{-b^2 - c^2 + c^2 k_1 + a^2 k_2 + b^2 k_3} + \frac{(b^2 - c^2 k_1 - a^2 k_2 - b^2 k_3) y}{-b^2 - c^2 + c^2 k_1 + a^2 k_2 + b^2 k_3}$$

En substituant la valeur de x dans l'une des équations, on détermine y et on obtient:

$$M = \{a^2 (b^2 - a^2 k_2 - b^2 k_2 + c^2 k_1 k_2 + a^2 k_2^2 - b^2 k_3 + b^2 k_2 k_3), \\ b^2 (c^2 - c^2 k_1 - b^2 k_3 - c^2 k_3 + c^2 k_1 k_3 + a^2 k_2 k_3 + b^2 k_3^2), \\ c^2 (a^2 - a^2 k_1 - c^2 k_1 + c^2 k_1^2 - a^2 k_2 + a^2 k_1 k_2 + b^2 k_1 k_3)\}$$

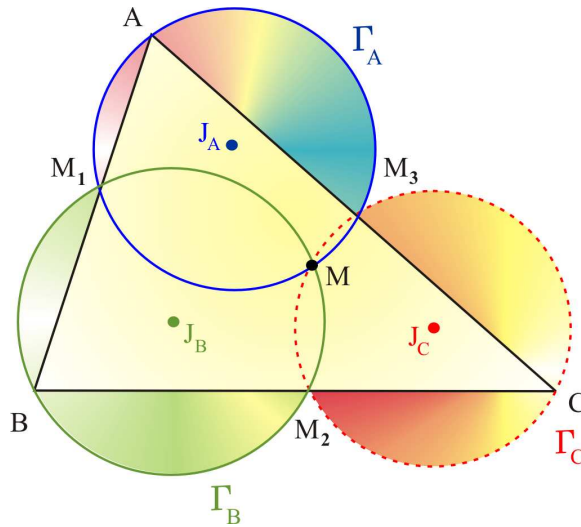
les coefficients étant normalisés en les divisant par

$$a^2 b^2 + a^2 c^2 + b^2 c^2 - a^2 c^2 k_1 - b^2 c^2 k_1 - c^4 k_1 + c^4 k_1^2 - a^4 k_2 - a^2 b^2 k_2 - a^2 c^2 k_2 \\ + 2 a^2 c^2 k_1 k_2 + a^4 k_2^2 - a^2 b^2 k_3 - b^4 k_3 - b^2 c^2 k_3 + 2 b^2 c^2 k_1 k_3 + 2 a^2 b^2 k_2 k_3 + b^4 k_3^2$$

La condition $M \in \Gamma_C$ se traduit par l'équation

$$0 = k_2 (-1 + k_3) (-b^2 x^2 + a^2 k_2 y - a^2 y^2 + x (b^2 - b^2 k_3 - a^2 y - b^2 y + c^2 y))$$

On vérifie, par calcul effectué à l'ordinateur (ou directement en soustrayant cette formule à l'une des équations de départ), que les coordonnées de M vérifient cette formule. Les trois cercles $\Gamma_A, \Gamma_B, \Gamma_C$ se coupent donc en M .



2). Les coordonnées du centre J_A de Γ_A sont

$$J_A = \left\{ \frac{a^4 - 2 a^2 b^2 + b^4 - a^2 c^2 - b^2 c^2 - a^2 c^2 k_1 - b^2 c^2 k_1 + c^4 k_1 + a^2 b^2 k_3 - b^4 k_3 + b^2 c^2 k_3}{(a - b - c) (a + b - c) (a - b + c) (a + b + c)}, \right. \\ \frac{b^2 (-2 c^2 + 2 c^2 k_1 - a^2 k_3 + b^2 k_3 + c^2 k_3)}{(-a + b - c) (a + b - c) (-a + b + c) (a + b + c)}, \\ \left. \frac{c^2 (-a^2 + b^2 + c^2 + a^2 k_1 - b^2 k_1 - c^2 k_1 - 2 b^2 k_3)}{(a - b - c) (a + b - c) (a - b + c) (a + b + c)} \right\}$$

et

$$AJ_A^2 = \frac{b^2 c^2 (c^2 - 2c^2 k_1 + c^2 k_1^2 + a^2 k_3 - b^2 k_3 - c^2 k_3 - a^2 k_1 k_3 + b^2 k_1 k_3 + c^2 k_1 k_3 + b^2 k_3^2)}{(a-b+c)(a+b-c)(-a+b+c)(a+b+c)}$$

Les coordonnées du centre J_B de Γ_B sont

$$J_B = \left\{ \frac{a^2 (-a^2 + b^2 - c^2 + 2c^2 k_1 + a^2 k_2 - b^2 k_2 + c^2 k_2)}{(-a+b+c)(a+b-c)(a-b+c)(a+b+c)}, \right. \\ \frac{-a^2 b^2 + b^4 - a^2 c^2 - 2b^2 c^2 + c^4 + a^2 c^2 k_1 + b^2 c^2 k_1 - c^4 k_1 + a^4 k_2 - a^2 b^2 k_2 - a^2 c^2 k_2}{(a-b-c)(a+b-c)(a-b+c)(a+b+c)}, \\ \left. \frac{c^2 (-2a^2 + a^2 k_1 - b^2 k_1 + c^2 k_1 + 2a^2 k_2)}{(a-b-c)(a+b-c)(a-b+c)(a+b+c)} \right\}$$

et

$$BJ_B^2 = \frac{a^2 c^2 (a^2 - a^2 k_1 + b^2 k_1 - c^2 k_1 + c^2 k_1^2 - 2a^2 k_2 + a^2 k_1 k_2 - b^2 k_1 k_2 + c^2 k_1 k_2 + a^2 k_2^2)}{(-a+b+c)(a+b-c)(a-b+c)(a+b+c)}$$

Les coordonnées du centre J_C de Γ_C sont

$$J_C = \left\{ \frac{a^2 (-2b^2 + a^2 k_2 + b^2 k_2 - c^2 k_2 + 2b^2 k_3)}{(a-b-c)(a+b-c)(a-b+c)(a+b+c)}, \right. \\ \frac{b^2 (-a^2 - b^2 + c^2 + 2a^2 k_2 + a^2 k_3 + b^2 k_3 - c^2 k_3)}{(a-b+c)(a+b-c)(-a+b+c)(a+b+c)}, \\ \left. \frac{a^4 - a^2 b^2 - 2a^2 c^2 - b^2 c^2 + c^4 - a^4 k_2 + a^2 b^2 k_2 + a^2 c^2 k_2 - a^2 b^2 k_3 + b^4 k_3 - b^2 c^2 k_3}{(-a+b-c)(a+b-c)(-a+b+c)(a+b+c)} \right\}$$

et

$$CJ_C^2 = \frac{a^2 b^2 (b^2 - a^2 k_2 - b^2 k_2 + c^2 k_2 + a^2 k_2^2 - 2b^2 k_3 + a^2 k_2 k_3 + b^2 k_2 k_3 - c^2 k_2 k_3 + b^2 k_3^2)}{(-a+b+c)(a+b-c)(a-b+c)(a+b+c)}$$

Le centre J du cercle circonscrit au triangle J_A, J_B, J_C a pour coordonnées

$$J = \left\{ \frac{a^2 (a^2 - 2b^2 - c^2 k_1 + b^2 k_2 - c^2 k_2 + b^2 k_3)}{(a-b-c)(a+b-c)(a-b+c)(a+b+c)}, \right. \\ \frac{b^2 (b^2 - 2c^2 + c^2 k_1 - a^2 k_2 - a^2 k_3 + c^2 k_3)}{(-a+b-c)(a+b-c)(-a+b+c)(a+b+c)}, \\ \left. \frac{c^2 (-2a^2 + c^2 + a^2 k_1 - b^2 k_1 + a^2 k_2 - b^2 k_3)}{(a-b-c)(a+b-c)(a-b+c)(a+b+c)} \right\}$$

et

$$JJ_A^2 = \frac{a^2 b^2 c^2}{(a-b-c)^2 (a+b-c)^2 (a-b+c)^2 (a+b+c)^2} \\ (a^2 b^2 + a^2 c^2 + b^2 c^2 - a^2 c^2 k_1 - b^2 c^2 k_1 - c^4 k_1 + c^4 k_1^2 \\ - a^4 k_2 - a^2 b^2 k_2 - a^2 c^2 k_2 + 2a^2 c^2 k_1 k_2 + a^4 k_2^2 \\ - a^2 b^2 k_3 - b^4 k_3 - b^2 c^2 k_3 + 2b^2 c^2 k_1 k_3 + 2a^2 b^2 k_2 k_3 + b^4 k_3^2)$$

24.2 Points de Brocard

Exercice 24.2.1 *Définition*

On poursuit l'énoncé de l'exercice précédent.

On suppose que les réels k_1, k_2, k_3 tendent vers 0.

1. Montrer que les cercles $\Gamma_A, \Gamma_B, \Gamma_C$ ont des positions limite $\Gamma_{A,0}, \Gamma_{B,0}, \Gamma_{C,0}$ que l'on précisera. En déduire que le point M commun à ces trois cercles admet une position limite B_0 dont on précisera les coordonnées barycentriques (B_0 est un point de Brocard).
2. Préciser les centres $J_{A,0}, J_{B,0}, J_{C,0}$ et les rayons des cercles $\Gamma_{A,0}, \Gamma_{B,0}, \Gamma_{C,0}$.
3. Déterminer le centre J_0 et le rayon du cercle circonscrit au triangle $J_{A,0}, J_{B,0}, J_{C,0}$.

On suppose que les réels k_1, k_2, k_3 tendent vers 1.

1. Montrer que les cercles $\Gamma_A, \Gamma_B, \Gamma_C$ ont des positions limite $\Gamma_{A,1}, \Gamma_{B,1}, \Gamma_{C,1}$ que l'on précisera. En déduire que le point M commun à ces trois cercles admet une position limite B_1 dont on précisera les coordonnées barycentriques (B_1 est un point de Brocard).
2. Préciser les centres $J_{A,1}, J_{B,1}, J_{C,1}$ et les rayons des cercles $\Gamma_{A,1}, \Gamma_{B,1}, \Gamma_{C,1}$.
3. Déterminer le centre J_1 et le rayon du cercle circonscrit au triangle $J_{A,1}, J_{B,1}, J_{C,1}$.

Conclure que les cercles circonscrits aux triangles $J_{A,0}, J_{B,0}, J_{C,0}$ et $J_{A,1}, J_{B,1}, J_{C,1}$ ont le même rayon.

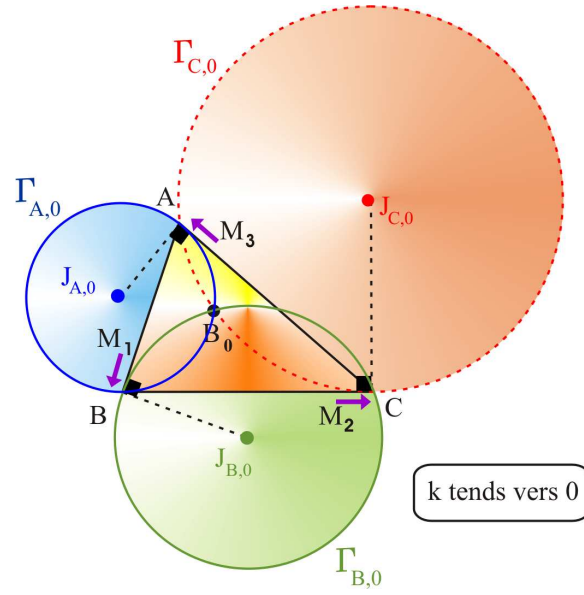
1. Montrer que les droites (J_0J_1) et (B_0B_1) sont parallèles.
2. Montrer que B_0 et B_1 sont conjugués isogonaux relativement au triangle ABC .
3. Montrer que le milieu du segment $[J_0J_1]$ est le centre K du cercle circonscrit au triangle ABC .

Solution:

Lorsque $k \rightarrow 0$, on a schématiquement $M_1 \rightarrow B, M_2 \rightarrow C, M_3 \rightarrow A$ donc $\{A, M_1, M_3\} \rightarrow \{A, B, A\}$. Le cercle Γ_A a pour position limite lorsque $k \rightarrow 0$, le cercle passant par les points A et B et réalisant un contact double au point A : ce cercle est donc tangent en A à la droite (AC) et passe par B . De même, lorsque $k \rightarrow 0$, Γ_B a pour position limite le cercle tangent en B à la droite (AB) et passe par C et Γ_C a pour position limite le cercle tangent en C à la droite (BC) et passe par A .

Lorsque $k \rightarrow 0$, le point M de la section précédente devient le premier point de Brocard

$$B_0 = \left\{ \frac{a^2 b^2}{a^2 b^2 + a^2 c^2 + b^2 c^2}, \frac{b^2 c^2}{a^2 b^2 + a^2 c^2 + b^2 c^2}, \frac{a^2 c^2}{a^2 b^2 + a^2 c^2 + b^2 c^2} \right\}$$



2). Avec des notations naturelles, les coordonnées du centre $J_{A,0}$ de $\Gamma_{A,0}$ sont

$$J_{A,0} = \left\{ \frac{a^4 - 2a^2b^2 + b^4 - a^2c^2 - b^2c^2}{(a-b-c)(a+b-c)(a-b+c)(a+b+c)}, \frac{-2b^2c^2}{(-a+b-c)(a+b-c)(-a+b+c)(a+b+c)}, \frac{c^2(a^2 - b^2 - c^2)}{(-a+b+c)(a+b-c)(a-b+c)(a+b+c)} \right\}$$

et

$$AJ_{A,0}^2 = \frac{b^2c^4}{(a-b+c)(a+b-c)(-a+b+c)(a+b+c)}$$

Les coordonnées du centre $J_{B,0}$ de $\Gamma_{B,0}$ sont

$$J_{B,0} = \left\{ \frac{a^2(a^2 - b^2 + c^2)}{(a-b-c)(a+b-c)(a-b+c)(a+b+c)}, \frac{a^2b^2 - b^4 + a^2c^2 + 2b^2c^2 - c^4}{(-a+b+c)(a+b-c)(a-b+c)(a+b+c)}, \frac{-2a^2c^2}{(a-b-c)(a+b-c)(a-b+c)(a+b+c)} \right\}$$

et

$$BJ_{B,0}^2 = \frac{a^4c^2}{(-a+b+c)(a+b-c)(a-b+c)(a+b+c)}$$

Les coordonnées du centre $J_{C,0}$ de $\Gamma_{C,0}$ sont

$$J_{C,0} = \left\{ \frac{-2a^2b^2}{(a-b-c)(a+b-c)(a-b+c)(a+b+c)}, \right. \\ \left. \frac{b^2(a^2+b^2-c^2)}{(-a+b-c)(a+b-c)(-a+b+c)(a+b+c)}, \right. \\ \left. \frac{a^4 - a^2b^2 - 2a^2c^2 - b^2c^2 + c^4}{(a-b-c)(a+b-c)(a-b+c)(a+b+c)} \right\}$$

et

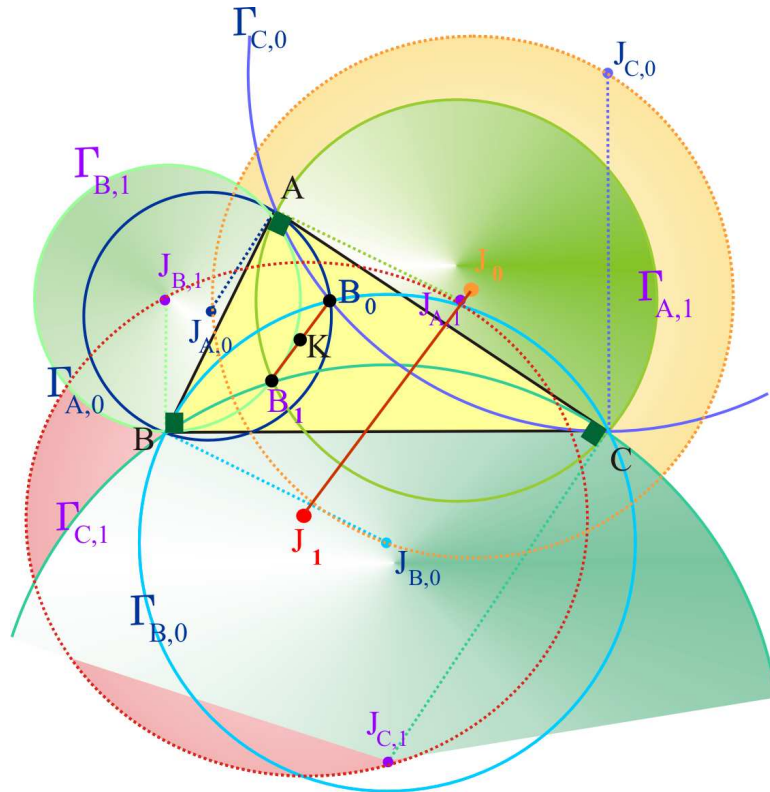
$$CJ_{C,0}^2 = \frac{a^2b^4}{(-a+b+c)(a+b-c)(a-b+c)(a+b+c)}$$

Le centre J_0 du cercle circonscrit au triangle $J_{A,0}, J_{B,0}, J_{C,0}$ a pour coordonnées

$$J_0 = \left\{ \frac{a^2(a^2-2b^2)}{(a-b-c)(a+b-c)(a-b+c)(a+b+c)}, \right. \\ \left. \frac{b^2(b^2-2c^2)}{(-a+b-c)(a+b-c)(-a+b+c)(a+b+c)}, \right. \\ \left. \frac{c^2(2a^2-c^2)}{(-a+b+c)(a+b-c)(a-b+c)(a+b+c)} \right\}$$

et

$$J_0J_{A,0}^2 = \frac{a^2b^2c^2(a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2)}{(a-b-c)^2(a+b-c)^2(a-b+c)^2(a+b+c)^2}$$



Lorsque $k \rightarrow 1$,

$$B_1 = \left\{ \frac{a^2 c^2}{a^2 b^2 + a^2 c^2 + b^2 c^2}, \frac{a^2 b^2}{a^2 b^2 + a^2 c^2 + b^2 c^2}, \frac{b^2 c^2}{a^2 b^2 + a^2 c^2 + b^2 c^2} \right\}$$

3). Avec des notations naturelles, les coordonnées du centre $J_{A,1}$ de $\Gamma_{A,1}$ sont

$$J_{A,1} = \left\{ \frac{a^4 - a^2 b^2 - 2 a^2 c^2 - b^2 c^2 + c^4}{(a-b-c)(a+b-c)(a-b+c)(a+b+c)}, \right. \\ \frac{b^2(-a^2 + b^2 + c^2)}{(-a+b-c)(a+b-c)(-a+b+c)(a+b+c)}, \\ \left. \frac{-2b^2 c^2}{(-a+b-c)(a+b-c)(-a+b+c)(a+b+c)} \right\}$$

et

$$AJ_{A,1}^2 = \frac{b^4 c^2}{(a-b+c)(a+b-c)(-a+b+c)(a+b+c)}$$

Les coordonnées du centre $J_{B,1}$ de $\Gamma_{B,1}$ sont

$$J_{B,1} = \left\{ \frac{-2a^2 c^2}{(a-b-c)(a+b-c)(a-b+c)(a+b+c)}, \right. \\ \frac{a^4 - 2a^2 b^2 + b^4 - a^2 c^2 - b^2 c^2}{(a-b-c)(a+b-c)(a-b+c)(a+b+c)}, \\ \left. \frac{c^2(a^2 - b^2 + c^2)}{(a-b-c)(a+b-c)(a-b+c)(a+b+c)} \right\}$$

et

$$BJ_{B,1}^2 = \frac{a^2 c^4}{(-a+b+c)(a+b-c)(a-b+c)(a+b+c)}$$

Les coordonnées du centre $J_{C,1}$ de $\Gamma_{C,1}$ sont

$$J_{C,1} = \left\{ \frac{a^2(a^2 + b^2 - c^2)}{(a-b-c)(a+b-c)(a-b+c)(a+b+c)}, \right. \\ \frac{-2a^2 b^2}{(a-b-c)(a+b-c)(a-b+c)(a+b+c)}, \\ \left. \frac{a^2 b^2 - b^4 + a^2 c^2 + 2b^2 c^2 - c^4}{(-a+b+c)(a+b-c)(a-b+c)(a+b+c)} \right\}$$

et

$$CJ_{C,1}^2 = \frac{a^4 b^2}{(-a+b+c)(a+b-c)(a-b+c)(a+b+c)}$$

Le centre J_1 du cercle circonscrit au triangle $J_{A,1}, J_{B,1}, J_{C,1}$ a pour coordonnées

$$J_1 = \left\{ \frac{a^2(a^2 - 2c^2)}{(a-b-c)(a+b-c)(a-b+c)(a+b+c)}, \right. \\ \frac{b^2(-2a^2 + b^2)}{(-a+b-c)(a+b-c)(-a+b+c)(a+b+c)}, \\ \left. \frac{c^2(2b^2 - c^2)}{(-a+b+c)(a+b-c)(a-b+c)(a+b+c)} \right\}$$

et

$$J_1 J_{A,1}^2 = \frac{a^2 b^2 c^2 (a^2 b^2 + a^2 c^2 + b^2 c^2)}{(a-b-c)^2 (a+b-c)^2 (a-b+c)^2 (a+b+c)^2}$$

On a donc $J_0 = J_1$ et les rayons des cercles étant identiques, les centres $J_{A,0}, J_{B,0}, J_{C,0}, J_{A,1}, J_{B,1}, J_{C,1}$ sont sur un même cercle.

