1.1 Formulaire simplifié pour les dérivées

Rappels

$$\begin{array}{lll} f(x) = k_1\,u(x) + k_2\,v(x) & f'(x) = k_1\,u'(x) + k_2\,v'(x) & k_1 \text{ et } k_2 \text{ des réels} \\ f(x) = u(x)\,v(x) & f'(x) = u'(x)\,v(x) + u(x)\,v'(x) & \\ f(x) = \frac{u(x)}{v(x)} & f'(x) = \frac{u'(x)\,v(x) - u(x)\,v'(x)}{v^2(x)} & \end{array}$$

Dérivées usuelles:

$$\begin{array}{lll} f(x) = x^n & f'(x) = n\,x^{n-1} & \text{valable pour } n \in \mathrm{R} \\ f(x) = \sin(x) & f'(x) = \cos(x) & \\ f(x) = \cos(x) & f'(x) = -\sin(x) & \\ f(x) = e^x & f'(x) = e^x & \\ f(x) = \ln(x) \text{ ou } \ln(\mid x \mid) & f'(x) = \frac{1}{x} & \end{array}$$

On rencontrera aussi:

$$\begin{array}{lll} f(x) = \tan(x) & f'(x) = \frac{1}{\cos^2(x)} = 1 + \tan^2(x) & \\ f(x) = \arctan(x) & f'(x) = \frac{1}{1+x^2} & \text{la trigo disparait dans la dérivée} \end{array}$$

La formule $f'(x) = n\,x^{n-1}$ est très pratique car elle permet de calculer directement les dérivées de fonctions telles que $\frac{1}{x}$, $\sqrt{x}$, $\frac{1}{\sqrt{x}}$, $\cdots$. En effet, ces fonctions s'expriment simplement en utilisant les puissances négatives ou fractionnaires. Ainsi

$$(\frac{1}{x})' = (x^{-1})' = (-1)\,x^{-1-1} = (-1)\,x^{-2} = \frac{-1}{x^2} \qquad (\text{Ici } n \text{ vaut } -1)$$

Dans une fraction, le déplacement d'un terme du numérateur vers le dénominateur (et vice-versa) change uniquement le signe de la puissance. Ainsi

$$\frac{x^A}{x^B} = \frac{1}{x^{-A}\,x^B} = x^A\,x^{-B} = \frac{x^{-B}}{x^{-A}}$$

Et

$$\begin{aligned} \frac{x^A\,C}{x^B} &= \frac{C}{x^{-A}\,x^B} \\ &= x^A\,x^{-B}\,C = \frac{x^{-B}\,C}{x^{-A}} = \frac{1}{x^{-A}\,x^B\,C^{-1}} \\ &= \frac{1}{\frac{x^B\,C^{-1}}{x^A}} = \frac{1}{\frac{x^B}{x^A C}} = \frac{1}{\frac{x^{-A}}{x^{-B} C}} = \cdots etc \cdots \end{aligned}$$

Donc

$$\frac{\frac{1}{x^A}}{\frac{1}{x^B}} = \frac{x^{-A}}{x^{-B}} = \frac{x^B}{x^A}$$

Parmi les valeurs importantes des puissances fractionnaires

$$\begin{aligned}
\sqrt{x} &= x^{1/2} = \sqrt[2]{x} \qquad \sqrt[3]{x} = x^{\frac{1}{3}} \qquad \sqrt[4]{x} = x^{\frac{1}{4}} = \left(x^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\sqrt{x}} \\
\frac{1}{\sqrt{x}} &= \frac{1}{x^{1/2}} = x^{-1/2} \\
x\sqrt{x} &= x^1\, x^{1/2} = x^{3/2}
\end{aligned}$$

Notons que:

$$\sqrt[6]{x} = x^{\frac{1}{6}} = \left(x^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{\sqrt[2]{x}} = \left(x^{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt[2]{\sqrt[3]{x}}$$

1.2 Chaînes de calcul

Calculons la quantité $f(x) = \sin(\left(1+x+x^2\right)^3)$ pour la valeur $x = 3$. Nous devons calculer progressivement $1+x+x^2 = 1+3+3^2 = 13$ puis $13^3 = 2197$ puis $\sin(2197) = f(3)$: ce type de calcul est **enchaîné** car chaque terme (chaque valeur) sert à l'évaluation du terme suivant. On peut représenter la progression par

$$3 \longrightarrow \quad 13 \longrightarrow \quad 2197 \longrightarrow \quad \sin(2197) = f(3)$$