Rappelons que l'isogonal du point $\{X_1, X_2, X_3\}$ est le point

$$\left\{ \frac{a^2 X_2 X_3}{c^2 X_1 X_2 + b^2 X_1 X_3 + a^2 X_2 X_3}, \frac{b^2 X_1 X_3}{c^2 X_1 X_2 + b^2 X_1 X_3 + a^2 X_2 X_3}, \frac{c^2 X_1 X_2}{c^2 X_1 X_2 + b^2 X_1 X_3 + a^2 X_2 X_3} \right\}$$

L'isogonal de J_0 est alors le point

$$J_0^* = \left\{ \frac{(b^2 - 2c^2)(2a^2 - c^2)}{2a^4 - 3a^2b^2 + 2b^4 - 3a^2c^2 - 3b^2c^2 + 2c^4}, \right. \\ \frac{(a^2 - 2b^2)(2a^2 - c^2)}{2a^4 - 3a^2b^2 + 2b^4 - 3a^2c^2 - 3b^2c^2 + 2c^4}, \\ \left. \frac{(a^2 - 2b^2)(-b^2 + 2c^2)}{2a^4 - 3a^2b^2 + 2b^4 - 3a^2c^2 - 3b^2c^2 + 2c^4} \right\}$$

L'isogonal de J_1 est alors le point

$$J_1^* = \left\{ \frac{(2a^2 - b^2)(-2b^2 + c^2)}{2a^4 - 3a^2b^2 + 2b^4 - 3a^2c^2 - 3b^2c^2 + 2c^4}, \right. \\ \frac{(a^2 - 2c^2)(2b^2 - c^2)}{2a^4 - 3a^2b^2 + 2b^4 - 3a^2c^2 - 3b^2c^2 + 2c^4}, \\ \left. \frac{(2a^2 - b^2)(a^2 - 2c^2)}{2a^4 - 3a^2b^2 + 2b^4 - 3a^2c^2 - 3b^2c^2 + 2c^4} \right\}$$

L'isogonal de B_1 est le point

$$\left\{ \frac{a^2 b^2}{a^2 b^2 + a^2 c^2 + b^2 c^2}, \frac{b^2 c^2}{a^2 b^2 + a^2 c^2 + b^2 c^2}, \frac{a^2 c^2}{a^2 b^2 + a^2 c^2 + b^2 c^2} \right\}$$

c'est donc B_0 .

Le vecteur $\overrightarrow{J_0 J_1}$ a pour description

$$\overrightarrow{J_0 J_1} = \frac{2a^2(b-c)(b+c)}{(a-b-c)(a+b-c)(a-b+c)(a+b+c)} \overrightarrow{OA} \\ + \frac{-2b^2(a-c)(a+c)}{(-a+b-c)(a+b-c)(-a+b+c)(a+b+c)} \overrightarrow{OB} \\ + \frac{2(a-b)(a+b)c^2}{(a-b-c)(a+b-c)(a-b+c)(a+b+c)} \overrightarrow{OC}$$

Le vecteur $\overrightarrow{B_0 B_1}$ a pour description

$$\overrightarrow{B_0 B_1} = \frac{a^2(-b+c)(b+c)}{a^2 b^2 + a^2 c^2 + b^2 c^2} \overrightarrow{OA} \\ + \frac{b^2(a-c)(a+c)}{a^2 b^2 + a^2 c^2 + b^2 c^2} \overrightarrow{OB} \\ - \frac{(a-b)(a+b)c^2}{a^2 b^2 + a^2 c^2 + b^2 c^2} \overrightarrow{OC}$$

On a donc

$$\overrightarrow{J_0 J_1} = \frac{-2 (a^2 b^2 + a^2 c^2 + b^2 c^2)}{(a - b - c) (a + b - c) (a - b + c) (a + b + c)} \overrightarrow{B_0 B_1}$$

Les coordonnées du milieu de $[J_0 J_1]$ s'obtiennent comme demi-somme des coordonnées de J_0 et de J_1 , soit

$$\left\{ \begin{aligned} & \frac{a^2 (a^2 - b^2 - c^2)}{(a - b - c) (a + b - c) (a - b + c) (a + b + c)}, \\ & \frac{b^2 (-a^2 + b^2 - c^2)}{(-a + b - c) (a + b - c) (-a + b + c) (a + b + c)}, \\ & \frac{c^2 (a^2 + b^2 - c^2)}{(-a + b + c) (a + b - c) (a - b + c) (a + b + c)} \end{aligned} \right\}$$

On reconnait ici les coordonnées de K , centre du cercle circonscrit à ABC .

Exercice 24.2.2 calcul de distances

Soit K le centre du cercle circonscrit au triangle ABC .

1. Evaluer les distances $B_0 A^2, B_0 B^2, B_0 C^2$ et $B_1 A^2, B_1 B^2, B_1 C^2$.
2. Montrer que $B_0 K^2 = B_1 K^2$, comparer avec $J_0 K^2$.
3. Montrer que les points J_0, J_1, B_0, B_1 sont sur un même cercle dont on précisera le centre et le rayon.

Solution:

Les distances $B_0 A^2, B_0 B^2, B_0 C^2$ sont successivement

$$\frac{b^2 c^4}{a^2 b^2 + a^2 c^2 + b^2 c^2} \quad \frac{a^4 c^2}{a^2 b^2 + a^2 c^2 + b^2 c^2} \quad \frac{a^2 b^4}{a^2 b^2 + a^2 c^2 + b^2 c^2}$$

Les distances $B_1 A^2, B_1 B^2, B_1 C^2$ sont successivement

$$\frac{b^4 c^2}{a^2 b^2 + a^2 c^2 + b^2 c^2} \quad \frac{a^2 c^4}{a^2 b^2 + a^2 c^2 + b^2 c^2} \quad \frac{a^4 b^2}{a^2 b^2 + a^2 c^2 + b^2 c^2}$$

On obtient

$$B_0 K^2 = \frac{a^2 b^2 c^2 (a^4 - a^2 b^2 + b^4 - a^2 c^2 - b^2 c^2 + c^4)}{(-a + b + c) (a + b - c) (a - b + c) (a + b + c) (a^2 b^2 + a^2 c^2 + b^2 c^2)}$$

avec un résultat identique pour $B_1 K^2$. On a

$$J_0 K^2 = \frac{a^2 b^2 c^2 (a^4 - a^2 b^2 + b^4 - a^2 c^2 - b^2 c^2 + c^4)}{(a - b - c)^2 (a + b - c)^2 (a - b + c)^2 (a + b + c)^2}$$

donc

$$J_0 K^2 = \frac{a^2 b^2 + a^2 c^2 + b^2 c^2}{(-a + b + c) (a + b - c) (a - b + c) (a + b + c)} B_0 K^2$$

Un point $M = \{x, y, 1 - x - y\}$ appartient au cercle passant par B_0, B_1, J_0 si et seulement si

$$\begin{aligned}
0 = & a^6 b^2 - a^4 b^4 + a^2 b^6 - 2 a^4 b^2 c^2 - 2 a^2 b^4 c^2 - 2 a^6 b^2 x + 2 a^4 b^4 x - b^8 x + 3 a^4 b^2 c^2 x \\
& + 6 a^2 b^4 c^2 x + 2 b^6 c^2 x - a^2 b^2 c^4 x + a^6 b^2 x^2 - a^4 b^4 x^2 - a^2 b^6 x^2 + b^8 x^2 - a^4 b^2 c^2 x^2 \\
& - 6 a^2 b^4 c^2 x^2 - b^6 c^2 x^2 - a^2 b^2 c^4 x^2 - b^4 c^4 x^2 + b^2 c^6 x^2 - a^8 y + 2 a^4 b^4 y - 2 a^2 b^6 y \\
& + 2 a^6 c^2 y + 6 a^4 b^2 c^2 y + 3 a^2 b^4 c^2 y - a^2 b^2 c^4 y + a^8 x y - 2 a^4 b^4 x y + b^8 x y - 2 a^6 c^2 x y \\
& - 6 a^4 b^2 c^2 x y - 6 a^2 b^4 c^2 x y - 2 b^6 c^2 x y + 4 a^2 b^2 c^4 x y + 2 a^2 c^6 x y + 2 b^2 c^6 x y - c^8 x y \\
& + a^8 y^2 - a^6 b^2 y^2 - a^4 b^4 y^2 + a^2 b^6 y^2 - a^6 c^2 y^2 - 6 a^4 b^2 c^2 y^2 - a^2 b^4 c^2 y^2 - a^4 c^4 y^2 - a^2 b^2 c^4 y^2 + a^2 c^6 y^2
\end{aligned}$$

Par calculs, on obtient que J_1 appartient à ce cercle. Le centre I de cercle est le point

$$\begin{aligned}
I = & \left\{ \frac{a^2 (a^8 - 3 a^6 b^2 + 2 a^4 b^4 - 3 a^6 c^2 - 2 a^4 b^2 c^2 + 5 a^2 b^4 c^2 - b^6 c^2 + 2 a^4 c^4 + 5 a^2 b^2 c^4 + 4 b^4 c^4 - b^2 c^6)}{(a - b - c)^2 (a + b - c)^2 (a - b + c)^2 (a + b + c)^2 (a^2 + b^2 + c^2)}, \right. \\
& \frac{b^2 (2 a^4 b^4 - 3 a^2 b^6 + b^8 - a^6 c^2 + 5 a^4 b^2 c^2 - 2 a^2 b^4 c^2 - 3 b^6 c^2 + 4 a^4 c^4 + 5 a^2 b^2 c^4 + 2 b^4 c^4 - a^2 c^6)}{(-a + b - c)^2 (a + b - c)^2 (-a + b + c)^2 (a + b + c)^2 (a^2 + b^2 + c^2)}, \\
& \left. \frac{c^2 (-a^6 b^2 + 4 a^4 b^4 - a^2 b^6 + 5 a^4 b^2 c^2 + 5 a^2 b^4 c^2 + 2 a^4 c^4 - 2 a^2 b^2 c^4 + 2 b^4 c^4 - 3 a^2 c^6 - 3 b^2 c^6 + c^8)}{(a - b - c)^2 (a + b - c)^2 (a - b + c)^2 (a + b + c)^2 (a^2 + b^2 + c^2)} \right\}
\end{aligned}$$

et la distance IB_0^2 a pour valeur

$$\frac{a^2 b^2 c^2 (a^2 b^2 + a^2 c^2 + b^2 c^2) (a^4 - a^2 b^2 + b^4 - a^2 c^2 - b^2 c^2 + c^4) (2 a^4 - 5 a^2 b^2 + 2 b^4 - 5 a^2 c^2 - 5 b^2 c^2 + 2 c^4)}{(a - b - c)^3 (a + b - c)^3 (a - b + c)^3 (a + b + c)^3 (a^2 + b^2 + c^2)^2}$$

CHAPITRE

25

Le tétraèdre

25 Le tétraèdre

25.1 Expression de la distance entre deux points de l'espace

Soient $ABCD$ un tétraèdre, M, M_1 des points de l'espace de coordonnées barycentriques

$$M = \left\{ \frac{x}{x+y+z+t}, \frac{y}{x+y+z+t}, \frac{z}{x+y+z+t}, \frac{t}{x+y+z+t} \right\}$$

$$M_1 = \left\{ \frac{x_1}{x_1+y_1+z_1+t_1}, \frac{y_1}{x_1+y_1+z_1+t_1}, \frac{z_1}{x_1+y_1+z_1+t_1}, \frac{t_1}{x_1+y_1+z_1+t_1} \right\}$$

dans le repère barycentrique $\{A, B, C, D\}$.

Alors, la distance MM_1^2 a pour valeur

$$\begin{aligned} MM_1^2 = & \frac{AB^2 (t_1 x - t x_1 + x y_1 - x_1 y + x z_1 - x_1 z) (x y_1 - x_1 y + t y_1 - t_1 y + y_1 z - y_1 z_1)}{(x+y+z+t)^2 (x_1+y_1+z_1+t_1)^2} \\ & + \frac{AC^2 (x z_1 - x_1 z + t_1 x - t x_1 + x y_1 - x_1 y) (x z_1 - x_1 z + t z_1 - t_1 z + y z_1 - y_1 z)}{(x+y+z+t)^2 (x_1+y_1+z_1+t_1)^2} \\ & + \frac{AD^2 (t_1 x - t x_1 + t_1 y - t y_1 + t_1 z - t z_1) (x y_1 - x_1 y + t_1 x - t x_1 + x z_1 - x_1 z)}{(x+y+z+t)^2 (x_1+y_1+z_1+t_1)^2} \\ & + \frac{BC^2 (x y_1 - x_1 y + t y_1 - t_1 y + y_1 z - y_1 z_1) (y_1 z - y_1 z_1 + t_1 z - t z_1 + x_1 z - x_1 z_1)}{(x+y+z+t)^2 (x_1+y_1+z_1+t_1)^2} \\ & + \frac{BD^2 (t_1 y - t y_1 + t_1 x - t x_1 + t_1 z - t z_1) (t_1 y - t y_1 + x_1 y - x y_1 + y_1 z - y_1 z_1)}{(x+y+z+t)^2 (x_1+y_1+z_1+t_1)^2} \\ & + \frac{CD^2 (t_1 z - t z_1 + t_1 x - t x_1 + t_1 y - t y_1) (t_1 z - t z_1 + x_1 z - x_1 z_1 + y_1 z - y_1 z_1)}{(x+y+z+t)^2 (x_1+y_1+z_1+t_1)^2} \end{aligned}$$

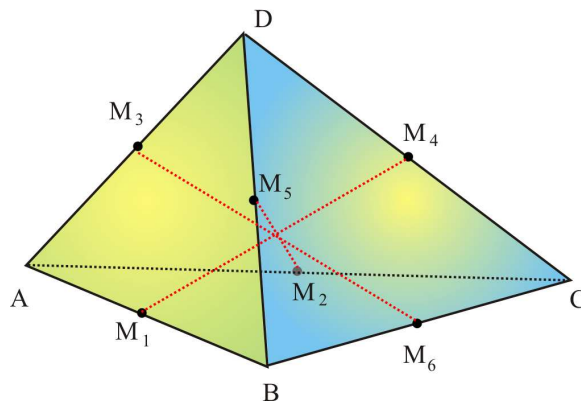
Ceci résulte de notre formule générale de la distance entre deux points d'un même espace de dimension n , avec $n = 3$ ici.

25.2 Un exemple

Exercice 25.2.1

Soit $ABCD$ un tétraèdre et $[M_1M_4]$, $[M_2M_5]$, $[M_3M_6]$ les segments joignant les milieux des couples d'arêtes opposées. Montrer que

$$M_1M_4^2 + M_2M_5^2 + M_3M_6^2 = \frac{d_1^2 + d_2^2 + d_3^2 + d_4^2 + d_5^2 + d_6^2}{4}$$

**Solution:**

Dessin = $\{A, B, C, D, M_1, M_2, M_3, M_4, M_5, M_6\}$

Le repère barycentrique choisi est A, B, C, D .

Les points composés sont $M_1, M_2, M_3, M_6, M_5, M_4$.

Les coordonnées barycentriques des points composés sont:

$$M_1 = \left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0, 0\right\}$$

$$M_2 = \left\{\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, 0\right\}$$

$$M_3 = \left\{\frac{1}{2}, 0, 0, \frac{1}{2}\right\}$$

$$M_4 = \left\{0, 0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right\}$$

$$M_5 = \left\{0, \frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}\right\}$$

$$M_6 = \left\{0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right\}$$

La distance $M_1M_4^2$ est égale à

$$M_1M_4^2 = \frac{-AB^2}{4} + \frac{AC^2}{4} + \frac{AD^2}{4} + \frac{BC^2}{4} + \frac{BD^2}{4} - \frac{CD^2}{4} = \frac{-d_1^2 + d_2^2 + d_3^2 + d_4^2 + d_5^2 - d_6^2}{4}$$

La distance $M_3M_6^2$ est égale à

$$M_3M_6^2 = \frac{AB^2}{4} + \frac{AC^2}{4} - \frac{AD^2}{4} - \frac{BC^2}{4} + \frac{BD^2}{4} + \frac{CD^2}{4} = \frac{d_1^2 + d_2^2 - d_3^2 - d_4^2 + d_5^2 + d_6^2}{4}$$

La distance $M_2M_5^2$ est égale à

$$M_2M_5^2 = \frac{AB^2}{4} - \frac{AC^2}{4} + \frac{AD^2}{4} + \frac{BC^2}{4} - \frac{BD^2}{4} + \frac{CD^2}{4} = \frac{d_1^2 - d_2^2 + d_3^2 + d_4^2 - d_5^2 + d_6^2}{4}$$

On a ainsi

$$M_1M_4^2 + M_2M_5^2 + M_3M_6^2 = \frac{d_1^2 + d_2^2 + d_3^2 + d_4^2 + d_5^2 + d_6^2}{4}$$

25.3 Distance d'un point à un plan

Exercice 25.3.1

Soit $ABCD$ un tétraèdre et M un point de coordonnées $\{x, y, z, t\}$.