En réalité, il est plus simple de donner des noms arbitraires aux quantités intermédiaires, par exemple $u, v, w, \cdots$ (ou $a, b, c, \cdots$) et d'écrire la progression abstraitement

$$x \longrightarrow \quad 1+x+x^2 = u \longrightarrow \quad u^3 = v \longrightarrow \quad \sin(v) = f(x)$$

Un calcul de la quantité

$$g(x) = \sqrt{x\left(3+\frac{1}{x}+x\right)^3 + (1+x^2)^3}$$

pour $x = 3$ demande plusieurs manipulations. On calcule $\left(1+x^2\right)^3$ (égal à 1000 pour $x = 3$) puis $\left(3+\frac{1}{x}+x\right)^3$ (égal à $\frac{6859}{27}$ pour $x = 3$) puis $x\left(3+\frac{1}{x}+x\right)^3$ (égal à $\frac{6859}{9}$ pour $x = 3$). Finalement $g(3) = \sqrt{\frac{6859}{9}+1000} = \frac{\sqrt{15859}}{3}$.
Ce type de calcul **n'est pas enchaîné** car les valeurs 1000, $\frac{6859}{27}$ et 3 sont enregistrées (en mémoire pour une machine) et sont rappelées pour le calcul final de $g(3)$.
Posons $M_1(x) = \left(1+x^2\right)^3$, $M_2(x) = \left(3+\frac{1}{x}+x\right)^3$ et $M_3(x) = x$.
La représentation de $M_1(x)$ est

$$x \longrightarrow \quad 1+x^2 = u \longrightarrow \quad u^3 = M_1(x)$$

de $M_2(x)$ est

$$x \longrightarrow \quad 3+\tfrac{1}{x}+x = u \longrightarrow \quad u^3 = M_2(x)$$

de $M_3(x)$

$$x \longrightarrow \quad x = M_3(x)$$

La représentation de $g(x)$ est alors

$$x \longrightarrow \quad M_1(x) + M_2(x)\, M_3(x) = u \longrightarrow \quad \sqrt{u} = g(x)$$

Une fonction dont le calcul s'effectue en une seule chaîne est en réalité une fonction composée (c'est à dire de la forme $h_1 \circ h_2 \circ \cdots \circ h_k \circ (x)$).
Les fonctions $f(x)$, $M_1(x)$, $M_2(x)$, $M_3(x)$ sont des fonctions composées. La fonction $g(x)$ ne l'est pas mais l'introduction des sous-chaînes $M_1(x)$, $M_2(x)$, $M_3(x)$ permet d'associer une seule chaîne pour le calcul. L'ordinateur convertira $M_1(x) + M_2(x)\, M_3(x)$ en un objet du style

$$\{Addition, \{M_1(x), \{Multiplication, M_2(x), M_3(x)\}\}$$

et calculera progressivement à partir des listes les plus internes.

1.3 Méthode rapide de calcul des dérivées de fonctions composées

Pour calculer la dérivée de

$$f(x) = \ln(\sin(x^2 + 1))$$

on écrit la chaîne de calculs

$$x \longrightarrow \quad x^2 + 1 = u \longrightarrow \quad \sin(u) = v \longrightarrow \quad \ln(v) = f(x)$$

et on dérive chaque maillon de la chaîne. Il reste à multiplier les réponses.

Ainsi

$$\begin{array}{ccccccc} x & \longrightarrow & x^2+1 = u & \longrightarrow & \sin(u) = v & \longrightarrow & \ln(v) = f(x) \\ & & je \big\downarrow derive & & je \big\downarrow derive & & je \big\downarrow derive \\ & & 2\,x & & \cos(u) & & \frac{1}{v} \end{array}$$

donc

$$\begin{aligned} f'(x) &= \quad 2\,x \quad \times \quad \cos(u) \quad \times \quad \frac{1}{v} \\ &= \quad 2\,x\,\frac{\cos(x^2+1)}{\sin(x^2+1)} \end{aligned}$$

La réponse finale $f'(x)$ ne doit pas contenir les termes $u, v, w, \cdots$ inventés temporairement. On retrouve facilement les valeurs de $u, v, w, \cdots$ directement en fonction de x en les localisant 'géographiquement' (par exemple u est à l'intérieur du sin(), de même v est à l'intérieur du ln()) ou alors en s'appuyant sur le début du texte (par exemple, v est de la forme $\sin(\cdots \text{texte en x} \cdots)$).