1. Déterminer la projection M_1 de M sur le plan ABC et la distance MM_1^2 , en fonction des longueurs des différents côtés du tétraèdre et de x, y, z, t .
2. En prenant $M = D$, déterminer le volume V du tétraèdre en fonction des longueurs des différents côtés.
3. En déduire que

$$288 V^2 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & d_1^2 & d_2^2 & d_3^2 \\ 1 & d_1^2 & 0 & d_4^2 & d_5^2 \\ 1 & d_2^2 & d_4^2 & 0 & d_6^2 \\ 1 & d_3^2 & d_5^2 & d_6^2 & 0 \end{vmatrix}$$

(formule de Cayley-Menger)

4. En déduire que les coordonnées barycentriques d'un point M intérieur au tétraèdre sont aussi

$$\left\{ \frac{V_{BCDM}}{V_{ABCD}}, \frac{V_{ACDM}}{V_{ABCD}}, \frac{V_{ABDM}}{V_{ABCD}}, \frac{V_{ABCM}}{V_{ABCD}} \right\}$$

Solution:

- 1). Soit $P = \{k_1, k_2, 1 - k_1 - k_2, 0\}$ un point quelconque du plan ABC et $M_1 = \{x_1, y_1, z_1, 0\}$ la projection

cherchée. La distance MP^2 a pour valeur

$$\begin{aligned} & \frac{d_3^2 t (k_1 t - x + k_1 x + k_1 y + k_1 z)}{(t + x + y + z)^2} + \frac{d_5^2 t (k_2 t + k_2 x - y + k_2 y + k_2 z)}{(t + x + y + z)^2} \\ & - \frac{d_1^2 (k_1 t - x + k_1 x + k_1 y + k_1 z) (k_2 t + k_2 x - y + k_2 y + k_2 z)}{(t + x + y + z)^2} \\ & - \frac{d_6^2 t (-t + k_1 t + k_2 t - x + k_1 x + k_2 x - y + k_1 y + k_2 y + k_1 z + k_2 z)}{(t + x + y + z)^2} \\ & + \frac{d_2^2 (k_1 t - x + k_1 x + k_1 y + k_1 z) (-t + k_1 t + k_2 t - x + k_1 x + k_2 x - y + k_1 y + k_2 y + k_1 z + k_2 z)}{(t + x + y + z)^2} \\ & + \frac{d_4^2 (k_2 t + k_2 x - y + k_2 y + k_2 z) (-t + k_1 t + k_2 t - x + k_1 x + k_2 x - y + k_1 y + k_2 y + k_1 z + k_2 z)}{(t + x + y + z)^2} \end{aligned}$$

En traduisant la nullité des dérivées partielles de MP^2 par rapport aux variables k_1 et k_2 , en résolvant le système des 2 equations ainsi obtenues, on détermine les valeurs de k_1 et k_2 . On obtient:

$$k_1 = \frac{Num(k_1)}{den(k_1)} \quad k_2 = \frac{Num(k_2)}{den(k_2)}$$

avec

$$\begin{aligned} Num(k_1) &= (d_1 - d_2 - d_4) (d_1 + d_2 - d_4) (d_1 - d_2 + d_4) (d_1 + d_2 + d_4) x \\ &\quad - (d_1^2 d_4^2 + d_2^2 d_4^2 - 2 d_3^2 d_4^2 - d_4^4 - d_1^2 d_5^2 + d_2^2 d_5^2 + d_4^2 d_5^2 \\ &\quad + d_1^2 d_6^2 - d_2^2 d_6^2 + d_4^2 d_6^2) t \\ Num(k_2) &= (d_1 - d_2 - d_4) (d_1 + d_2 - d_4) (d_1 - d_2 + d_4) (d_1 + d_2 + d_4) y \\ &\quad - (d_1^2 d_2^2 - d_2^4 - d_1^2 d_3^2 + d_2^2 d_3^2 + d_2^2 d_4^2 + d_3^2 d_4^2 - 2 d_2^2 d_5^2 \\ &\quad + d_1^2 d_6^2 + d_2^2 d_6^2 - d_4^2 d_6^2) t \end{aligned}$$

et $den(k_1) = den(k_2)$ égal à

$$(d_1 - d_2 - d_4) (d_1 + d_2 - d_4) (d_1 - d_2 + d_4) (d_1 + d_2 + d_4) (t + x + y + z)$$

En substituant ces valeurs dans les coordonnées barycentriques de P , on obtient l'expression de $M_1 = \{\frac{x_1}{den}, \frac{y_1}{den}, \frac{z_1}{den}, 0\}$ avec

$$den = (d_1 - d_2 - d_4) (d_1 + d_2 - d_4) (d_1 - d_2 + d_4) (d_1 + d_2 + d_4) (t + x + y + z)$$

et

$$\begin{aligned} x_1 &= (d_1 - d_2 - d_4) (d_1 + d_2 - d_4) (d_1 - d_2 + d_4) (d_1 + d_2 + d_4) x \\ &\quad + (-d_1^2 d_4^2 - d_2^2 d_4^2 + 2 d_3^2 d_4^2 + d_4^4 + d_1^2 d_5^2 - d_2^2 d_5^2 - d_4^2 d_5^2 - \\ &\quad d_1^2 d_6^2 + d_2^2 d_6^2 - d_4^2 d_6^2) t \\ y_1 &= (d_1 - d_2 - d_4) (d_1 + d_2 - d_4) (d_1 - d_2 + d_4) (d_1 + d_2 + d_4) y \\ &\quad + (-d_1^2 d_2^2 + d_2^4 + d_1^2 d_3^2 - d_2^2 d_3^2 - d_2^2 d_4^2 - d_3^2 d_4^2 + 2 d_2^2 d_5^2 \\ &\quad - d_1^2 d_6^2 - d_2^2 d_6^2 + d_4^2 d_6^2) t \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
z_1 = & (d_1 - d_2 - d_4) (d_1 + d_2 - d_4) (d_1 - d_2 + d_4) (d_1 + d_2 + d_4) \\
& + (d_1^4 - d_1^2 d_2^2 - d_1^2 d_3^2 + d_2^2 d_3^2 - d_1^2 d_4^2 - d_3^2 d_4^2 - d_1^2 d_5^2 \\
& - d_2^2 d_5^2 + d_4^2 d_5^2 + 2 d_1^2 d_6^2) t
\end{aligned}$$

On note que

$$\begin{aligned}
aire(A, B, C) &= \frac{(d_1 + d_2 - d_4) (d_1 - d_2 + d_4) (-d_1 + d_2 + d_4) (d_1 + d_2 + d_4)}{16} \\
aire(A, B, D) &= \frac{(d_1 + d_3 - d_5) (d_1 - d_3 + d_5) (-d_1 + d_3 + d_5) (d_1 + d_3 + d_5)}{16} \\
aire(B, C, D) &= \frac{(d_4 + d_5 - d_6) (d_4 - d_5 + d_6) (-d_4 + d_5 + d_6) (d_4 + d_5 + d_6)}{16}
\end{aligned}$$

La distance MM_1^2 prend alors la valeur:

$$MM_1^2 = \frac{Cste t^2}{(d_1 - d_2 - d_4) (d_1 + d_2 - d_4) (d_1 - d_2 + d_4) (d_1 + d_2 + d_4) (t + x + y + z)^2}$$

avec

$$\begin{aligned}
Cste = & d_1^2 d_2^2 d_4^2 - d_1^2 d_3^2 d_4^2 - d_2^2 d_3^2 d_4^2 + d_3^4 d_4^2 + d_3^2 d_4^4 - d_1^2 d_2^2 d_5^2 \\
& + d_2^4 d_5^2 + d_1^2 d_3^2 d_5^2 - d_2^2 d_3^2 d_5^2 - d_2^2 d_4^2 d_5^2 - d_3^2 d_4^2 d_5^2 + d_2^2 d_5^4 \\
& + d_1^4 d_6^2 - d_1^2 d_2^2 d_6^2 - d_1^2 d_3^2 d_6^2 + d_2^2 d_3^2 d_6^2 - d_1^2 d_4^2 d_6^2 - d_3^2 d_4^2 d_6^2 \\
& - d_1^2 d_5^2 d_6^2 - d_2^2 d_5^2 d_6^2 + d_4^2 d_5^2 d_6^2 + d_1^2 d_6^4
\end{aligned}$$

2). On choisit $M = D$, soit $x = y = z = 0$, $t = 1$, donc M_1 est le projeté de D sur le plan ABC . Le volume V de la pyramide est

$$V = \frac{Base \cdot DM_1}{3}$$

et la formule précédente dans laquelle $t = 1$, fournit explicitement la distance DM_1^2 . On obtient alors, après simplifications:

$$V^2 = \frac{-Cste}{9 \cdot 16}$$

3). Le calcul explicite du déterminant (membre de droite de la formule de l'énoncé) a pour valeur $(-2) Cste$. Il résulte la formule de 3).

4). Pour simplifier les calculs, nous choisissons les coordonnées barycentriques de M sous la forme $M = \{x, y, z, 1 - x - y - z\}$. Le volume du tétraèdre $BCDM$ satisfait

$$288 V_{BCDM}^2 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & d_4^2 & d_5^2 & BM^2 \\ 1 & d_4^2 & 0 & d_6^2 & CM^2 \\ 1 & d_5^2 & d_6^2 & 0 & DM^2 \\ 1 & BM^2 & CM^2 & DM^2 & 0 \end{vmatrix}$$

La distance AM^2 est égale à

$$\begin{aligned}
AM^2 = & -d_1^2 (-1 + x) y - d_2^2 (-1 + x) z - d_4^2 y z + d_3^2 (-1 + x) (-1 + x + y + z) \\
& + d_5^2 y (-1 + x + y + z) + d_6^2 z (-1 + x + y + z)
\end{aligned}$$

La distance BM^2 est égale à

$$BM^2 = -d_1^2 x (-1 + y) - d_2^2 x z - d_4^2 (-1 + y) z + d_3^2 x (-1 + x + y + z) \\ + d_5^2 (-1 + y) (-1 + x + y + z) + d_6^2 z (-1 + x + y + z)$$

La distance CM^2 est égale à

$$CM^2 = -d_1^2 x y - d_2^2 x (-1 + z) - d_4^2 y (-1 + z) + d_3^2 x (-1 + x + y + z) \\ + d_5^2 y (-1 + x + y + z) + d_6^2 (-1 + z) (-1 + x + y + z)$$

La distance DM^2 est égale à

$$DM^2 = -d_1^2 x y - d_2^2 x z - d_4^2 y z + d_3^2 x (x + y + z) + d_5^2 y (x + y + z) + d_6^2 z (x + y + z)$$

En substituant ces valeurs dans le déterminant, on obtient

$$288 V_{BCDM}^2 = -2 (d_1^2 d_2^2 d_4^2 - d_1^2 d_3^2 d_4^2 - d_2^2 d_3^2 d_4^2 + d_3^4 d_4^2 + d_3^2 d_4^4 - d_1^2 d_2^2 d_5^2 \\ + d_2^4 d_5^2 + d_1^2 d_3^2 d_5^2 - d_2^2 d_3^2 d_5^2 - d_2^2 d_4^2 d_5^2 - d_3^2 d_4^2 d_5^2 + d_2^2 d_5^4 \\ + d_1^4 d_6^2 - d_1^2 d_2^2 d_6^2 - d_1^2 d_3^2 d_6^2 + d_2^2 d_3^2 d_6^2 - d_1^2 d_4^2 d_6^2 - d_3^2 d_4^2 d_6^2 \\ - d_1^2 d_5^2 d_6^2 - d_2^2 d_5^2 d_6^2 + d_4^2 d_5^2 d_6^2 + d_1^2 d_6^4) x^2$$

donc

$$288 V_{BCDM}^2 = 288 x^2 V_{ABCD}^2$$

Il suit $x = \frac{V_{BCDM}}{V_{ABCD}}$ puisque x est positif. On procède de même avec $y, z, t = 1 - x - y - z$.

25.4 Relations entre distances et coordonnées barycentriques

Exercice 25.4.1

Soit $ABCD$ un tétraèdre, M un point de l'espace. Montrer que les coordonnées barycentriques du point M calculées en fonction de $d_1^2, d_2^2, d_3^2, d_4^2, d_5^2, d_6^2, AM^2, BM^2, CM^2, DM^2$ sont des fractions rationnelles en ces variables.

Solution:

En posant $M = \{x, y, z, 1 - x - y - z\}$, on obtient

$$\begin{cases} d_3^2 - d_5^2 + (-d_1^2 - d_3^2 + d_5^2) x + (d_1^2 - d_3^2 + d_5^2) y + (d_2^2 - d_3^2 - d_4^2 + d_5^2) z = AM^2 - BM^2 \\ d_3^2 - d_6^2 + (-d_2^2 - d_3^2 + d_6^2) x + (d_1^2 - d_3^2 - d_4^2 + d_6^2) y + (d_2^2 - d_3^2 + d_6^2) z = AM^2 - CM^2 \\ d_3^2 - 2 d_3^2 x + (d_1^2 - d_3^2 - d_5^2) y + (d_2^2 - d_3^2 - d_6^2) z = AM^2 - DM^2 \end{cases}$$

La résolution du système linéaire d'inconnues x, y, z fournit, en utilisant la constante $K = 288 V_{ABCD}^2$ polynômiale en les d_i^2 ,

$$Kx = -d_3^2 d_4^4 + d_2^2 d_4^2 d_5^2 + d_3^2 d_4^2 d_5^2 - d_2^2 d_5^4 + d_1^2 d_4^2 d_6^2 + d_3^2 d_4^2 d_6^2 + d_1^2 d_5^2 d_6^2 \\ + d_2^2 d_5^2 d_6^2 - 2 d_4^2 d_5^2 d_6^2 - d_1^2 d_6^4 \\ + CM^2 (-d_1^2 d_4^2 + d_3^2 d_4^2 + d_1^2 d_5^2 - 2 d_2^2 d_5^2 + d_3^2 d_5^2 + d_4^2 d_5^2 - d_5^4 + d_1^2 d_6^2 - d_3^2 d_6^2 + d_5^2 d_6^2) \\ + BM^2 (-d_2^2 d_4^2 + d_3^2 d_4^2 + d_2^2 d_5^2 - d_3^2 d_5^2 - 2 d_1^2 d_6^2 + d_2^2 d_6^2 + d_3^2 d_6^2 + d_4^2 d_6^2 + d_5^2 d_6^2 - d_6^4) \\ + AM^2 (d_4^4 - 2 d_4^2 d_5^2 + d_5^4 - 2 d_4^2 d_6^2 - 2 d_5^2 d_6^2 + d_6^4) \\ + DM^2 (d_1^2 d_4^2 + d_2^2 d_4^2 - 2 d_3^2 d_4^2 - d_4^4 - d_1^2 d_5^2 + d_2^2 d_5^2 + d_4^2 d_5^2 + d_1^2 d_6^2 - d_2^2 d_6^2 + d_4^2 d_6^2)$$

$$\begin{aligned}
Ky &= d_2^2 d_3^2 d_4^2 - d_3^4 d_4^2 - d_2^4 d_5^2 + d_2^2 d_3^2 d_5^2 + d_1^2 d_2^2 d_6^2 + d_1^2 d_3^2 d_6^2 - 2d_2^2 d_3^2 d_6^2 \\
&\quad + d_3^2 d_4^2 d_6^2 + d_2^2 d_5^2 d_6^2 - d_1^2 d_6^4 \\
&\quad + CM^2 (-d_1^2 d_2^2 + d_1^2 d_3^2 + d_2^2 d_3^2 - d_3^4 - 2d_3^2 d_4^2 + d_2^2 d_5^2 + d_3^2 d_5^2 + d_1^2 d_6^2 + d_3^2 d_6^2 - d_5^2 d_6^2) \\
&\quad + AM^2 (-d_2^2 d_4^2 + d_3^2 d_4^2 + d_2^2 d_5^2 - d_3^2 d_5^2 - 2d_1^2 d_6^2 + d_2^2 d_6^2 + d_3^2 d_6^2 + d_4^2 d_6^2 + d_5^2 d_6^2 - d_6^4) \\
&\quad + BM^2 (d_2^4 - 2d_2^2 d_3^2 + d_3^4 - 2d_2^2 d_6^2 - 2d_3^2 d_6^2 + d_6^4) \\
&\quad + DM^2 (d_1^2 d_2^2 - d_2^4 - d_1^2 d_3^2 + d_2^2 d_3^2 + d_2^2 d_4^2 + d_3^2 d_4^2 - 2d_2^2 d_5^2 + d_1^2 d_6^2 + d_2^2 d_6^2 - d_4^2 d_6^2) \\
Kz &= d_1^2 d_3^2 d_4^2 - d_3^4 d_4^2 + d_1^2 d_2^2 d_5^2 - 2d_1^2 d_3^2 d_5^2 + d_2^2 d_3^2 d_5^2 + d_3^2 d_4^2 d_5^2 - d_2^2 d_5^4 \\
&\quad + CM^2 (d_1^4 - 2d_1^2 d_3^2 + d_3^4 - 2d_1^2 d_5^2 - 2d_3^2 d_5^2 + d_5^4) - d_1^4 d_6^2 + d_1^2 d_3^2 d_6^2 + d_1^2 d_5^2 d_6^2 \\
&\quad + BM^2 (-d_1^2 d_2^2 + d_1^2 d_3^2 + d_2^2 d_3^2 - d_3^4 - 2d_3^2 d_4^2 + d_2^2 d_5^2 + d_3^2 d_5^2 + d_1^2 d_6^2 + d_3^2 d_6^2 - d_5^2 d_6^2) \\
&\quad + AM^2 (-d_1^2 d_4^2 + d_3^2 d_4^2 + d_1^2 d_5^2 - 2d_2^2 d_5^2 + d_3^2 d_5^2 + d_4^2 d_5^2 - d_5^4 + d_1^2 d_6^2 - d_3^2 d_6^2 + d_5^2 d_6^2) \\
&\quad + DM^2 (-d_1^4 + d_1^2 d_2^2 + d_1^2 d_3^2 - d_2^2 d_3^2 + d_1^2 d_4^2 + d_3^2 d_4^2 + d_1^2 d_5^2 + d_2^2 d_5^2 - d_4^2 d_5^2 - 2d_1^2 d_6^2)
\end{aligned}$$

et, avec $t = 1 - x - y - z$,

$$\begin{aligned}
Kt &= -2d_1^2 d_2^2 d_4^2 + d_1^2 d_3^2 d_4^2 + d_2^2 d_3^2 d_4^2 - d_3^2 d_4^4 + d_1^2 d_2^2 d_5^2 - d_2^4 d_5^2 + d_2^2 d_4^2 d_5^2 \\
&\quad - d_1^4 d_6^2 + d_1^2 d_2^2 d_6^2 + d_1^2 d_4^2 d_6^2 \\
&\quad + CM^2 (-d_1^4 + d_1^2 d_2^2 + d_1^2 d_3^2 - d_2^2 d_3^2 + d_1^2 d_4^2 + d_3^2 d_4^2 + d_1^2 d_5^2 + d_2^2 d_5^2 - d_4^2 d_5^2 - 2d_1^2 d_6^2) \\
&\quad + BM^2 (d_1^2 d_2^2 - d_2^4 - d_1^2 d_3^2 + d_2^2 d_3^2 + d_2^2 d_4^2 + d_3^2 d_4^2 - 2d_2^2 d_5^2 + d_1^2 d_6^2 + d_2^2 d_6^2 - d_4^2 d_6^2) \\
&\quad + AM^2 (d_1^2 d_4^2 + d_2^2 d_4^2 - 2d_3^2 d_4^2 - d_4^4 - d_1^2 d_5^2 + d_2^2 d_5^2 + d_4^2 d_5^2 + d_1^2 d_6^2 - d_2^2 d_6^2 + d_4^2 d_6^2) \\
&\quad + DM^2 (d_1^4 - 2d_1^2 d_2^2 + d_2^4 - 2d_1^2 d_4^2 - 2d_2^2 d_4^2 + d_4^4)
\end{aligned}$$