1.4 Exemples simples

Exercice 1.4.1
Calculer la dérivée de

$$f(x) = \left(2 + 3\,x^2 + x^4\right)^5 \tag{1}$$

Solution:
On a la chaîne de calculs

$$\begin{array}{ccccc} x & \longrightarrow & 2+3\,x^2+x^4 = u & \longrightarrow & u^5 = f(x) \\ & & je \big\downarrow derive & & je \big\downarrow derive \\ & & 6\,x+4\,x^3 & & 5\,u^4 \end{array}$$

donc

$$\begin{aligned} f'(x) = & \quad 6\,x+4\,x^3 \quad \times \quad 5\,u^4 \\ = & \quad 5\,\left(6\,x+4\,x^3\right)\,\left(2+3\,x^2+x^4\right)^4 \end{aligned}$$

Exercice 1.4.2
Calculer la dérivée de

$$f(x) = \sin(x^3) \tag{2}$$

Solution:
On a la chaîne de calculs

$$\begin{array}{ccccc} x & \longrightarrow & x^3 = u & \longrightarrow & \sin(u) = f(x) \\ & & je \big\downarrow derive & & je \big\downarrow derive \\ & & 3\,x^2 & & \cos(u) \end{array}$$

donc

$$\begin{aligned} f'(x) = & \quad 3\,x^2 \quad \times \quad \cos(u) \\ = & \quad 3\,x^2\,\cos(x^3) \end{aligned}$$

Exercice 1.4.3
Calculer la dérivée des fonctions

$$f(x) = \frac{1}{\sin(x^2+1)} \tag{3}$$

Solution:
On a la chaîne de calculs

$$\begin{array}{ccccccc} x & \longrightarrow & x^2+1 = u & \longrightarrow & \sin(u) = v & \longrightarrow & 1/v = f(x) \\ & & je \big\downarrow derive & & je \big\downarrow derive & & je \big\downarrow derive \\ & & 2\,x & & \cos(u) & & -1/v^2 \end{array}$$

donc

$$\begin{aligned} f'(x) = & \quad 2\,x \quad \times \quad \cos(u) \quad \times \quad -1/v^2 \\ = & \quad \frac{-2\,x\,\cos(x^2+1)}{(\sin(x^2+1))^2} = \frac{-2\,x\,\cos(x^2+1)}{\sin^2(x^2+1)} \end{aligned}$$

Exercice 1.4.4
Calculer la dérivée de
$$f(x) = 1 + \left(2 + x^4\right)^3 \tag{4}$$

Solution:
On a la chaîne de calculs

$$\begin{array}{ccccc} x & \longrightarrow & 2 + x^4 = u & \longrightarrow & 1 + u^3 = f(x) \\ & & \downarrow & & \downarrow \\ & & 4\,x^3 & & 3\,u^2 \end{array}$$

donc
$$\begin{aligned} f'(x) &= 4\,x^3 \times 3\,u^2 \\ &= 12\,x^3 \left(2 + x^4\right)^2 \end{aligned}$$

Exercice 1.4.5
Calculer la dérivée de
$$f(x) = \sin(x^2 + \cos(x)) \tag{5}$$

Solution:
On a la chaîne de calculs

$$\begin{array}{ccccc} x & \longrightarrow & x^2 + \cos(x) = u & \longrightarrow & \sin(u) = f(x) \\ & & \downarrow & & \downarrow \\ & & 2\,x - \sin(x) & & \cos(u) \end{array}$$

donc
$$\begin{aligned} f'(x) &= 2\,x - \sin(x) \times \cos(u) \\ &= -\left(\cos(x^2 + \cos(x))\ (-2\,x + \sin(x))\right) \end{aligned}$$

Exercice 1.4.6
Calculer la dérivée de
$$f(x) = \frac{1}{4 + \cos(x)} \tag{6}$$

Solution:

On a la chaîne de calculs

$$\begin{array}{ccccccc} x & \longrightarrow & \cos(x) = u & \longrightarrow & 4 + u = v & \longrightarrow & \frac{1}{v} = f(x) \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ & & -\sin(x) & & 1 & & \frac{-1}{v^2} \end{array}$$

donc

$$\begin{aligned} f'(x) &= \quad -\sin(x) \quad \times \quad 1 \quad \times \quad \frac{-1}{v^2} \\ &= \quad \frac{\sin(x)}{(4+\cos(x))^2} \end{aligned}$$

Exercice 1.4.7

Calculer la dérivée de

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2 + x^3 + x^4}} \tag{7}$$

Solution:

On a la chaîne de calculs

$$\begin{array}{ccccccc} x & \longrightarrow & 2 + x^3 + x^4 = u & \longrightarrow & \sqrt{u} = v & \longrightarrow & \frac{1}{v} = f(x) \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ & & 3\,x^2 + 4\,x^3 & & \frac{1}{2\,\sqrt{u}} & & -v^{-2} \end{array}$$

donc

$$\begin{aligned} f'(x) &= \quad 3\,x^2 + 4\,x^3 \quad \times \quad \frac{1}{2\,\sqrt{u}} \quad \times \quad -v^{-2} \\ &= \quad \frac{-\left(x^2\,(3 + 4\,x)\right)}{2\,(2 + x^3 + x^4)^{\frac{3}{2}}} \end{aligned}$$

Exercice 1.4.8

Calculer la dérivée de

$$f(x) = \sqrt{1 + \sqrt{x + \sin(x)}} \tag{8}$$

Solution:

On a la chaîne de calculs

$$\begin{array}{ccccccccc} x & \longrightarrow & x + \sin(x) = u & \longrightarrow & \sqrt{u} = v & \longrightarrow & 1 + v = w & \longrightarrow & \sqrt{w} = f(x) \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ & & 1 + \cos(x) & & \frac{1}{2\,\sqrt{u}} & & 1 & & \frac{1}{2\,\sqrt{w}} \end{array}$$

donc

$$\begin{aligned} f'(x) &= \quad 1 + \cos(x) \quad \times \quad \frac{1}{2\,\sqrt{u}} \quad \times \quad 1 \quad \times \quad \frac{1}{2\,\sqrt{w}} \\ &= \quad \frac{1 + \cos(x)}{4\,\sqrt{x + \sin(x)}\,\sqrt{1 + \sqrt{x + \sin(x)}}} \end{aligned}$$

Exercice 1.4.9
Calculer la dérivée de

$$f(x) = e^{\frac{1}{3-2x+x^2}} \tag{9}$$

Solution:
On a la chaîne de calculs

$$\begin{array}{ccccccc} x & \longrightarrow & 3-2x+x^2 = u & \longrightarrow & \frac{1}{u} = v & \longrightarrow & e^v = f(x) \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ & & -2+2x & & -u^{-2} & & e^v \end{array}$$

donc

$$\begin{aligned} f'(x) &= \quad -2+2x \quad \times \quad -u^{-2} \quad \times \quad e^v \\ &= \frac{-2\, e^{\frac{1}{3-2x+x^2}}\,(-1+x)}{(3-2x+x^2)^2} \end{aligned}$$

Exercice 1.4.10
Calculer la dérivée de

$$f(x) = \sqrt{\ln(3+2x+x^2)} \tag{10}$$

Solution:
On a la chaîne de calculs

$$\begin{array}{ccccccc} x & \longrightarrow & 3+2x+x^2 = u & \longrightarrow & \ln(u) = v & \longrightarrow & \sqrt{v} = f(x) \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ & & 2+2x & & \frac{1}{u} & & \frac{1}{2\sqrt{v}} \end{array}$$

donc

$$\begin{aligned} f'(x) &= \quad 2+2x \quad \times \quad \frac{1}{u} \quad \times \quad \frac{1}{2\sqrt{v}} \\ &= \frac{1+x}{(3+2x+x^2)\,\sqrt{\ln(3+2x+x^2)}} \end{aligned}$$

Exercice 1.4.11
Calculer la dérivée de

$$f(x) = \cos(\frac{1}{\sin(x)}) \tag{11}$$

Solution:

On a la chaîne de calculs

$$\begin{array}{ccccccc} x & \longrightarrow & \sin(x) = u & \longrightarrow & \frac{1}{u} = v & \longrightarrow & \cos(v) = f(x) \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ & & \cos(x) & & -u^{-2} & & -\sin(v) \end{array}$$

donc

$$\begin{aligned} f'(x) &= \quad \cos(x) \quad \times \quad -u^{-2} \quad \times \quad -\sin(v) \\ &= \quad \frac{\cos(x)}{\sin^2(x)} \sin\left(\frac{1}{\sin(x)}\right) \end{aligned}$$

Exercice 1.4.12
Calculer la dérivée de

$$f(x) = \frac{1}{4+\cos(x)} \tag{12}$$

Solution:
On a la chaîne de calculs

$$\begin{array}{ccccccc} x & \longrightarrow & \cos(x) = u & \longrightarrow & 4+u = v & \longrightarrow & \frac{1}{v} = f(x) \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ & & -\sin(x) & & 1 & & \frac{-1}{v^2} \end{array}$$

donc

$$\begin{aligned} f'(x) &= \quad -\sin(x) \quad \times \quad 1 \quad \times \quad \frac{-1}{v^2} \\ &= \quad \frac{\sin(x)}{(4+\cos(x))^2} \end{aligned}$$

Exercice 1.4.13
Calculer la dérivée de

$$f(x) = e^{5\sqrt{3+x+x^2}} \tag{13}$$

Solution:
On a la chaîne de calculs

$$\begin{array}{ccccccc} x & \longrightarrow & 3+x+x^2 = u & \longrightarrow & \sqrt{u} = v & \longrightarrow & e^{5\,v} = f(x) \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ & & 1+2\,x & & \frac{1}{2\sqrt{u}} & & 5\,e^{5\,v} \end{array}$$

donc

$$\begin{aligned} f'(x) &= \quad 1+2\,x \quad \times \quad \frac{1}{2\sqrt{u}} \quad \times \quad 5\,e^{5\,v} \\ &= \quad \frac{5\,e^{5\sqrt{3+x+x^2}}\,(1+2\,x)}{2\sqrt{3+x+x^2}} \end{aligned}$$

Exercice 1.4.14
Calculer la dérivée de

$$f(x) = \frac{1}{\ln(\ln(x))} \tag{14}$$

Solution:
On a la chaîne de calculs

$$\begin{array}{ccccccc}
x & \longrightarrow & \ln(x) = u & \longrightarrow & \ln(u) = v & \longrightarrow & \frac{1}{v} = f(x) \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 & & \frac{1}{x} & & \frac{1}{u} & & -v^{-2}
\end{array}$$

donc

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{1}{x} \times \frac{1}{u} \times -v^{-2} \\
&= \frac{-1}{x\,\ln(x)\ln(\ln(x))^2}
\end{aligned}$$

Exercice 1.4.15
Calculer la dérivée de

$$f(x) = e^{5\,e^x} \tag{15}$$

Solution:
On a la chaîne de calculs

$$\begin{array}{ccccccc}
x & \longrightarrow & e^x = u & \longrightarrow & 5\,u = v & \longrightarrow & e^v = f(x) \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 & & e^x & & 5 & & e^v
\end{array}$$

donc

$$\begin{aligned}
f'(x) &= e^x \times 5 \times e^v \\
&= 5\,e^{5\,e^x}\,e^x = 5\,e^{5\,e^x+x}
\end{aligned}$$

Exercice 1.4.16
Calculer la dérivée de

$$f(x) = \frac{1}{\left(1+\sqrt{1+x^2}\right)^3} = \left(1+\sqrt{1+x^2}\right)^{-3} \tag{16}$$

Solution:

On a la chaîne de calculs

$$\begin{array}{ccccccccc} x & \longrightarrow & 1+x^2=u & \longrightarrow & \sqrt{u}=v & \longrightarrow & 1+v=w & \longrightarrow & w^{-3}=f(x) \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ & & 2\,x & & \frac{1}{2\sqrt{u}} & & 1 & & \frac{-3}{w^4} \end{array}$$

donc

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2\,x \times \frac{1}{2\sqrt{u}} \times 1 \times \frac{-3}{w^4} \\ &= \frac{-3\,x}{\sqrt{1+x^2}\left(1+\sqrt{1+x^2}\right)^4} \end{aligned}$$