25.5 Sphère circonscrite

Exercice 25.5.1

Déterminer le rayon, le centre de la sphère circonscrite à un tétraèdre $ABCD$. Montrer qu'un point $M = \{X, Y, Z, T\}$ appartient à cette sphère si et seulement si

$$0 = AD^2 TX + BD^2 TY + AB^2 XY + CD^2 TZ + AC^2 XZ + BC^2 YZ$$

ou encore

$$0 = d_3^2 TX + d_5^2 TY + d_1^2 XY + d_6^2 TZ + d_2^2 XZ + d_4^2 YZ$$

Solution:

Posons

$$288 V_{ABCD}^2 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & AB^2 & AC^2 & AD^2 \\ 1 & AB^2 & 0 & BC^2 & BD^2 \\ 1 & AC^2 & BC^2 & 0 & CD^2 \\ 1 & AD^2 & BD^2 & CD^2 & 0 \end{vmatrix}$$

soit

$$288 V_{ABCD}^2 = -2(d_1^2 d_2^2 d_4^2 - d_1^2 d_3^2 d_4^2 - d_2^2 d_3^2 d_4^2 + d_3^4 d_4^2 + d_3^2 d_4^4 - d_1^2 d_2^2 d_5^2 + d_2^4 d_5^2 + d_1^2 d_3^2 d_5^2 - d_2^2 d_3^2 d_5^2 - d_2^2 d_4^2 d_5^2 - d_3^2 d_4^2 d_5^2 + d_2^2 d_5^4 + d_1^4 d_6^2 - d_1^2 d_2^2 d_6^2 - d_1^2 d_3^2 d_6^2 + d_2^2 d_3^2 d_6^2 - d_1^2 d_4^2 d_6^2 - d_3^2 d_4^2 d_6^2 - d_1^2 d_5^2 d_6^2 - d_2^2 d_5^2 d_6^2 + d_4^2 d_5^2 d_6^2 + d_1^2 d_6^4)$$

Equation de la sphère passant par les points A, B, C, D Le centre $M = \{x, y, z, 1 - x - y - z\}$ de cette sphère doit vérifier $AM^2 - BM^2 = 0$, $AM^2 - CM^2 = 0$, $AM^2 - DM^2 = 0$, soit

$$\begin{cases} d_3^2 - d_5^2 + (-d_1^2 - d_3^2 + d_5^2) x + (d_1^2 - d_3^2 + d_5^2) y + (d_2^2 - d_3^2 - d_4^2 + d_5^2) z = 0 \\ d_3^2 - d_6^2 + (-d_2^2 - d_3^2 + d_6^2) x + (d_1^2 - d_3^2 - d_4^2 + d_6^2) y + (d_2^2 - d_3^2 + d_6^2) z = 0 \\ d_3^2 - 2d_3^2 x + (d_1^2 - d_3^2 - d_5^2) y + (d_2^2 - d_3^2 - d_6^2) z = 0 \end{cases}$$

La résolution de ce système linéaire détermine les valeurs de x, y, z , le centre $M = \{x, y, z, 1 - x - y - z\}$ de la sphère étant ainsi

$$\{x, y, z, 1 - x - y - z\} = \left\{ \frac{x_1}{288 V_{ABCD}^2}, \frac{y_1}{288 V_{ABCD}^2}, \frac{z_1}{288 V_{ABCD}^2}, \frac{t_1}{288 V_{ABCD}^2} \right\}$$

avec

$$\begin{aligned} x_1 &= (-d_3^2 d_4^4 + d_2^2 d_4^2 d_5^2 + d_3^2 d_4^2 d_5^2 - d_2^2 d_5^4 + d_1^2 d_4^2 d_6^2 + d_3^2 d_4^2 d_6^2 + d_1^2 d_5^2 d_6^2 \\ &\quad + d_2^2 d_5^2 d_6^2 - 2d_4^2 d_5^2 d_6^2 - d_1^2 d_6^4) \\ y_1 &= (d_2^2 d_3^2 d_4^2 - d_3^4 d_4^2 - d_2^4 d_5^2 + d_2^2 d_3^2 d_5^2 + d_1^2 d_2^2 d_6^2 + d_1^2 d_3^2 d_6^2 - 2d_2^2 d_3^2 d_6^2 \\ &\quad + d_3^2 d_4^2 d_6^2 + d_2^2 d_5^2 d_6^2 - d_1^2 d_6^4) \\ z_1 &= (d_1^2 d_3^2 d_4^2 - d_3^4 d_4^2 + d_1^2 d_2^2 d_5^2 - 2d_1^2 d_3^2 d_5^2 + d_2^2 d_3^2 d_5^2 + d_3^2 d_4^2 d_5^2 - d_2^2 d_5^4 \\ &\quad - d_1^4 d_6^2 + d_1^2 d_3^2 d_6^2 + d_1^2 d_5^2 d_6^2) \\ t_1 &= (-2d_1^2 d_2^2 d_4^2 + d_1^2 d_3^2 d_4^2 + d_2^2 d_3^2 d_4^2 - d_3^2 d_4^4 + d_1^2 d_2^2 d_5^2 - d_2^4 d_5^2 + d_2^2 d_4^2 d_5^2 \\ &\quad - d_1^4 d_6^2 + d_1^2 d_2^2 d_6^2 + d_1^2 d_4^2 d_6^2) \end{aligned}$$

Le rayon au carré de cette sphère a pour valeur

$$R^2 = \frac{(-d_3 d_4 - d_2 d_5 + d_1 d_6) (d_3 d_4 - d_2 d_5 + d_1 d_6) (-d_3 d_4 + d_2 d_5 + d_1 d_6) (d_3 d_4 + d_2 d_5 + d_1 d_6)}{(-2) 288 V_{ABCD}^2}$$

On notera que le numérateur a pour valeur

$$Num(R^2) = \begin{vmatrix} 0 & AB^2 & AC^2 & AD^2 \\ AB^2 & 0 & BC^2 & BD^2 \\ AC^2 & BC^2 & 0 & CD^2 \\ AD^2 & BD^2 & CD^2 & 0 \end{vmatrix}$$

Un point $M = \{X, Y, Z, T\}$ appartient à ce cercle si et seulement si sa distance (au carré) au centre est égale à cette valeur, soit

$$0 = AD^2 T X + BD^2 T Y + AB^2 X Y + CD^2 T Z + AC^2 X Z + BC^2 Y Z$$

ou encore

$$0 = d_3^2 T X + d_5^2 T Y + d_1^2 X Y + d_6^2 T Z + d_2^2 X Z + d_4^2 Y Z$$

Ceci équivaut à

$$T = \frac{-AB^2 X Y - AC^2 X Z - BC^2 Y Z}{AD^2 X + BD^2 Y + CD^2 Z}$$

25.6 Perpendiculaire commune à deux droites

Exercice 25.6.1

Soit $ABCD$ un tétraèdre. Déterminer les coordonnées barycentriques des points $T_1 \in [AB]$ et $T_2 \in [CD]$ de telle sorte que la droite $(T_1 T_2)$ soit la perpendiculaire commune aux droites (AB) et (CD) . Calculer la distance $T_1 T_2^2$ en fonction des longueurs des côtés du tétraèdre.

Solution:

Perpendiculaire commune aux droites (AB) et (CD)

Soient k, k_1 deux réels. La distance minimale entre les points $T_1 = \{(A, k), (B, (1 - k))\}$ et les points $T_2 = \{(C, k_1), (D, (1 - k_1))\}$ est obtenue, en annulant les dérivées partielles par rapport à k et k_1 , pour

$$k = \frac{d_2^2 d_4^2 - d_3^2 d_4^2 - d_4^4 - d_2^2 d_5^2 + d_3^2 d_5^2 + 2 d_4^2 d_5^2 - d_5^4 + 2 d_1^2 d_6^2 - d_2^2 d_6^2 - d_3^2 d_6^2 + d_4^2 d_6^2 + d_5^2 d_6^2}{(-d_2^2 + d_3^2 + d_4^2 - d_5^2 + 2 d_1 d_6) (d_2^2 - d_3^2 - d_4^2 + d_5^2 + 2 d_1 d_6)}$$

$$k_1 = \frac{d_1^2 d_2^2 - d_1^2 d_3^2 - d_2^2 d_3^2 + d_3^4 + d_1^2 d_4^2 + d_3^2 d_4^2 - d_1^2 d_5^2 + d_2^2 d_5^2 - 2 d_3^2 d_5^2 - d_4^2 d_5^2 + d_5^4 - 2 d_1^2 d_6^2}{(d_2^2 - d_3^2 - d_4^2 + d_5^2 - 2 d_1 d_6) (d_2^2 - d_3^2 - d_4^2 + d_5^2 + 2 d_1 d_6)}$$

Ainsi

$$T_1 = \left\{ \frac{d_2^2 d_4^2 - d_3^2 d_4^2 - d_4^4 - d_2^2 d_5^2 + d_3^2 d_5^2 + 2 d_4^2 d_5^2 - d_5^4 + 2 d_1^2 d_6^2 - d_2^2 d_6^2 - d_3^2 d_6^2 + d_4^2 d_6^2 + d_5^2 d_6^2}{(-d_2^2 + d_3^2 + d_4^2 - d_5^2 + 2 d_1 d_6) (d_2^2 - d_3^2 - d_4^2 + d_5^2 + 2 d_1 d_6)}, \right. \\ \left. \frac{-d_2^4 + 2 d_2^2 d_3^2 - d_3^4 + d_2^2 d_4^2 - d_3^2 d_4^2 - d_2^2 d_5^2 + d_3^2 d_5^2 + 2 d_1^2 d_6^2 + d_2^2 d_6^2 + d_3^2 d_6^2 - d_4^2 d_6^2 - d_5^2 d_6^2}{(-d_2^2 + d_3^2 + d_4^2 - d_5^2 + 2 d_1 d_6) (d_2^2 - d_3^2 - d_4^2 + d_5^2 + 2 d_1 d_6)}, 0, 0 \right\}$$

$$T_2 = \{0, 0,$$

$$\frac{d_1^2 d_2^2 - d_1^2 d_3^2 - d_2^2 d_3^2 + d_3^4 + d_1^2 d_4^2 + d_3^2 d_4^2 - d_1^2 d_5^2 + d_2^2 d_5^2 - 2 d_3^2 d_5^2 - d_4^2 d_5^2 + d_5^4 - 2 d_1^2 d_6^2}{(d_2^2 - d_3^2 - d_4^2 + d_5^2 - 2 d_1 d_6) (d_2^2 - d_3^2 - d_4^2 + d_5^2 + 2 d_1 d_6)}, \\ \left. \frac{-d_1^2 d_2^2 + d_2^4 + d_1^2 d_3^2 - d_2^2 d_3^2 - d_1^2 d_4^2 - 2 d_2^2 d_4^2 + d_3^2 d_4^2 + d_4^4 + d_1^2 d_5^2 + d_2^2 d_5^2 - d_4^2 d_5^2 - 2 d_1^2 d_6^2}{(d_2^2 - d_3^2 - d_4^2 + d_5^2 - 2 d_1 d_6) (d_2^2 - d_3^2 - d_4^2 + d_5^2 + 2 d_1 d_6)} \right\}$$

On a alors

$$T_1 T_2^2 = \frac{Num(T_1 T_2^2)}{(-d_2^2 + d_3^2 + d_4^2 - d_5^2 + 2 d_1 d_6) (d_2^2 - d_3^2 - d_4^2 + d_5^2 + 2 d_1 d_6)}$$

avec

$$\begin{aligned} \text{Num}(T_1 T_2) = & -d_1^2 d_2^2 d_4^2 + d_1^2 d_3^2 d_4^2 + d_2^2 d_3^2 d_4^2 - d_3^4 d_4^2 - d_3^2 d_4^4 + d_1^2 d_2^2 d_5^2 - d_2^4 d_5^2 \\ & - d_1^2 d_3^2 d_5^2 + d_2^2 d_3^2 d_5^2 + d_2^2 d_4^2 d_5^2 + d_3^2 d_4^2 d_5^2 - d_2^2 d_5^4 - d_1^4 d_6^2 + d_1^2 d_2^2 d_6^2 \\ & + d_1^2 d_3^2 d_6^2 - d_2^2 d_3^2 d_6^2 + d_1^2 d_4^2 d_6^2 + d_3^2 d_4^2 d_6^2 + d_1^2 d_5^2 d_6^2 + d_2^2 d_5^2 d_6^2 \\ & - d_4^2 d_5^2 d_6^2 - d_1^2 d_6^4 \end{aligned}$$

25.7 Sphère passant par les centres de gravité

Exercice 25.7.1

Soit $ABCD$ un tétraèdre, G_a, G_b, G_c, G_d les centres de gravité des quatre faces.

1. Déterminer le centre et le rayon de la sphère passant par les points G_a, G_b, G_c, G_d .
2. Déterminer l'intersection de cette sphère avec le plan ABC . A quelle condition l'orthocentre du triangle ABC appartient-il à la trace de la sphère, sur le plan ABC ?
3. Etudier le cas du tétraèdre orthocentrique.

Solution:

Equation de la sphère passant par les points G_a, G_b, G_c, G_d .

Le centre $M = \{x, y, z, 1 - x - y - z\}$ de cette sphère doit vérifier $G_a M^2 - G_b M^2 = 0$, $G_a M^2 - G_c M^2 = 0$, $G_a M^2 - G_d M^2 = 0$, soit

$$\left\{ \begin{array}{l} d_2^2 - 2d_3^2 - d_4^2 + 2d_5^2 + (3d_1^2 + 3d_3^2 - 3d_5^2)x + (-3d_1^2 + 3d_3^2 - 3d_5^2)y \\ \quad + (-3d_2^2 + 3d_3^2 + 3d_4^2 - 3d_5^2)z = 0 \\ d_1^2 - 2d_3^2 - d_4^2 + 2d_6^2 + (3d_2^2 + 3d_3^2 - 3d_6^2)x + (-3d_1^2 + 3d_3^2 + 3d_4^2 - 3d_6^2)y \\ \quad + (-3d_2^2 + 3d_3^2 - 3d_6^2)z = 0 \\ d_1^2 + d_2^2 - 3d_3^2 - d_5^2 - d_6^2 + 6d_3^2x + (-3d_1^2 + 3d_3^2 + 3d_5^2)y \\ \quad + (-3d_2^2 + 3d_3^2 + 3d_6^2)z = 0 \end{array} \right.$$

La résolution de ce système linéaire détermine les valeurs de x, y, z , le centre $M = \{x, y, z, 1 - x - y - z\}$ de la sphère ayant ainsi pour coordonnées barycentriques

$$M = \left\{ \frac{x_1}{864 V_{ABCD}^2}, \frac{y_1}{864 V_{ABCD}^2}, \frac{z_1}{864 V_{ABCD}^2}, \frac{t_1}{864 V_{ABCD}^2} \right\}$$

avec

$$\begin{aligned} x_1 = & -2d_1^2 d_2^2 d_4^2 + 2d_1^2 d_3^2 d_4^2 + 2d_2^2 d_3^2 d_4^2 - 2d_3^4 d_4^2 - d_3^2 d_4^4 + 2d_1^2 d_2^2 d_5^2 - 2d_2^4 d_5^2 \\ & - 2d_1^2 d_3^2 d_5^2 + 2d_2^2 d_3^2 d_5^2 + d_2^2 d_4^2 d_5^2 + d_3^2 d_4^2 d_5^2 - d_2^2 d_5^4 - 2d_1^4 d_6^2 + 2d_1^2 d_2^2 d_6^2 \\ & + 2d_1^2 d_3^2 d_6^2 - 2d_2^2 d_3^2 d_6^2 + d_1^2 d_4^2 d_6^2 + d_3^2 d_4^2 d_6^2 + d_1^2 d_5^2 d_6^2 + d_2^2 d_5^2 d_6^2 - d_1^2 d_6^4 \\ y_1 = & -2d_1^2 d_2^2 d_4^2 + 2d_1^2 d_3^2 d_4^2 + d_2^2 d_3^2 d_4^2 - d_3^4 d_4^2 - 2d_3^2 d_4^4 + 2d_1^2 d_2^2 d_5^2 - d_2^4 d_5^2 \\ & + d_2^2 d_3^2 d_5^2 + 2d_2^2 d_4^2 d_5^2 + 2d_3^2 d_4^2 d_5^2 - 2d_2^2 d_5^4 - 2d_1^4 d_6^2 + d_1^2 d_2^2 d_6^2 + d_1^2 d_3^2 d_6^2 \\ & + 2d_1^2 d_4^2 d_6^2 + d_3^2 d_4^2 d_6^2 + 2d_1^2 d_5^2 d_6^2 + d_2^2 d_5^2 d_6^2 - 2d_4^2 d_5^2 d_6^2 - d_1^2 d_6^4 - 2d_1^2 d_3^2 d_5^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
z_1 = & -2d_1^2 d_2^2 d_4^2 + d_1^2 d_3^2 d_4^2 + 2d_2^2 d_3^2 d_4^2 - d_3^4 d_4^2 - 2d_3^2 d_4^4 + d_1^2 d_2^2 d_5^2 - 2d_2^4 d_5^2 \\
& + d_2^2 d_3^2 d_5^2 + 2d_2^2 d_4^2 d_5^2 + d_3^2 d_4^2 d_5^2 - d_2^2 d_5^4 - d_1^4 d_6^2 + 2d_1^2 d_2^2 d_6^2 + d_1^2 d_3^2 d_6^2 \\
& - 2d_2^2 d_3^2 d_6^2 + 2d_1^2 d_4^2 d_6^2 + 2d_3^2 d_4^2 d_6^2 + d_1^2 d_5^2 d_6^2 + 2d_2^2 d_5^2 d_6^2 - 2d_4^2 d_5^2 d_6^2 - 2d_1^2 d_6^4 \\
t_1 = & d_1^2 d_3^2 d_4^2 + d_2^2 d_3^2 d_4^2 - 2d_3^4 d_4^2 - d_3^2 d_4^4 + d_1^2 d_2^2 d_5^2 - d_2^4 d_5^2 - 2d_1^2 d_3^2 d_5^2 + 2d_2^2 d_3^2 d_5^2 \\
& + d_2^2 d_4^2 d_5^2 + 2d_3^2 d_4^2 d_5^2 - 2d_2^2 d_5^4 - d_1^4 d_6^2 + d_1^2 d_2^2 d_6^2 + 2d_1^2 d_3^2 d_6^2 - 2d_2^2 d_3^2 d_6^2 + d_1^2 d_4^2 d_6^2 \\
& + 2d_3^2 d_4^2 d_6^2 + 2d_1^2 d_5^2 d_6^2 + 2d_2^2 d_5^2 d_6^2 - 2d_4^2 d_5^2 d_6^2 - 2d_1^2 d_6^4
\end{aligned}$$

Le rayon au carré de cette sphère a pour valeur

$$ray^2 = \frac{(d_3 d_4 + d_2 d_5 - d_1 d_6) (d_3 d_4 - d_2 d_5 + d_1 d_6) (- (d_3 d_4) + d_2 d_5 + d_1 d_6) (d_3 d_4 + d_2 d_5 + d_1 d_6)}{3864 V_{ABCD}^2}$$

Un point $M = \{X, Y, Z, T\}$ appartient à ce cercle si et seulement si sa distance (au carré) au centre est égale à cette valeur, soit

$$\begin{aligned}
0 = & d_1^2 T^2 + d_2^2 T^2 - 2d_3^2 T^2 + d_4^2 T^2 - 2d_5^2 T^2 - 2d_6^2 T^2 - d_1^2 T X - d_2^2 T X + 5d_3^2 T X \\
& + 2d_4^2 T X - d_5^2 T X - d_6^2 T X - 2d_1^2 X^2 - 2d_2^2 X^2 - 2d_3^2 X^2 + d_4^2 X^2 + d_5^2 X^2 + d_6^2 X^2 \\
& - d_1^2 T Y + 2d_2^2 T Y - d_3^2 T Y - d_4^2 T Y + 5d_5^2 T Y - d_6^2 T Y + 5d_1^2 X Y - d_2^2 X Y - d_3^2 X Y \\
& - d_4^2 X Y - d_5^2 X Y + 2d_6^2 X Y - 2d_1^2 Y^2 + d_2^2 Y^2 + d_3^2 Y^2 - 2d_4^2 Y^2 - 2d_5^2 Y^2 + d_6^2 Y^2 \\
& + 2d_1^2 T Z - d_2^2 T Z - d_3^2 T Z - d_4^2 T Z - d_5^2 T Z + 5d_6^2 T Z - d_1^2 X Z + 5d_2^2 X Z - d_3^2 X Z \\
& - d_4^2 X Z + 2d_5^2 X Z - d_6^2 X Z - d_1^2 Y Z - d_2^2 Y Z + 2d_3^2 Y Z + 5d_4^2 Y Z - d_5^2 Y Z - d_6^2 Y Z \\
& + d_1^2 Z^2 - 2d_2^2 Z^2 + d_3^2 Z^2 - 2d_4^2 Z^2 + d_5^2 Z^2 - 2d_6^2 Z^2
\end{aligned}$$

L'intersection de cette sphère avec le plan ABC s'obtient en prenant $T = 0$ dans l'équation précédente, qui devient le cercle d'équation

$$\begin{aligned}
0 = & -2d_1^2 X^2 - 2d_2^2 X^2 - 2d_3^2 X^2 + d_4^2 X^2 + d_5^2 X^2 + d_6^2 X^2 + 5d_1^2 X Y - d_2^2 X Y - d_3^2 X Y \\
& - d_4^2 X Y - d_5^2 X Y + 2d_6^2 X Y - 2d_1^2 Y^2 + d_2^2 Y^2 + d_3^2 Y^2 - 2d_4^2 Y^2 - 2d_5^2 Y^2 + d_6^2 Y^2 \\
& - d_1^2 X Z + 5d_2^2 X Z - d_3^2 X Z - d_4^2 X Z + 2d_5^2 X Z - d_6^2 X Z - d_1^2 Y Z - d_2^2 Y Z + 2d_3^2 Y Z \\
& + 5d_4^2 Y Z - d_5^2 Y Z - d_6^2 Y Z + d_1^2 Z^2 - 2d_2^2 Z^2 + d_3^2 Z^2 - 2d_4^2 Z^2 + d_5^2 Z^2 - 2d_6^2 Z^2
\end{aligned}$$

Les coordonnées barycentriques de l'orthocentre H_{ABC} du triangle ABC sont, dans le repère $\{A, B, C\}$

$$\begin{aligned}
H_{ABC} = & \left\{ \frac{(d_1^2 - d_2^2 - d_4^2) (d_1^2 - d_2^2 + d_4^2)}{(d_1 - d_2 - d_4) (d_1 + d_2 - d_4) (d_1 - d_2 + d_4) (d_1 + d_2 + d_4)}, \right. \\
& \frac{(d_1^2 - d_2^2 - d_4^2) (d_1^2 + d_2^2 - d_4^2)}{(d_1 - d_2 - d_4) (d_1 + d_2 - d_4) (d_1 - d_2 + d_4) (d_1 + d_2 + d_4)}, \\
& \left. \frac{(-d_1^2 + d_2^2 - d_4^2) (d_1^2 - d_2^2 + d_4^2)}{(d_1 - d_2 - d_4) (d_1 + d_2 - d_4) (d_1 - d_2 + d_4) (d_1 + d_2 + d_4)} \right\}
\end{aligned}$$

Le point H_{ABC} appartient au cercle si et seulement si ses coordonnées barycentriques vérifient l'équation, soit

$$\begin{aligned}
0 = & 2d_1^6 - 2d_1^4 d_2^2 - 2d_1^2 d_2^4 + 2d_2^6 - d_1^4 d_3^2 + 2d_1^2 d_2^2 d_3^2 - d_2^4 d_3^2 - 2d_1^4 d_4^2 + 6d_1^2 d_2^2 d_4^2 \\
& - 2d_2^4 d_4^2 - d_1^2 d_3^2 d_4^2 - d_2^2 d_3^2 d_4^2 - 2d_1^2 d_4^4 - 2d_2^2 d_4^4 + 2d_3^2 d_4^4 + 2d_4^6 - d_1^4 d_5^2 - d_1^2 d_2^2 d_5^2 \\
& + 2d_2^4 d_5^2 + 2d_1^2 d_4^2 d_5^2 - d_2^2 d_4^2 d_5^2 - d_4^4 d_5^2 + 2d_1^4 d_6^2 - d_1^2 d_2^2 d_6^2 - d_2^4 d_6^2 - d_1^2 d_4^2 d_6^2 \\
& + 2d_2^2 d_4^2 d_6^2 - d_4^4 d_6^2
\end{aligned}$$

Cas du tétraèdre orthocentrique

Un point $M = \{X, Y, Z, T\}$ appartient à ce cercle si et seulement si sa distance (au carré) au centre est égale à cette valeur, soit

$$\begin{aligned} 0 = & d_1^2 T^2 + d_2^2 T^2 - 2 d_3^2 T^2 - d_4^2 T^2 + d_3^2 T X - d_1^2 X^2 - d_2^2 X^2 + d_4^2 X^2 - d_2^2 T Y \\ & + d_3^2 T Y + d_4^2 T Y + d_1^2 X Y - d_1^2 Y^2 + d_2^2 Y^2 - d_4^2 Y^2 - d_1^2 T Z + d_3^2 T Z + d_4^2 T Z \\ & + d_2^2 X Z + d_4^2 Y Z + d_1^2 Z^2 - d_2^2 Z^2 - d_4^2 Z^2 \end{aligned}$$

L'intersection de cette sphère avec le plan ABC s'obtient en prenant $T = 0$ dans l'équation précédente, qui devient le cercle d'équation

$$\begin{aligned} 0 = & d_1^2 X^2 + d_2^2 X^2 - d_4^2 X^2 - d_1^2 X Y + d_1^2 Y^2 - d_2^2 Y^2 + d_4^2 Y^2 - d_2^2 X Z - d_4^2 Y Z \\ & - d_1^2 Z^2 + d_2^2 Z^2 + d_4^2 Z^2 \end{aligned}$$

Puisque $AB = d_1 = c$, $AC = d_2 = b$, $BC = d_4 = a$, on obtient, dans le plan ABC , l'équation du cercle

$$0 = a^2 X^2 - b^2 X^2 - c^2 X^2 + c^2 X Y - a^2 Y^2 + b^2 Y^2 - c^2 Y^2 + b^2 X Z + a^2 Y Z - a^2 Z^2 - b^2 Z^2 + c^2 Z^2$$

Cette équation n'est pas l'équation du cercle d'Euler du triangle ABC , les deux équations diffèrent du terme $c^2 X Y + b^2 X Z + a^2 Y Z$. On vérifie que les coordonnées barycentriques de H_{ABC} vérifient l'équation du cercle.

L'intersection avec la droite (AB) s'obtient en prenant $Z = 0$ et donne, lorsqu'il est défini, les points de coordonnées barycentriques

$$\left\{ \frac{-2 (d_1^2 - d_2^2 + d_4^2)}{-3 d_1^2 + 2 d_2^2 - 2 d_4^2 \pm \sqrt{-3 d_1^4 + 4 d_2^4 - 8 d_2^2 d_4^2 + 4 d_4^4}}, \frac{-d_1^2 + \sqrt{-3 d_1^4 + 4 d_2^4 - 8 d_2^2 d_4^2 + 4 d_4^4}}{-3 d_1^2 + 2 d_2^2 - 2 d_4^2 \pm \sqrt{-3 d_1^4 + 4 d_2^4 - 8 d_2^2 d_4^2 + 4 d_4^4}}, 0 \right\}$$

CHAPITRE

26

Orthocentre dans un tétraèdre

26 Orthocentre dans un tétraèdre

26.1 Hauteurs dans un tétraèdre

Exercice 26.1.1

Soit $ABCD$ un tétraèdre, P_1 la projection orthogonale du point D sur le plan ABC , P_2 la projection orthogonale du point C sur le plan ABD .

1. Déterminer les coordonnées barycentriques des points P_1 et P_2 .
2. Montrer que les droites (P_1D) et (P_2C) ont une intersection non-vide si et seulement si l'égalité

$$d_2^2 - d_3^2 - d_4^2 + d_5^2 = 0$$

est réalisée. Vérifier que cette condition est équivalente à l'orthogonalité des arêtes opposées $[AB]$ et $[CD]$.

3. Déterminer alors les coordonnées barycentriques du point d'intersection $H_{C,D}$ de ces deux hauteurs, en fonction de d_1, d_2, d_3, d_4, d_6 .
4. Calculer alors les distances $H_{C,D}C^2$, $H_{C,D}D^2$ et obtenir $H_{C,D}C^2 - H_{C,D}D^2 = (d_2 - d_3)(d_2 + d_3)$.
5. Lorsque $(P_1D) \cap (P_2C) \neq \emptyset$, montrer que l'on a également $(BP_3) \cap (AP_4) \neq \emptyset$, en désignant par P_3 la projection orthogonale du point B sur le plan ACD et par P_4 la projection orthogonale du point A sur le plan BCD . Déterminer alors les coordonnées barycentriques du point $H_{A,B} = (BP_3) \cap (AP_4)$, en fonction de d_1, d_2, d_3, d_4, d_6 .
6. Calculer la distance $H_{C,D}H_{A,B}^2$ et $H_{A,B}A^2 - H_{A,B}B^2$.
7. En déduire que $H_{C,D} = H_{A,B}$ si et seulement si on réalise la condition supplémentaire

$$d_1^2 - d_3^2 - d_4^2 + d_6^2 = 0$$

Montrer que cette dernière condition équivaut à l'orthogonalité des arêtes opposées $[CA]$ et $[DB]$. En conclure qu'il résulte que les arêtes $[AD]$ et $[BC]$ sont orthogonales.

Un tétraèdre réalisant les conditions de l'exercice est appelé *tétraèdre orthocentrique*.

Solution:

Dessin = $\{A, B, C, D, P_1, P_2\}$

Le repère barycentrique choisi est A, B, C, D .

Les points composés sont P_1, P_2 .

La projection orthogonale du point D sur le plan ABC est le point P_1 de coordonnées barycentriques

$$P_1 = \left\{ \frac{-d_1^2 d_4^2 - d_2^2 d_4^2 + 2 d_3^2 d_4^2 + d_4^4 + d_1^2 d_5^2 - d_2^2 d_5^2 - d_4^2 d_5^2 - d_1^2 d_6^2 + d_2^2 d_6^2 - d_4^2 d_6^2}{(d_1 - d_2 - d_4)(d_1 + d_2 - d_4)(d_1 - d_2 + d_4)(d_1 + d_2 + d_4)}, \right. \\ \frac{-d_1^2 d_2^2 + d_2^4 + d_1^2 d_3^2 - d_2^2 d_3^2 - d_2^2 d_4^2 - d_3^2 d_4^2 + 2 d_2^2 d_5^2 - d_1^2 d_6^2 - d_2^2 d_6^2 + d_4^2 d_6^2}{(-d_1 + d_2 - d_4)(d_1 + d_2 - d_4)(-d_1 + d_2 + d_4)(d_1 + d_2 + d_4)}, \\ \left. \frac{d_1^4 - d_1^2 d_2^2 - d_1^2 d_3^2 + d_2^2 d_3^2 - d_1^2 d_4^2 - d_3^2 d_4^2 - d_1^2 d_5^2 - d_2^2 d_5^2 + d_4^2 d_5^2 + 2 d_1^2 d_6^2}{(d_1 - d_2 - d_4)(d_1 + d_2 - d_4)(d_1 - d_2 + d_4)(d_1 + d_2 + d_4)}, 0 \right\}$$

La projection orthogonale du point C sur le plan ABD est le point P_2 de coordonnées barycentriques

$$P_2 = \left\{ \frac{d_1^2 d_4^2 - d_3^2 d_4^2 - d_1^2 d_5^2 + 2 d_2^2 d_5^2 - d_3^2 d_5^2 - d_4^2 d_5^2 + d_5^4 - d_1^2 d_6^2 + d_3^2 d_6^2 - d_5^2 d_6^2}{(d_1 - d_3 - d_5)(d_1 + d_3 - d_5)(d_1 - d_3 + d_5)(d_1 + d_3 + d_5)}, \right. \\ \frac{d_1^2 d_2^2 - d_1^2 d_3^2 - d_2^2 d_3^2 + d_3^4 + 2 d_3^2 d_4^2 - d_2^2 d_5^2 - d_3^2 d_5^2 - d_1^2 d_6^2 - d_3^2 d_6^2 + d_5^2 d_6^2}{(-d_1 + d_3 - d_5)(d_1 + d_3 - d_5)(-d_1 + d_3 + d_5)(d_1 + d_3 + d_5)}, 0, \\ \left. \frac{d_1^4 - d_1^2 d_2^2 - d_1^2 d_3^2 + d_2^2 d_3^2 - d_1^2 d_4^2 - d_3^2 d_4^2 - d_1^2 d_5^2 - d_2^2 d_5^2 + d_4^2 d_5^2 + 2 d_1^2 d_6^2}{(d_1 - d_3 - d_5)(d_1 + d_3 - d_5)(d_1 - d_3 + d_5)(d_1 + d_3 + d_5)} \right\}$$

Dessin = $\text{Dessin} \cup \{H_{C,D}\} = \{A, B, C, D, P_1, P_2, H_{C,D}\}$

Détermination du point $H_{C,D}$:

Soit $H_{C,D}$ le point $(DP_1) \cap (CP_2)$. Le point $H_{C,D}$ est composé.