Exercice 1.4.17
Calculer la dérivée de

$$f(x) = \cos(\ln(\sqrt{x})) \tag{17}$$

Solution:
On a la chaîne de calculs

$$\begin{array}{ccccccc} x & \longrightarrow & \sqrt{x}=u & \longrightarrow & \ln(u)=v & \longrightarrow & \cos(v)=f(x) \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ & & \frac{1}{2\sqrt{x}} & & \frac{1}{u} & & -\sin(v) \end{array}$$

donc

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{2\sqrt{x}} \times \frac{1}{u} \times -\sin(v) \\ &= \frac{-\sin(\frac{\ln(x)}{2})}{2\,x} \end{aligned}$$

car $\ln(\sqrt{x}) = \frac{1}{2}\ln(x)$.

Exercice 1.4.18
Calculer la dérivée de

$$f(x) = \ln\left|\frac{\sin(x)+1}{\sin(x)-1}\right| \tag{18}$$

Solution:
La fonction $u \rightarrow\mid u \mid$ n'est pas dérivable (en $u=0$) donc elle ne doit pas être insérée dans la chaîne de calculs. On utilise donc l'une des fonctions $\ln\left(\frac{\sin(x)+1}{\sin(x)-1}\right)$ ou $\ln\left(\frac{\sin(x)+1}{1-\sin(x)}\right)$ sans se soucier des domaines de définitions de

ces fonctions. On a la chaîne de calculs

$$\begin{array}{ccccccc} x & \longrightarrow & \sin(x) = u & \longrightarrow & \frac{u+1}{u-1} = v & \longrightarrow & \ln(v) = f(x) \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ & & \cos(x) & & \frac{-2}{(u-1)^2} & & \frac{1}{v} \end{array}$$

donc

$$\begin{aligned} f'(x) &= \cos(x) \times \frac{-2}{(u-1)^2} \times \frac{1}{v} \\ &= \cos(x) \times \frac{-2}{(\sin(x)-1)^2} \times \frac{(\sin(x)-1)}{(\sin(x)+1)} \\ &= \frac{2}{\cos(x)} \end{aligned}$$

Exercice 1.4.19
Calculer la dérivée de

$$f(x) = \ln(\frac{1}{\sqrt{x}} + \sqrt{x}) \tag{19}$$

Solution:
On a la chaîne de calculs

$$\begin{array}{ccccccc} x & \longrightarrow & \sqrt{x} = u & \longrightarrow & \frac{1}{u} + u = v & \longrightarrow & \ln(v) = f(x) \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ & & \frac{1}{2\sqrt{x}} & & 1 - u^{-2} & & \frac{1}{v} \end{array}$$

donc

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{2\sqrt{x}} \times (1 - u^{-2}) \times \frac{1}{v} \\ &= \frac{-1+x}{2\,x\,(1+x)} \end{aligned}$$

Exercice 1.4.20
Calculer la dérivée de

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{\sin(x) + 2\sin(x)^2}} \tag{20}$$

Solution:

On a la chaîne de calculs

$$\begin{array}{ccccccc} x & \longrightarrow & \sin(x) = u & \longrightarrow & u + 2\,u^2 = v & \longrightarrow & \frac{1}{\sqrt{v}} = f(x) \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ & & \cos(x) & & 1 + 4\,u & & \frac{-1}{2\,v^{\frac{3}{2}}} \end{array}$$

donc

$$\begin{aligned} f'(x) &= \quad \cos(x) \quad \times \quad (1 + 4\,u) \quad \times \quad \frac{-1}{2\,v^{\frac{3}{2}}} \\ &= \quad \frac{-\cos(x)\ (1 + 4\,\sin(x))}{2\,[\sin(x)\ (1 + 2\,\sin(x))]^{\frac{3}{2}}} \end{aligned}$$