Comme $H_{C,D} \in (DP_1)$, on a, en choisissant l'inconnue ν_1

$$\overrightarrow{OH_{C,D}} = \nu_1 \overrightarrow{OD} + (1 - \nu_1) \overrightarrow{OP_1}$$

On déduit:

$$\overrightarrow{OH_{C,D}} = a(1) \overrightarrow{OA} + a(2) \overrightarrow{OB} + a(3) \overrightarrow{OC} + a(4) \overrightarrow{OD}$$

avec

$$a(1) = \frac{(d_1^2 d_4^2 + d_2^2 d_4^2 - 2 d_3^2 d_4^2 - d_4^4 - d_1^2 d_5^2 + d_2^2 d_5^2 + d_4^2 d_5^2 + d_1^2 d_6^2 - d_2^2 d_6^2 + d_4^2 d_6^2)(-1 + \nu_1)}{(d_1 - d_2 - d_4)(d_1 + d_2 - d_4)(d_1 - d_2 + d_4)(d_1 + d_2 + d_4)} \\ a(2) = \frac{(d_1^2 d_2^2 - d_2^4 - d_1^2 d_3^2 + d_2^2 d_3^2 + d_2^2 d_4^2 + d_3^2 d_4^2 - 2 d_2^2 d_5^2 + d_1^2 d_6^2 + d_2^2 d_6^2 - d_4^2 d_6^2)(-1 + \nu_1)}{(d_1 - d_2 - d_4)(d_1 + d_2 - d_4)(d_1 - d_2 + d_4)(d_1 + d_2 + d_4)} \\ a(3) = \frac{(d_1^4 - d_1^2 d_2^2 - d_1^2 d_3^2 + d_2^2 d_3^2 - d_1^2 d_4^2 - d_3^2 d_4^2 - d_1^2 d_5^2 - d_2^2 d_5^2 + d_4^2 d_5^2 + 2 d_1^2 d_6^2)(1 - \nu_1)}{(d_1 - d_2 - d_4)(d_1 + d_2 - d_4)(d_1 - d_2 + d_4)(d_1 + d_2 + d_4)} \\ a(4) = \nu_1$$

Comme $H_{C,D} \in (CP_2)$, on a, en choisissant l'inconnue μ_1

$$\overrightarrow{OH_{C,D}} = \mu_1 \overrightarrow{OC} + (1 - \mu_1) \overrightarrow{OP_2}$$

On déduit:

$$\overrightarrow{OH_{C,D}} = b(1) \overrightarrow{OA} + b(2) \overrightarrow{OB} + b(3) \overrightarrow{OC} + b(4) \overrightarrow{OD}$$

avec

$$b(1) = \frac{(-d_1^2 d_4^2 + d_3^2 d_4^2 + d_1^2 d_5^2 - 2 d_2^2 d_5^2 + d_3^2 d_5^2 + d_4^2 d_5^2 - d_5^4 + d_1^2 d_6^2 - d_3^2 d_6^2 + d_5^2 d_6^2) (-1 + \mu_1)}{(d_1 - d_3 - d_5) (d_1 + d_3 - d_5) (d_1 - d_3 + d_5) (d_1 + d_3 + d_5)}$$

$$b(2) = \frac{(-d_1^2 d_2^2 + d_1^2 d_3^2 + d_2^2 d_3^2 - d_3^4 - 2 d_3^2 d_4^2 + d_2^2 d_5^2 + d_3^2 d_5^2 + d_1^2 d_6^2 + d_3^2 d_6^2 - d_5^2 d_6^2) (-1 + \mu_1)}{(d_1 - d_3 - d_5) (d_1 + d_3 - d_5) (d_1 - d_3 + d_5) (d_1 + d_3 + d_5)}$$

$$b(3) = \mu_1$$

$$b(4) = \frac{(d_1^4 - d_1^2 d_2^2 - d_1^2 d_3^2 + d_2^2 d_3^2 - d_1^2 d_4^2 - d_3^2 d_4^2 - d_1^2 d_5^2 - d_2^2 d_5^2 + d_4^2 d_5^2 + 2 d_1^2 d_6^2) (1 - \mu_1)}{(d_1 - d_3 - d_5) (d_1 + d_3 - d_5) (d_1 - d_3 + d_5) (d_1 + d_3 + d_5)}$$

La résolution du système linéaire d'inconnues ν_1, μ_1 ne donne aucune solution. Résolvons progressivement le système linéaire $a(i) = b(i)$ pour $i = 1, \dots, 4$. Le système des deux équations

$$\begin{cases} a(3) = b(3) \\ a(4) = b(4) \end{cases}$$

fournit $\mu_1 = \frac{Num(\mu_1)}{Den(\mu_1)}$ avec

$$\begin{aligned} Num(\mu_1) = & (d_1^4 - d_1^2 d_2^2 - d_1^2 d_3^2 + d_2^2 d_3^2 - d_1^2 d_4^2 - d_3^2 d_4^2 - d_1^2 d_5^2 - d_2^2 d_5^2 + d_4^2 d_5^2 + 2 d_1^2 d_6^2) \\ & (-d_1^2 d_2^2 + d_1^2 d_3^2 + d_2^2 d_3^2 - d_3^4 - d_1^2 d_4^2 - d_3^2 d_4^2 + d_1^2 d_5^2 - d_2^2 d_5^2 + 2 d_3^2 d_5^2 + d_4^2 d_5^2 \\ & - d_5^4 + 2 d_1^2 d_6^2) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} Den(\mu_1) = & 4 d_1^2 (d_1^2 d_2^2 d_4^2 - d_1^2 d_3^2 d_4^2 - d_2^2 d_3^2 d_4^2 + d_3^4 d_4^2 + d_3^2 d_4^4 - d_1^2 d_2^2 d_5^2 + d_2^4 d_5^2 \\ & + d_1^2 d_3^2 d_5^2 - d_2^2 d_3^2 d_5^2 - d_2^2 d_4^2 d_5^2 - d_3^2 d_4^2 d_5^2 + d_2^2 d_5^4 + d_1^4 d_6^2 - d_1^2 d_2^2 d_6^2 - d_1^2 d_3^2 d_6^2 \\ & + d_2^2 d_3^2 d_6^2 - d_1^2 d_4^2 d_6^2 - d_3^2 d_4^2 d_6^2 - d_1^2 d_5^2 d_6^2 - d_2^2 d_5^2 d_6^2 + d_4^2 d_5^2 d_6^2 + d_1^2 d_6^4) \end{aligned}$$

De même, $\nu_1 = \frac{Num(\nu_1)}{Den(\nu_1)}$ avec $Den(\nu_1) = Den(\mu_1)$ et

$$\begin{aligned} Num(\nu_1) = & (d_1^4 - d_1^2 d_2^2 - d_1^2 d_3^2 + d_2^2 d_3^2 - d_1^2 d_4^2 - d_3^2 d_4^2 - d_1^2 d_5^2 - d_2^2 d_5^2 + d_4^2 d_5^2 + 2 d_1^2 d_6^2) \\ & (d_1^2 d_2^2 - d_2^4 - d_1^2 d_3^2 + d_2^2 d_3^2 + d_1^2 d_4^2 + 2 d_2^2 d_4^2 - d_3^2 d_4^2 - d_4^4 - d_1^2 d_5^2 \\ & - d_2^2 d_5^2 + d_4^2 d_5^2 + 2 d_1^2 d_6^2) \end{aligned}$$

On obtient alors

$$a(1) - b(1) = \frac{d_2^2 - d_3^2 - d_4^2 + d_5^2}{2 d_1^2}$$

et

$$a(2) - b(2) = -\frac{d_2^2 - d_3^2 - d_4^2 + d_5^2}{2 d_1^2}$$

Le système linéaire $a(i) = b(i)$ pour $i = 1, \dots, 4$ a donc une solution si et seulement si

$$d_2^2 - d_3^2 - d_4^2 + d_5^2 = 0$$

On a

$$(-2) \overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{AB} = d_2^2 - d_3^2 - d_4^2 + d_5^2$$

donc les arêtes $[AB]$ et $[CD]$ doivent être orthogonales.

Nous supposons dorénavant que $d_2^2 - d_3^2 - d_4^2 + d_5^2 = 0$. Dans les calculs, nous remplaçons désormais d_5^2 par $-d_2^2 + d_3^2 + d_4^2$.

Dessin = $\{A, B, C, D, P_1, P_2\}$

Le repère barycentrique choisi est A, B, C, D .

Les points composés sont P_1, P_2 .

Les coordonnées barycentriques des points composés deviennent:

$$P_1 = \left\{ \frac{-(d_1^2 - d_2^2 + d_4^2)(d_2^2 - d_3^2 + d_6^2)}{(d_1 - d_2 - d_4)(d_1 + d_2 - d_4)(d_1 - d_2 + d_4)(d_1 + d_2 + d_4)}, \right. \\ \left. \frac{-(d_1^2 + d_2^2 - d_4^2)(d_2^2 - d_3^2 + d_6^2)}{(d_1 - d_2 - d_4)(d_1 + d_2 - d_4)(d_1 - d_2 + d_4)(d_1 + d_2 + d_4)}, \right. \\ \left. \frac{d_1^4 + d_2^4 - 2d_1^2 d_3^2 - 2d_1^2 d_4^2 - 2d_2^2 d_4^2 + d_4^4 + 2d_1^2 d_6^2}{(d_1 - d_2 - d_4)(d_1 + d_2 - d_4)(d_1 - d_2 + d_4)(d_1 + d_2 + d_4)}, 0 \right\}$$

$$P_2 = \left\{ \frac{(d_1^2 - d_2^2 + d_4^2)(d_2^2 - d_3^2 - d_6^2)}{(d_1^2 + d_2^2 - 2d_1 d_3 - d_4^2)(d_1^2 + d_2^2 + 2d_1 d_3 - d_4^2)}, \right. \\ \left. \frac{(d_1^2 + d_2^2 - d_4^2)(d_2^2 - d_3^2 - d_6^2)}{(d_1^2 + d_2^2 - 2d_1 d_3 - d_4^2)(d_1^2 + d_2^2 + 2d_1 d_3 - d_4^2)}, 0, \right. \\ \left. \frac{d_1^4 + d_2^4 - 2d_1^2 d_3^2 - 2d_1^2 d_4^2 - 2d_2^2 d_4^2 + d_4^4 + 2d_1^2 d_6^2}{(d_1^2 + d_2^2 - 2d_1 d_3 - d_4^2)(d_1^2 + d_2^2 + 2d_1 d_3 - d_4^2)} \right\}$$

Dessin = $\text{Dessin} \cup \{H_{C,D}\} = \{A, B, C, D, P_1, P_2, H_{C,D}\}$

Détermination du point $H_{C,D}$:

Soit $H_{C,D}$ le point $(DP_1) \cap (CP_2)$. Le point $H_{C,D}$ est composé.

Comme $H_{C,D} \in (DP_1)$, on a, en choisissant l'inconnue ν_1

$$\overrightarrow{OH_{C,D}} = \nu_1 \overrightarrow{OD} + (1 - \nu_1) \overrightarrow{OP_1}$$

On déduit:

$$\overrightarrow{OH_{C,D}} = a(1) \overrightarrow{OA} + a(2) \overrightarrow{OB} + a(3) \overrightarrow{OC} + a(4) \overrightarrow{OD}$$

avec

$$a(1) = \frac{(d_1^2 - d_2^2 + d_4^2)(d_2^2 - d_3^2 + d_6^2)(-1 + \nu_1)}{(d_1 - d_2 - d_4)(d_1 + d_2 - d_4)(d_1 - d_2 + d_4)(d_1 + d_2 + d_4)}$$

$$a(2) = \frac{(d_1^2 + d_2^2 - d_4^2)(d_2^2 - d_3^2 + d_6^2)(-1 + \nu_1)}{(d_1 - d_2 - d_4)(d_1 + d_2 - d_4)(d_1 - d_2 + d_4)(d_1 + d_2 + d_4)}$$

$$a(3) = \frac{(d_1^4 + d_2^4 - 2d_1^2 d_3^2 - 2d_1^2 d_4^2 - 2d_2^2 d_4^2 + d_4^4 + 2d_1^2 d_6^2)(1 - \nu_1)}{(d_1 - d_2 - d_4)(d_1 + d_2 - d_4)(d_1 - d_2 + d_4)(d_1 + d_2 + d_4)}$$

$$a(4) = \nu_1$$

Comme $H_{C,D} \in (CP_2)$, on a, en choisissant l'inconnue μ_1

$$\overrightarrow{OH_{C,D}} = \mu_1 \overrightarrow{OC} + (1 - \mu_1) \overrightarrow{OP_2}$$

On déduit:

$$\overrightarrow{OH_{C,D}} = b(1) \overrightarrow{OA} + b(2) \overrightarrow{OB} + b(3) \overrightarrow{OC} + b(4) \overrightarrow{OD}$$

avec

$$b(1) = \frac{(d_1^2 - d_2^2 + d_4^2) (d_2^2 - d_3^2 - d_6^2) (1 - \mu_1)}{(d_1^2 + d_2^2 - 2 d_1 d_3 - d_4^2) (d_1^2 + d_2^2 + 2 d_1 d_3 - d_4^2)}$$

$$b(2) = \frac{(d_1^2 + d_2^2 - d_4^2) (d_2^2 - d_3^2 - d_6^2) (1 - \mu_1)}{(d_1^2 + d_2^2 - 2 d_1 d_3 - d_4^2) (d_1^2 + d_2^2 + 2 d_1 d_3 - d_4^2)}$$

$$b(3) = \mu_1$$

$$b(4) = \frac{(d_1^4 + d_2^4 - 2 d_1^2 d_3^2 - 2 d_1^2 d_4^2 - 2 d_2^2 d_4^2 + d_4^4 + 2 d_1^2 d_6^2) (1 - \mu_1)}{(d_1^2 + d_2^2 - 2 d_1 d_3 - d_4^2) (d_1^2 + d_2^2 + 2 d_1 d_3 - d_4^2)}$$

La résolution du système linéaire d'inconnues ν_1, μ_1 donne

$$\nu_1 = \frac{(d_2^2 - d_3^2 + d_6^2) (d_1^4 + d_2^4 - 2 d_1^2 d_3^2 - 2 d_1^2 d_4^2 - 2 d_2^2 d_4^2 + d_4^4 + 2 d_1^2 d_6^2)}{2 \text{Den}(H_{C,D})}$$

$$\mu_1 = \frac{-(d_2^2 - d_3^2 - d_6^2) (d_1^4 + d_2^4 - 2 d_1^2 d_3^2 - 2 d_1^2 d_4^2 - 2 d_2^2 d_4^2 + d_4^4 + 2 d_1^2 d_6^2)}{2 \text{Den}(H_{C,D})}$$

avec

$$\begin{aligned} \text{Den}(H_{C,D}) = & d_1^2 d_2^4 - 2 d_1^2 d_2^2 d_3^2 + d_1^2 d_3^4 + d_1^4 d_6^2 + d_2^4 d_6^2 - 2 d_1^2 d_3^2 d_6^2 \\ & - 2 d_1^2 d_4^2 d_6^2 - 2 d_2^2 d_4^2 d_6^2 + d_4^4 d_6^2 + d_1^2 d_6^4 \end{aligned}$$

On déduit que:

$$\begin{aligned} H_{C,D} = & \left\{ \frac{(d_1^2 - d_2^2 + d_4^2) (d_2^2 - d_3^2 - d_6^2) (d_2^2 - d_3^2 + d_6^2)}{2 \text{Den}(H_{C,D})}, \right. \\ & \frac{(d_1^2 + d_2^2 - d_4^2) (d_2^2 - d_3^2 - d_6^2) (d_2^2 - d_3^2 + d_6^2)}{2 \text{Den}(H_{C,D})}, \\ & \frac{-(d_2^2 - d_3^2 - d_6^2) (d_1^4 + d_2^4 - 2 d_1^2 d_3^2 - 2 d_1^2 d_4^2 - 2 d_2^2 d_4^2 + d_4^4 + 2 d_1^2 d_6^2)}{2 \text{Den}(H_{C,D})}, \\ & \left. \frac{(d_2^2 - d_3^2 + d_6^2) (d_1^4 + d_2^4 - 2 d_1^2 d_3^2 - 2 d_1^2 d_4^2 - 2 d_2^2 d_4^2 + d_4^4 + 2 d_1^2 d_6^2)}{2 \text{Den}(H_{C,D})} \right\} \end{aligned}$$

Calculs des distances:

$$H_{C,D}C^2 = \frac{(d_1^2 + d_2^2 - 2 d_1 d_3 - d_4^2) (d_1^2 + d_2^2 + 2 d_1 d_3 - d_4^2) (d_2^2 - d_3^2 + d_6^2)^2}{4 \text{Den}(H_{C,D})}$$

$$H_{C,D}D^2 = \frac{(d_1 - d_2 - d_4) (d_1 + d_2 - d_4) (d_1 - d_2 + d_4) (d_1 + d_2 + d_4) (d_2^2 - d_3^2 - d_6^2)^2}{4 \text{Den}(H_{C,D})}$$

donc

$$H_{C,D}C^2 - H_{C,D}D^2 = (d_2 - d_3)(d_2 + d_3)$$

Dessin = Dessin $\cup \{P_3, P_4\} = \{A, B, C, D, P_1, P_2, P_3, P_4, H_{C,D}\}$

Le repère barycentrique choisi est A, B, C, D .

Les points composés sont P_3, P_4 .

La projection orthogonale du point B sur le plan ACD est le point P_3 de coordonnées barycentriques

$$P_3 = \left\{ \frac{d_2^4 - 2d_2^2d_3^2 + d_3^4 + 2d_1^2d_6^2 - 2d_3^2d_6^2 - 2d_4^2d_6^2 + d_6^4}{(d_2 - d_3 - d_6)(d_2 + d_3 - d_6)(d_2 - d_3 + d_6)(d_2 + d_3 + d_6)}, \right. \\ \left. 0, \frac{(d_1^2 + d_2^2 - d_4^2)(d_2^2 - d_3^2 - d_6^2)}{(d_2 - d_3 - d_6)(d_2 + d_3 - d_6)(d_2 - d_3 + d_6)(d_2 + d_3 + d_6)}, \right. \\ \left. \frac{-(d_1^2 + d_2^2 - d_4^2)(d_2^2 - d_3^2 + d_6^2)}{(d_2 - d_3 - d_6)(d_2 + d_3 - d_6)(d_2 - d_3 + d_6)(d_2 + d_3 + d_6)} \right\}$$

La projection orthogonale du point A sur le plan BCD est le point P_4 de coordonnées barycentriques

$$P_4 = \left\{ 0, \frac{d_2^4 - 2d_2^2d_3^2 + d_3^4 + 2d_1^2d_6^2 - 2d_3^2d_6^2 - 2d_4^2d_6^2 + d_6^4}{(d_2^2 - d_3^2 - 2d_4d_6 + d_6^2)(d_2^2 - d_3^2 + 2d_4d_6 + d_6^2)}, \right. \\ \left. \frac{(d_1^2 - d_2^2 + d_4^2)(d_2^2 - d_3^2 - d_6^2)}{(d_2^2 - d_3^2 - 2d_4d_6 + d_6^2)(d_2^2 - d_3^2 + 2d_4d_6 + d_6^2)}, \right. \\ \left. \frac{-(d_1^2 - d_2^2 + d_4^2)(d_2^2 - d_3^2 + d_6^2)}{(d_2^2 - d_3^2 - 2d_4d_6 + d_6^2)(d_2^2 - d_3^2 + 2d_4d_6 + d_6^2)} \right\}$$

Dessin = Dessin $\cup \{H_{A,B}\} = \{A, B, C, D, P_1, P_2, P_3, P_4, H_{C,D}, H_{A,B}\}$

Détermination du point $H_{A,B}$:

Soit $H_{A,B}$ le point $(BP_3) \cap (AP_4)$. Le point $H_{A,B}$ est composé.

Comme $H_{A,B} \in (BP_3)$, on a, en choisissant l'inconnue ν_1

$$\overrightarrow{OH_{A,B}} = \nu_1 \overrightarrow{OB} + (1 - \nu_1) \overrightarrow{OP_3}$$

On déduit:

$$\overrightarrow{OH_{A,B}} = c(1) \overrightarrow{OA} + c(2) \overrightarrow{OB} + c(3) \overrightarrow{OC} + c(4) \overrightarrow{OD}$$

avec

$$c(1) = \frac{(d_2^4 - 2d_2^2d_3^2 + d_3^4 + 2d_1^2d_6^2 - 2d_3^2d_6^2 - 2d_4^2d_6^2 + d_6^4)(1 - \nu_1)}{(d_2 - d_3 - d_6)(d_2 + d_3 - d_6)(d_2 - d_3 + d_6)(d_2 + d_3 + d_6)}$$

$$c(2) = \nu_1$$

$$c(3) = \frac{(d_1^2 + d_2^2 - d_4^2)(d_2^2 - d_3^2 - d_6^2)(1 - \nu_1)}{(d_2 - d_3 - d_6)(d_2 + d_3 - d_6)(d_2 - d_3 + d_6)(d_2 + d_3 + d_6)}$$

$$c(4) = \frac{(d_1^2 + d_2^2 - d_4^2)(d_2^2 - d_3^2 + d_6^2)(-1 + \nu_1)}{(d_2 - d_3 - d_6)(d_2 + d_3 - d_6)(d_2 - d_3 + d_6)(d_2 + d_3 + d_6)}$$

Comme $H_{A,B} \in (AP_4)$, on a, en choisissant l'inconnue μ_1

$$\overrightarrow{OH_{A,B}} = \mu_1 \overrightarrow{OA} + (1 - \mu_1) \overrightarrow{OP_4}$$

On déduit:

$$\overrightarrow{OH_{A,B}} = d(1) \overrightarrow{OA} + d(2) \overrightarrow{OB} + d(3) \overrightarrow{OC} + d(4) \overrightarrow{OD}$$

avec

$$\begin{aligned} d(1) &= \mu_1 \\ d(2) &= \frac{(d_2^4 - 2d_2^2 d_3^2 + d_3^4 + 2d_1^2 d_6^2 - 2d_3^2 d_6^2 - 2d_4^2 d_6^2 + d_6^4)(1 - \mu_1)}{(d_2^2 - d_3^2 - 2d_4 d_6 + d_6^2)(d_2^2 - d_3^2 + 2d_4 d_6 + d_6^2)} \\ d(3) &= \frac{(-d_1^2 + d_2^2 - d_4^2)(d_2^2 - d_3^2 - d_6^2)(-1 + \mu_1)}{(d_2^2 - d_3^2 - 2d_4 d_6 + d_6^2)(d_2^2 - d_3^2 + 2d_4 d_6 + d_6^2)} \\ d(4) &= \frac{(-d_1^2 + d_2^2 - d_4^2)(d_2^2 - d_3^2 + d_6^2)(1 - \mu_1)}{(d_2^2 - d_3^2 - 2d_4 d_6 + d_6^2)(d_2^2 - d_3^2 + 2d_4 d_6 + d_6^2)} \end{aligned}$$

La résolution du système linéaire d'inconnues ν_1, μ_1 donne

$$\begin{aligned} \nu_1 &= \frac{(d_1^2 + d_2^2 - d_4^2)(d_2^4 - 2d_2^2 d_3^2 + d_3^4 + 2d_1^2 d_6^2 - 2d_3^2 d_6^2 - 2d_4^2 d_6^2 + d_6^4)}{2 \text{Den}(H_{C,D})} \\ \mu_1 &= \frac{(d_1^2 - d_2^2 + d_4^2)(d_2^4 - 2d_2^2 d_3^2 + d_3^4 + 2d_1^2 d_6^2 - 2d_3^2 d_6^2 - 2d_4^2 d_6^2 + d_6^4)}{2 \text{Den}(H_{C,D})} \end{aligned}$$

avec $\text{Den}(H_{C,D})$ défini précédemment.

On déduit que:

$$\begin{aligned} H_{A,B} &= \left\{ \frac{(d_1^2 - d_2^2 + d_4^2)(d_2^4 - 2d_2^2 d_3^2 + d_3^4 + 2d_1^2 d_6^2 - 2d_3^2 d_6^2 - 2d_4^2 d_6^2 + d_6^4)}{2 \text{Den}(H_{C,D})}, \right. \\ &\quad \frac{(d_1^2 + d_2^2 - d_4^2)(d_2^4 - 2d_2^2 d_3^2 + d_3^4 + 2d_1^2 d_6^2 - 2d_3^2 d_6^2 - 2d_4^2 d_6^2 + d_6^4)}{2 \text{Den}(H_{C,D})}, \\ &\quad \frac{(d_1^2 + d_2^2 - d_4^2)(d_1^2 - d_2^2 + d_4^2)(d_2^2 - d_3^2 - d_6^2)}{2 \text{Den} H_{C,D}}, \\ &\quad \left. \frac{-(d_1^2 + d_2^2 - d_4^2)(d_1^2 - d_2^2 + d_4^2)(d_2^2 - d_3^2 + d_6^2)}{2 \text{Den}(H_{C,D})} \right\} \end{aligned}$$

Ainsi $H_{C,D} \neq H_{A,B}$ en général.

On a

$$H_{C,D} H_{A,B}^2 = \frac{d_1^2 d_6^2 (d_1^2 - d_3^2 - d_4^2 + d_6^2)^2}{\text{Den}(H_{C,D} H_{A,B}^2)}$$

avec

$$\begin{aligned} \text{Den}(H_{C,D} H_{A,B}^2) &= -d_1^2 d_2^4 + 2d_1^2 d_2^2 d_3^2 - d_1^2 d_3^4 - d_1^4 d_6^2 - d_2^4 d_6^2 + 2d_1^2 d_3^2 d_6^2 + 2d_1^2 d_4^2 d_6^2 \\ &\quad + 2d_2^2 d_4^2 d_6^2 - d_4^4 d_6^2 - d_1^2 d_6^4 \end{aligned}$$

On obtient

$$H_{A,B} A^2 - H_{A,B} B^2 = (d_2 - d_4)(d_2 + d_4)$$

On a

$$(-2) \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{DB} = d_1^2 - d_3^2 - d_4^2 + d_6^2$$

Or

$$(-2) \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BC} = d_1^2 - d_2^2 - d_5^2 + d_6^2$$

est la différence des deux produits scalaires $(-2) \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{DB}$ et $(-2) \overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{AB}$, tous deux nuls. Cet argument équivaut à la classique identité d'Euler

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$$

On notera que l'on peut développer de nouvelles identités analogues à l'identité d'Euler, dans lesquelles on obtient une formule ayant plus de trois termes.

26.2 Tétraèdre orthocentrique

Un tétraèdre orthocentrique $ABCD$ est un tétraèdre satisfaisant aux propriétés de la section précédente que l'on peut résumer par les deux équations

$$d_2^2 - d_3^2 - d_4^2 + d_5^2 = 0$$

$$d_1^2 - d_3^2 - d_4^2 + d_6^2 = 0$$

Ces conditions équivalentes à

$$d_2^2 + d_5^2 = d_3^2 + d_4^2 = d_1^2 + d_6^2$$

qui traduisent l'égalité de la somme des carrés des couples d'arêtes opposées. Dans un tétraèdre orthocentrique, les hauteurs issues des sommets se coupent en un même point H , appelé orthocentre du tétraèdre. On note H_a, H_b, H_c, H_d les pieds des hauteurs issues des sommets A, B, C, D (donc $H_a \in \text{plan}(BCD)$, $H_b \in \text{plan}(ACD)$, ...).

Exercice 26.2.1

Soit $ABCD$ un tétraèdre orthocentrique.

1. Calculer le volume V_{ABCD} du tétraèdre orthocentrique $ABCD$, en fonction de d_1, d_2, d_3, d_4 .
2. Déterminer alors les coordonnées barycentriques des points H_a, H_b, H_c, H_d , de l'orthocentre H , du centre K de la sphère circonscrite au tétraèdre, en fonction de d_1, d_2, d_3, d_4 .
3. Calculer les distances $HA^2, HB^2, HC^2, HD^2, KA^2 - HA^2, KB^2 - HB^2, KC^2 - HC^2, KD^2 - HD^2$. En déduire que

$$HA^2 + HB^2 + HC^2 + HD^2 = 4R^2$$

R désignant le rayon de la sphère circonscrite à $ABCD$.

4. Montrer que le centre de gravité G est le milieu de $[HK]$ (droite d'Euler d'un tétraèdre orthocentrique).
5. Déterminer les coordonnées barycentriques des points T_1 et T_2 réalisant la distance minimale entre les arêtes $[AB]$ et $[CD]$. En déduire que

$$T_1 T_2 = \frac{6 V_{ABCD}}{AB \cdot CD}$$

Solution:

En utilisant l'expression du volume d'un tétraèdre, en effectuant les substitutions $d_5^2 = -d_2^2 + d_3^2 + d_4^2$ et $d_6^2 = -d_1^2 + d_3^2 + d_4^2$, on obtient:

$$288 V_{ABCD}^2 = -2 (d_1^4 d_3^2 - 2 d_1^2 d_2^2 d_3^2 + d_2^4 d_3^2 + d_1^4 d_4^2 + 2 d_1^2 d_2^2 d_4^2 + d_2^4 d_4^2 - 2 d_1^2 d_3^2 d_4^2 - 2 d_2^2 d_3^2 d_4^2 - 2 d_1^2 d_4^4 - 2 d_2^2 d_4^4 + d_3^2 d_4^4 + d_4^6)$$

Dessin $= \{A, B, C, D, G, H, H_a, H_b, H_c, H_d, K\}$

Le repère barycentrique choisi est A, B, C, D .

Les points composés sont $G, H_a, H_c, H_b, H_a, H, K$.

En effectuant à nouveau les substitutions $d_5^2 = -d_2^2 + d_3^2 + d_4^2$ et $d_6^2 = -d_1^2 + d_3^2 + d_4^2$ dans les formules des exercices précédents, les coordonnées barycentriques des points composés, en fonction de d_1, d_2, d_3, d_4 , sont:

$$G = \left\{ \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4} \right\}$$

$$H_a = \left\{ 0, \frac{-(d_1^2 - d_2^2 - d_4^2)(d_1^2 + d_2^2 - 2d_3^2 - d_4^2)}{d_1^4 - 2d_1^2 d_2^2 + d_2^4 + 2d_1^2 d_4^2 + 2d_2^2 d_4^2 - 4d_3^2 d_4^2 - 3d_4^4}, \frac{(d_1^2 + d_2^2 - 2d_3^2 - d_4^2)(d_1^2 - d_2^2 + d_4^2)}{d_1^4 - 2d_1^2 d_2^2 + d_2^4 + 2d_1^2 d_4^2 + 2d_2^2 d_4^2 - 4d_3^2 d_4^2 - 3d_4^4}, \frac{(d_1^2 - d_2^2 - d_4^2)(d_1^2 - d_2^2 + d_4^2)}{d_1^4 - 2d_1^2 d_2^2 + d_2^4 + 2d_1^2 d_4^2 + 2d_2^2 d_4^2 - 4d_3^2 d_4^2 - 3d_4^4} \right\}$$

$$H_b = \left\{ \frac{-(d_1^2 - d_2^2 - d_4^2)(d_1^2 + d_2^2 - 2d_3^2 - d_4^2)}{(d_1^2 + d_2^2 - 2d_2 d_3 - d_4^2)(d_1^2 + d_2^2 + 2d_2 d_3 - d_4^2)}, 0, \frac{(d_1^2 + d_2^2 - d_4^2)(d_1^2 + d_2^2 - 2d_3^2 - d_4^2)}{(d_1^2 + d_2^2 - 2d_2 d_3 - d_4^2)(d_1^2 + d_2^2 + 2d_2 d_3 - d_4^2)}, \frac{(d_1^2 - d_2^2 - d_4^2)(d_1^2 + d_2^2 - d_4^2)}{(d_1^2 + d_2^2 - 2d_2 d_3 - d_4^2)(d_1^2 + d_2^2 + 2d_2 d_3 - d_4^2)} \right\}$$

$$H_c = \left\{ \frac{(d_1^2 + d_2^2 - 2d_3^2 - d_4^2)(d_1^2 - d_2^2 + d_4^2)}{(d_1^2 + d_2^2 - 2d_1 d_3 - d_4^2)(d_1^2 + d_2^2 + 2d_1 d_3 - d_4^2)}, \frac{(d_1^2 + d_2^2 - d_4^2)(d_1^2 + d_2^2 - 2d_3^2 - d_4^2)}{(d_1^2 + d_2^2 - 2d_1 d_3 - d_4^2)(d_1^2 + d_2^2 + 2d_1 d_3 - d_4^2)}, 0, \frac{-(d_1^2 + d_2^2 - d_4^2)(d_1^2 - d_2^2 + d_4^2)}{(d_1^2 + d_2^2 - 2d_1 d_3 - d_4^2)(d_1^2 + d_2^2 + 2d_1 d_3 - d_4^2)} \right\}$$

$$H_d = \left\{ \frac{(d_1^2 - d_2^2 - d_4^2)(d_1^2 - d_2^2 + d_4^2)}{(d_1 - d_2 - d_4)(d_1 + d_2 - d_4)(d_1 - d_2 + d_4)(d_1 + d_2 + d_4)}, \frac{(d_1^2 - d_2^2 - d_4^2)(d_1^2 + d_2^2 - d_4^2)}{(d_1 - d_2 - d_4)(d_1 + d_2 - d_4)(d_1 - d_2 + d_4)(d_1 + d_2 + d_4)}, \frac{(-d_1^2 + d_2^2 - d_4^2)(d_1^2 - d_2^2 + d_4^2)}{(d_1 - d_2 - d_4)(d_1 + d_2 - d_4)(d_1 - d_2 + d_4)(d_1 + d_2 + d_4)}, 0 \right\}$$

$$H = \left\{ \frac{(d_1^2 - d_2^2 - d_4^2) (d_1^2 + d_2^2 - 2d_3^2 - d_4^2) (d_1^2 - d_2^2 + d_4^2)}{288 V_{ABCD}^2}, \right. \\ \frac{(d_1^2 - d_2^2 - d_4^2) (d_1^2 + d_2^2 - d_4^2) (d_1^2 + d_2^2 - 2d_3^2 - d_4^2)}{288 V_{ABCD}^2}, \\ \left. - \frac{(d_1^2 + d_2^2 - d_4^2) (d_1^2 + d_2^2 - 2d_3^2 - d_4^2) (d_1^2 - d_2^2 + d_4^2)}{288 V_{ABCD}^2}, \right. \\ \left. - \frac{(d_1^2 - d_2^2 - d_4^2) (d_1^2 + d_2^2 - d_4^2) (d_1^2 - d_2^2 + d_4^2)}{288 V_{ABCD}^2} \right\}$$

$$\text{et } K = \left\{ \frac{x_K}{288 V_{ABCD}^2}, \frac{y_K}{288 V_{ABCD}^2}, \frac{z_K}{288 V_{ABCD}^2}, \frac{t_K}{288 V_{ABCD}^2} \right\} \text{ avec}$$

$$x_K = -d_1^6 + d_1^4 d_2^2 + d_1^2 d_2^4 - d_2^6 + d_1^4 d_3^2 - 2d_1^2 d_2^2 d_3^2 + d_2^4 d_3^2 - 4d_1^2 d_2^2 d_4^2 + 2d_1^2 d_3^2 d_4^2 \\ + 2d_2^2 d_3^2 d_4^2 + 3d_1^2 d_4^4 + 3d_2^2 d_4^4 - 3d_3^2 d_4^4 - 2d_4^6 \\ y_K = -d_1^6 - d_1^4 d_2^2 + d_1^2 d_2^4 + d_2^6 + d_1^4 d_3^2 + 2d_1^2 d_2^2 d_3^2 - 3d_2^4 d_3^2 + 2d_1^4 d_4^2 - 2d_2^4 d_4^2 - 2d_1^2 d_3^2 d_4^2 \\ + 2d_2^2 d_3^2 d_4^2 - d_1^2 d_4^4 + d_2^2 d_4^4 + d_3^2 d_4^4 \\ z_K = +d_1^6 + d_1^4 d_2^2 - d_1^2 d_2^4 - d_2^6 - 3d_1^4 d_3^2 + 2d_1^2 d_2^2 d_3^2 + d_2^4 d_3^2 - 2d_1^4 d_4^2 + 2d_2^4 d_4^2 + 2d_1^2 d_3^2 d_4^2 \\ - 2d_2^2 d_3^2 d_4^2 + d_1^2 d_4^4 - d_2^2 d_4^4 + d_3^2 d_4^4 \\ t_K = +d_1^6 - d_1^4 d_2^2 - d_1^2 d_2^4 + d_2^6 - d_1^4 d_3^2 + 2d_1^2 d_2^2 d_3^2 - d_2^4 d_3^2 - 2d_1^4 d_4^2 - 2d_2^4 d_4^2 + 2d_1^2 d_3^2 d_4^2 \\ + 2d_2^2 d_3^2 d_4^2 + d_1^2 d_4^4 + d_2^2 d_4^4 - d_3^2 d_4^4$$

La distance HA^2 est égale à

$$HA^2 = \frac{(d_1^2 + d_2^2 - d_4^2)^2 (-d_1^4 + 2d_1^2 d_2^2 - d_2^4 - 2d_1^2 d_4^2 - 2d_2^2 d_4^2 + 4d_3^2 d_4^2 + 3d_4^4)}{576 V_{ABCD}^2}$$

La distance HB^2 est égale à

$$HB^2 = \frac{(-d_1^2 - d_2^2 + 2d_2 d_3 + d_4^2) (d_1^2 + d_2^2 + 2d_2 d_3 - d_4^2) (d_1^2 - d_2^2 + d_4^2)^2}{576 V_{ABCD}^2}$$

La distance HC^2 est égale à

$$HC^2 = \frac{(d_1^2 - d_2^2 - d_4^2)^2 (-d_1^2 - d_2^2 + 2d_1 d_3 + d_4^2) (d_1^2 + d_2^2 + 2d_1 d_3 - d_4^2)}{2 \cdot 288 V_{ABCD}^2}$$

La distance HD^2 est égale à

$$HD^2 = \frac{(-d_1 + d_2 + d_4) (d_1 + d_2 - d_4) (d_1 - d_2 + d_4) (d_1 + d_2 + d_4) (d_1^2 + d_2^2 - 2d_3^2 - d_4^2)^2}{576 V_{ABCD}^2}$$