1.5 Modèles plus lourds

Exercice 1.5.1
Calculer la dérivée de

$$f(x) = \sqrt{\frac{2 + \sqrt{\sin(x)}}{4 + \sqrt{\sin(x)}}} \tag{21}$$

Solution:
On a la chaîne de calculs

$$\begin{array}{ccccccccc} x & \longrightarrow & \sin(x) = u & \longrightarrow & \sqrt{u} = v & \longrightarrow & \frac{2+v}{4+v} = w & \longrightarrow & \sqrt{w} = f(x) \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ & & \cos(x) & & \frac{1}{2\,\sqrt{u}} & & \frac{2}{(4+v)^2} & & \frac{1}{2\,\sqrt{w}} \end{array}$$

donc

$$\begin{aligned} f'(x) &= \quad \cos(x) \quad \times \quad \frac{1}{2\,\sqrt{u}} \quad \times \quad \frac{2}{(4 + v)^2} \quad \times \quad \frac{1}{2\,\sqrt{w}} \\ &= \quad \frac{\cos(x)}{2\,\sqrt{\frac{2+\sqrt{\sin(x)}}{4+\sqrt{\sin(x)}}}\ \left(4 + \sqrt{\sin(x)}\right)^2\ \sqrt{\sin(x)}} \end{aligned}$$

Exercice 1.5.2
Calculer la dérivée de

$$f(x) = \ln(\sin(\frac{1}{1 + x + x^3})) \tag{22}$$

Solution:

On a la chaîne de calculs

$$
\begin{array}{ccccccccc}
x & \longrightarrow & 1+x+x^3 = u & \longrightarrow & \frac{1}{u} = v & \longrightarrow & \sin(v) = w & \longrightarrow & \ln(w) = f(x) \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 & & 1+3\,x^2 & & -\frac{1}{u^2} & & \cos(v) & & \frac{1}{w}
\end{array}
$$

donc

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \quad 1+3\,x^2 \quad \times \quad -\frac{1}{u^2} \quad \times \quad \cos(v) \quad \times \quad \frac{1}{w} \\
&= \frac{-\left(1+3\,x^2\right)\,\cot(\frac{1}{1+x+x^3})}{\left(1+x+x^3\right)^2}
\end{aligned}
$$

Exercice 1.5.3
Soient g_1, g_2, g_3 et g_4 des fonctions dérivables. Calculer la dérivée de

$$f(x) = g_4(g_3(g_2(g_1(x)))) = (g_4 \circ g_3 \circ g_2 \circ g_1)(x) \tag{23}$$

Solution:
On a la chaîne de calculs

$$
\begin{array}{ccccccccc}
x & \longrightarrow & g_1(x) = u & \longrightarrow & g_2(u) = v & \longrightarrow & g_3(v) = w & \longrightarrow & g_4(w) = f(x) \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 & & {g_1}'(x) & & {g_2}'(u) & & {g_3}'(v) & & {g_4}'(w)
\end{array}
$$

donc

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \quad {g_1}'(x) \quad \times \quad {g_2}'(u) \quad \times \quad {g_3}'(v) \quad \times \quad {g_4}'(w) \\
&= {g_1}'(x)\,{g_2}'(g_1(x))\,{g_3}'(g_2(g_1(x)))\,{g_4}'(g_3(g_2(g_1(x)))) \\
&= {g_1}'(x) \cdot {g_2}'(g_1(x)) \cdot {g_3}'(g_2 \circ g_1(x)) \cdot {g_4}'(g_3 \circ g_2 \circ g_1(x))
\end{aligned}
$$

Exercice 1.5.4
Soient g_1 et g_2 deux fonctions dérivables. Calculer la dérivée de

$$f(x) = \ln(g_2(\frac{1}{g_1(x)})) \tag{24}$$

Solution:

On a la chaîne de calculs

$$\begin{array}{ccccccccc} x & \longrightarrow & g_1(x) = u & \longrightarrow & \frac{1}{u} = v & \longrightarrow & g_2(v) = w & \longrightarrow & \ln(w) = f(x) \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ & & {g_1}'(x) & & -u^{-2} & & {g_2}'(v) & & \frac{1}{w} \end{array}$$

donc

$$\begin{aligned} f'(x) = & \quad {g_1}'(x) \quad \times \quad -u^{-2} \quad \times \quad {g_2}'(v) \quad \times \quad \frac{1}{w} \\ = & \quad \frac{-{g_1}'(x)\, {g_2}'(\frac{1}{g_1(x)})}{g_1(x)^2\, g_2(\frac{1}{g_1(x)})} \end{aligned}$$