On a

$$KA^2 - HA^2 = \frac{-2d_1^2 - 2d_2^2 + d_3^2 + 3d_4^2}{4} \\ KB^2 - HB^2 = \frac{-2d_1^2 + 2d_2^2 + d_3^2 - d_4^2}{4}$$

$$KC^2 - HC^2 = \frac{2d_1^2 - 2d_2^2 + d_3^2 - d_4^2}{4}$$

$$KD^2 - HD^2 = \frac{2d_1^2 + 2d_2^2 - 3d_3^2 - d_4^2}{4}$$

Il suit que

$$HA^2 + HB^2 + HC^2 + HD^2 = KA^2 + KB^2 + KC^2 + KD^2 = 4R^2$$

Les coordonnées a_1, a_2, a_3, a_4 du vecteur $-576 V_{ABCD}^2 \overrightarrow{GK}$, exprimées en fonction des vecteurs $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OD}$ sont

$$\begin{aligned} a_1 &= 2d_1^6 - 2d_1^4 d_2^2 - 2d_1^2 d_2^4 + 2d_2^6 - 3d_1^4 d_3^2 + 6d_1^2 d_2^2 d_3^2 - 3d_2^4 d_3^2 - d_1^4 d_4^2 + 6d_1^2 d_2^2 d_4^2 \\ &\quad - d_2^4 d_4^2 - 2d_1^2 d_3^2 d_4^2 - 2d_2^2 d_3^2 d_4^2 - 4d_1^2 d_4^4 - 4d_2^2 d_4^4 + 5d_3^2 d_4^4 + 3d_4^6 \\ a_2 &= 2d_1^6 + 2d_1^4 d_2^2 - 2d_1^2 d_2^4 - 2d_2^6 - 3d_1^4 d_3^2 - 2d_1^2 d_2^2 d_3^2 + 5d_2^4 d_3^2 - 5d_1^4 d_4^2 - 2d_1^2 d_2^2 d_4^2 \\ &\quad + 3d_2^4 d_4^2 + 6d_1^2 d_3^2 d_4^2 - 2d_2^2 d_3^2 d_4^2 + 4d_1^2 d_4^4 - 3d_3^2 d_4^4 - d_4^6 \\ a_3 &= -2d_1^6 - 2d_1^4 d_2^2 + 2d_1^2 d_2^4 + 2d_2^6 + 5d_1^4 d_3^2 - 2d_1^2 d_2^2 d_3^2 - 3d_2^4 d_3^2 + 3d_1^4 d_4^2 - 2d_1^2 d_2^2 d_4^2 \\ &\quad - 5d_2^4 d_4^2 - 2d_1^2 d_3^2 d_4^2 + 6d_2^2 d_3^2 d_4^2 + 4d_2^2 d_4^4 - 3d_3^2 d_4^4 - d_4^6 \\ a_4 &= -2d_1^6 + 2d_1^4 d_2^2 + 2d_1^2 d_2^4 - 2d_2^6 + d_1^4 d_3^2 - 2d_1^2 d_2^2 d_3^2 + d_2^4 d_3^2 + 3d_1^4 d_4^2 - 2d_1^2 d_2^2 d_4^2 \\ &\quad + 3d_2^4 d_4^2 - 2d_1^2 d_3^2 d_4^2 - 2d_2^2 d_3^2 d_4^2 + d_3^2 d_4^4 - d_4^6 \end{aligned}$$

Les coordonnées b_1, b_2, b_3, b_4 du vecteur $-576 V_{ABCD}^2 \overrightarrow{GH}$, exprimées en fonction des vecteurs $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OD}$ sont

$$\begin{aligned} b_1 &= -2d_1^6 + 2d_1^4 d_2^2 + 2d_1^2 d_2^4 - 2d_2^6 + 3d_1^4 d_3^2 - 6d_1^2 d_2^2 d_3^2 + 3d_2^4 d_3^2 + d_1^4 d_4^2 - 6d_1^2 d_2^2 d_4^2 \\ &\quad + d_2^4 d_4^2 + 2d_1^2 d_3^2 d_4^2 + 2d_2^2 d_3^2 d_4^2 + 4d_1^2 d_4^4 + 4d_2^2 d_4^4 - 5d_3^2 d_4^4 - 3d_4^6 \\ b_2 &= -2d_1^6 - 2d_1^4 d_2^2 + 2d_1^2 d_2^4 + 2d_2^6 + 3d_1^4 d_3^2 + 2d_1^2 d_2^2 d_3^2 - 5d_2^4 d_3^2 + 5d_1^4 d_4^2 + 2d_1^2 d_2^2 d_4^2 \\ &\quad - 3d_2^4 d_4^2 - 6d_1^2 d_3^2 d_4^2 + 2d_2^2 d_3^2 d_4^2 - 4d_1^2 d_4^4 + 3d_3^2 d_4^4 + d_4^6 \\ b_3 &= 2d_1^6 + 2d_1^4 d_2^2 - 2d_1^2 d_2^4 - 2d_2^6 - 5d_1^4 d_3^2 + 2d_1^2 d_2^2 d_3^2 + 3d_2^4 d_3^2 - 3d_1^4 d_4^2 + 2d_1^2 d_2^2 d_4^2 \\ &\quad + 5d_2^4 d_4^2 + 2d_1^2 d_3^2 d_4^2 - 6d_2^2 d_3^2 d_4^2 - 4d_2^2 d_4^4 + 3d_3^2 d_4^4 + d_4^6 \\ b_4 &= 2d_1^6 - 2d_1^4 d_2^2 - 2d_1^2 d_2^4 + 2d_2^6 - d_1^4 d_3^2 + 2d_1^2 d_2^2 d_3^2 - d_2^4 d_3^2 - 3d_1^4 d_4^2 + 2d_1^2 d_2^2 d_4^2 \\ &\quad - 3d_2^4 d_4^2 + 2d_1^2 d_3^2 d_4^2 + 2d_2^2 d_3^2 d_4^2 - d_3^2 d_4^4 + d_4^6 \end{aligned}$$

donc G est le milieu de $[HK]$.

En reprenant les notations de l'exercice précédent, nous obtenons

$$T_1 = \left\{ \frac{(-d_1^2 + d_3^2 + d_4^2)(d_1^2 - d_2^2 + d_4^2)}{2d_1^2 d_6^2}, \frac{(d_1^2 + d_2^2 - d_4^2)(-d_1^2 + d_3^2 + d_4^2)}{2d_1^2 d_6^2}, 0, 0 \right\}$$

$$T_2 = \left\{ 0, 0, \frac{-d_1^2 - d_2^2 + 2d_3^2 + d_4^2}{2d_6^2}, \frac{-d_1^2 + d_2^2 + d_4^2}{2d_6^2} \right\}$$

$$T_1 T_2^2 = \frac{288 V_{ABCD}^2}{8d_1^2 d_6^2}$$

soit

$$T_1 T_2 = \frac{6 V_{ABCD}}{d_1 d_6}$$

26.3 Le concept d'orthocentre en dimension paire

Exercice 26.3.1

Soient A_i pour $i = 1, 2, \dots, 2p + 1$ un nombre impair de points affinement indépendants d'un espace affine. Alors, il existe un unique point H appartenant au sous-espace affine engendré par les points A_i , tel que l'on ait

$$\Delta(H, \text{Rot}^j(A_1, A_2, \dots, A_{2p+1})) = 0$$

pour tout entier $j \geq 0$.

Pour $p = 1$, on retrouve l'orthocentre usuel du triangle plan. La situation $p = 2$ fournit l'existence de l'orthocentre dans R^4 . Il est fort probable que les propriétés géométriques et théorèmes sont plus nombreux pour une géométrie étudiée en dimension paire.

Solution:

Nous indiquons les grandes lignes de la démonstration pour $2p + 1 = 5$. Les équations

$$\Delta(H, \text{Rot}^j(A_1, A_2, \dots, A_{2p+1})) = 0$$

s'écrivent:

$$\begin{cases} -A_1A_2^2 + A_1H^2 + A_2A_3^2 - A_3A_4^2 + A_4A_5^2 - A_5H^2 = 0 \\ A_1A_5^2 - A_1H^2 - A_2A_3^2 + A_2H^2 + A_3A_4^2 - A_4A_5^2 = 0 \\ A_1A_2^2 - A_1A_5^2 - A_2H^2 - A_3A_4^2 + A_3H^2 + A_4A_5^2 = 0 \\ -A_1A_2^2 + A_1A_5^2 + A_2A_3^2 - A_3H^2 - A_4A_5^2 + A_4H^2 = 0 \\ A_1A_2^2 - A_1A_5^2 - A_2A_3^2 + A_3A_4^2 - A_4H^2 + A_5H^2 = 0 \end{cases}$$

On notera que la résolution de ce système linéaire en les variables A_iH^2 donne

$$\begin{cases} A_1H^2 = A_1A_2^2 - A_2A_3^2 + A_3A_4^2 - A_4A_5^2 + A_5H^2 \\ A_2H^2 = A_1A_2^2 - A_1A_5^2 + A_5H^2 \\ A_3H^2 = A_3A_4^2 - A_4A_5^2 + A_5H^2 \\ A_4H^2 = A_1A_2^2 - A_1A_5^2 - A_2A_3^2 + A_3A_4^2 + A_5H^2 \end{cases}$$

Bien que ce ne soit pas indispensable ici, on notera que les quantités A_iH^2 doivent satisfaire l'équation supplémentaire

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & A_1A_2^2 & A_1A_3^2 & A_1A_4^2 & A_1A_5^2 & A_1H^2 \\ 1 & A_1A_2^2 & 0 & A_2A_3^2 & A_2A_4^2 & A_2A_5^2 & A_2H^2 \\ 1 & A_1A_3^2 & A_2A_3^2 & 0 & A_3A_4^2 & A_3A_5^2 & A_3H^2 \\ 1 & A_1A_4^2 & A_2A_4^2 & A_3A_4^2 & 0 & A_4A_5^2 & A_4H^2 \\ 1 & A_1A_5^2 & A_2A_5^2 & A_3A_5^2 & A_4A_5^2 & 0 & A_5H^2 \\ 1 & A_1H^2 & A_2H^2 & A_3H^2 & A_4H^2 & A_5H^2 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

qui traduit la nullité du volume du simplexe $A_1A_2A_3A_4A_5H$ considéré dans l'espace R^5 .

En substituant les valeurs précitées de $A_1H^2, A_2H^2, A_3H^2, A_4H^2$ dans cette équation, on obtient une

equation linéaire en la variable $A_5 H^2$ (puisque les variables $A_1 H^2, A_2 H^2, A_3 H^2, A_4 H^2$ disparaissent). Ceci détermine explicitement la quantité $A_5 H^2$ en fonction des $A_i A_j^2$, puis les quantités $A_1 H^2, A_2 H^2, A_3 H^2, A_4 H^2$ en fonction des $A_i A_j^2$. Les réponses sont assez complexes.

En prenant pour H des coordonnées barycentriques de la forme $H = \{x, y, z, t, 1 - x - y - z - t\}$, on obtient

$$\left\{ \begin{array}{l} -A_1 A_2^2 + A_1 A_5^2 + A_2 A_3^2 - A_3 A_4^2 + A_4 A_5^2 + (A_1 A_4^2 - A_1 A_5^2 - A_4 A_5^2) t \\ \quad - 2 A_1 A_5^2 x + (A_1 A_2^2 - A_1 A_5^2 - A_2 A_5^2) y \\ \quad \quad + (A_1 A_3^2 - A_1 A_5^2 - A_3 A_5^2) z = 0 \\ -A_2 A_3^2 + A_2 A_5^2 + A_3 A_4^2 - A_4 A_5^2 + (-A_1 A_4^2 + A_1 A_5^2 + A_2 A_4^2 - A_2 A_5^2) t \\ \quad + (A_1 A_2^2 + A_1 A_5^2 - A_2 A_5^2) x + (-A_1 A_2^2 + A_1 A_5^2 - A_2 A_5^2) y \\ \quad \quad + (-A_1 A_3^2 + A_1 A_5^2 + A_2 A_3^2 - A_2 A_5^2) z = 0 \\ A_1 A_2^2 - A_1 A_5^2 - A_2 A_5^2 - A_3 A_4^2 + A_3 A_5^2 + A_4 A_5^2 + (-A_2 A_4^2 + A_2 A_5^2 + A_3 A_4^2 - A_3 A_5^2) t \\ \quad + (-A_1 A_2^2 + A_1 A_3^2 + A_2 A_5^2 - A_3 A_5^2) x + (A_2 A_3^2 + A_2 A_5^2 - A_3 A_5^2) y \\ \quad \quad + (-A_2 A_3^2 + A_2 A_5^2 - A_3 A_5^2) z = 0 \\ -A_1 A_2^2 + A_1 A_5^2 + A_2 A_3^2 - A_3 A_5^2 + (-A_3 A_4^2 + A_3 A_5^2 - A_4 A_5^2) t \\ \quad + (-A_1 A_3^2 + A_1 A_4^2 + A_3 A_5^2 - A_4 A_5^2) x + (-A_2 A_3^2 + A_2 A_4^2 + A_3 A_5^2 - A_4 A_5^2) y \\ \quad \quad + (A_3 A_4^2 + A_3 A_5^2 - A_4 A_5^2) z = 0 \\ A_1 A_2^2 - A_1 A_5^2 - A_2 A_3^2 + A_3 A_4^2 - A_4 A_5^2 + 2 A_4 A_5^2 t + \\ \quad (-A_1 A_4^2 + A_1 A_5^2 + A_4 A_5^2) x + (-A_2 A_4^2 + A_2 A_5^2 + A_4 A_5^2) y \\ \quad \quad + (-A_3 A_4^2 + A_3 A_5^2 + A_4 A_5^2) z = 0 \end{array} \right.$$

(une forme plus symétrique des équations s'obtient en prenant pour H des coordonnées barycentriques de la forme $H = \{x, y, z, t, w\}$). Ce système linéaire en les variables x, y, z, t admet une solution unique dont la trop volumineuse écriture explicite n'est pas mentionnée ici. Une écriture plus courte de la solution s'obtient en présentant les solutions $\{x, y, z, t, 1 - x - y - z - t\}$ comme quotients de déterminants de Cramer (5, 5). Le dénominateur commun aux coordonnées barycentriques de l'orthocentre s'exprime de façon très simple à l'aide d'un déterminant (6, 6), il est en effet égal à

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & A_1 A_2^2 & A_1 A_3^2 & A_1 A_4^2 & A_1 A_5^2 \\ 1 & A_1 A_2^2 & 0 & A_2 A_3^2 & A_2 A_4^2 & A_2 A_5^2 \\ 1 & A_1 A_3^2 & A_2 A_3^2 & 0 & A_3 A_4^2 & A_3 A_5^2 \\ 1 & A_1 A_4^2 & A_2 A_4^2 & A_3 A_4^2 & 0 & A_4 A_5^2 \\ 1 & A_1 A_5^2 & A_2 A_5^2 & A_3 A_5^2 & A_4 A_5^2 & 0 \end{vmatrix}$$

A une constante multiplicative fixe près, ce déterminant est le carré du volume dans R^4 du simplexe défini par les points A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 : il est donc non-nul. L'unicité de H est immédiate.

Contents

1	Introduction	2
1.1	Vue de l'ensemble	2
1.2	Optique de l'ouvrage	3
1.3	Notations et conventions	3
1.4	Concepts de base	4
1.5	Coordonnées barycentriques	7
1.6	L'extraordinaire condition de cocyclicité	10
1.7	Relation de Stewart	13
1.8	Formulation analytique	14
1.9	Exemples	17
2	Distances dans le quadrilatère	23
2.1	Relation d'Euler entre les distances d'un quadrilatère	23
2.2	Coordonnées barycentriques à partir de distances connues	26
2.3	Coordonnées tripolaires	31
3	Le cercle des neuf points d'Euler	34
3.1	Le cercle des neuf points d'Euler	34
3.2	Théorème de Feuerbach	39
4	Points classiques	44
4.1	Coordonnées barycentriques des points les plus classiques	44
4.2	Formules remarquables	46
4.3	Distances entre des points classiques d'un triangle	51
5	Droites orthogonales	57
5.1	Point M tel que MM_1 soit orthogonal à M_2M_3	57
5.2	Illustration par des exemples	59
5.3	Le théorème des trois cercles de Monge et d'Alembert	66
5.4	Un théorème de Cantor	70
6	Points cocycliques	73
6.1	Condition de cocyclicité	73
6.2	Autour du théorème de Ptolémée	74
6.3	Centres de gravité de points cocycliques	83
6.4	Cercle passant par les centres des cercles ex-inscrits	85
7	Formes fondamentales	92
7.1	Expression analytique du produit scalaire dans le cas du plan	92
7.2	Expression générale de la distance entre deux points	93
7.3	Multi-produit scalaire	94
7.4	Multi-rapport formel	103

8	Le multi-rapport	106
8.1	Propriétés du multi-rapport	106
8.2	Pappus revisité	109
8.3	Alternative au théorème de Céva	114
8.4	Multi-rapport d'un faisceau de droites	119
8.5	Invariance du multi-rapport	129
8.6	Faisceau harmonique	132
9	Projection orthogonale	138
9.1	Projection d'un point sur une droite	138
9.2	Formules diverses invoquant des projections	139
9.3	Théorème de Steiner	145
9.4	Droites concourantes passant par des points classiques	147
9.5	Triangle podaire d'un point relativement à un triangle	150
9.6	Formule de Pappus	152
9.7	Projections et cocyclicité	158
10	Théorème de Pascal	166
10.1	Un théorème de Pascal abstrait	166
10.2	Théorème de Pascal pour une conique	171
10.3	Le théorème de Pascal pour le cercle	172
11	Introduction aux coniques	176
11.1	Equation générale d'une conique passant par A, B, C	176
11.2	Tangente à	179
11.3	Le théorème d'Aubert pour une conique	184
12	Céviennes	188
12.1	Théorème de Brianchon	188
12.2	Céviennes dans un contexte général	194
12.3	Céviennes dans un cas simple	198
13	Triangle orthique	202
13.1	Triangle orthique, Cercle de Taylor	202
14	Points de Nagel et de Gergonne	212
14.1	Points de Nagel et de Gergonne	212
15	Théorèmes du papillon	222
15.1	Théorème du papillon simple	222
15.2	Théorème du papillon simple pour une conique	228
15.3	Théorème du papillon double pour une conique	235
16	Théorèmes de Napoléon et théorèmes semblables	237
16.1	Exercice préliminaire	237
16.2	Théorème de Napoléon	239
16.3	Triangle orné de figures	244

16.4	Théorème de Finsler Hadwiger	247
16.5	Théorème de Van Aubel	250
16.6	Point de Torricelli	253
17	Point de Lemoine	258
17.1	Résultats techniques	258
17.2	Isogonal d'un point par rapport à un triangle	262
17.3	Le point de Lemoine	265
17.4	Triangle podaire et point de Lemoine	271
17.5	Théorème de Grèbe	277
17.6	Une propriété d'extremum	284
18	Cercles de Lemoine et de Tucker	287
18.1	Cercle de Lemoine	287
18.2	Cercle de Tucker	291
19	Changement de repère	308
19.1	Formule de changement de repère dans le plan	308
19.2	Exemples	310
19.3	Droites de Gauss et d'Aubert	313
19.4	Point de Miquel	318
20	Triangle tangentiel	323
20.1	Triangle tangentiel	323
20.2	Centre d'homothétie	333
21	Groupe orthocentrique	340
21.1	Dualités dans un triangle	340
22	Cercles d'Apollonius	351
22.1	Cercles d'Apollonius	351
23	Théorèmes de Varignon et Wittenbauer	367
23.1	Théorèmes de Varignon et Wittenbauer	367
24	Cercles de Brocard	377
24.1	Cercles de Brocard	377
24.2	Points de Brocard	380
25	Le tétraèdre	387
25.1	Expression de la distance entre deux points de l'espace	387
25.2	Un exemple	387
25.3	Distance d'un point à un plan	389
25.4	Relations entre distances et coordonnées barycentriques	392
25.5	Sphère circonscrite	393
25.6	Perpendiculaire commune à deux droites	395
25.7	Sphère passant par les centres de gravité	396

26 Orthocentre dans un tétraèdre	399
26.1 Hauteurs dans un tétraèdre	399
26.2 Tétraèdre orthocentrique	406
26.3 Le concept d'orthocentre en dimension paire	410