Exercice 1.5.5

Soient g_1 et g_2 deux fonctions dérivables. Calculer la dérivée de

$$f(x) = g_2(\sin(\sqrt{g_1(x)})) \tag{25}$$

Solution:

On a la chaîne de calculs

$$\begin{array}{ccccccccc} x & \longrightarrow & g_1(x) = u & \longrightarrow & \sqrt{u} = v & \longrightarrow & \sin(v) = w & \longrightarrow & g_2(w) = f(x) \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ & & {g_1}'(x) & & \frac{1}{2\sqrt{u}} & & \cos(v) & & {g_2}'(w) \end{array}$$

donc

$$\begin{aligned} f'(x) = & \quad {g_1}'(x) \quad \times \quad \frac{1}{2\sqrt{u}} \quad \times \quad \cos(v) \quad \times \quad {g_2}'(w) \\ = & \quad \frac{\cos(\sqrt{g_1(x)})\, {g_1}'(x)\, {g_2}'(\sin(\sqrt{g_1(x)}))}{2\sqrt{g_1(x)}} \end{aligned}$$

Exercice 1.5.6

Soient g_1 et g_2 deux fonctions dérivables. Calculer la dérivée de

$$f(x) = g_2(\sin(g_1(x)^2)) \tag{26}$$

Solution:

On a la chaîne de calculs

$$\begin{array}{ccccccccc} x & \longrightarrow & g_1(x) = u & \longrightarrow & u^2 = v & \longrightarrow & \sin(v) = w & \longrightarrow & g_2(w) = f(x) \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ & & {g_1}'(x) & & 2\,u & & \cos(v) & & {g_2}'(w) \end{array}$$

donc

$$\begin{aligned} f'(x) = & \quad {g_1}'(x) \quad \times \quad 2\,u \quad \times \quad \cos(v) \quad \times \quad {g_2}'(w) \\ = & \quad 2\,\cos(g_1(x)^2)\, g_1(x)\, {g_1}'(x)\, {g_2}'(\sin(g_1(x)^2)), \end{aligned}$$

Exercice 1.5.7
Soient g_1 et g_2 deux fonctions dérivables. Calculer la dérivée de

$$f(x) = \sqrt{g_2(\sin(\frac{1}{g_1(x)}))} \tag{27}$$

Solution:
On a la chaîne de calculs

$$\begin{array}{ccccccccccc} x & \longrightarrow & g_1(x) = u & \longrightarrow & \frac{1}{u} = v & \longrightarrow & \sin(v) = w & \longrightarrow & g_2(w) = t & \longrightarrow & \sqrt{z} = f(x) \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ & & {g_1}'(x) & & -u^{-2} & & \cos(v) & & {g_2}'(w) & & \frac{1}{2\sqrt{z}} \end{array}$$

donc

$$\begin{aligned} f'(x) &= {g_1}'(x) \times -u^{-2} \times \cos(v) \times {g_2}'(w) \times \frac{1}{2\sqrt{z}} \\ &= \frac{-\left(\cos(\frac{1}{g_1(x)})\, {g_1}'(x)\, {g_2}'(\sin(\frac{1}{g_1(x)}))\right)}{2\, g_1(x)^2 \sqrt{g_2(\sin(\frac{1}{g_1(x)}))}} \end{aligned}$$

Exercice 1.5.8
Soient g_1 et g_2 deux fonctions dérivables. Calculer la dérivée de

$$f(x) = g_2(\sqrt{e^{-2\sin(g_1(x))}}) \tag{28}$$

Solution:
On a la chaîne de calculs

$$\begin{array}{ccccccccccc} x & \longrightarrow & g_1(x) = u & \longrightarrow & \sin(u) = v & \longrightarrow & e^{-2\,v} = w & \longrightarrow & \sqrt{w} = t & \longrightarrow & g_2(z) = f(x) \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ & & g_1'(x) & & \cos(u) & & -2\,e^{-2\,v} & & \frac{1}{2\sqrt{w}} & & g_2'(z) \end{array}$$

donc

$$\begin{aligned} f'(x) &= g_1'(x) \times \cos(u) \times \frac{-2}{e^{2\,v}} \times \frac{1}{2\sqrt{w}} \times g_2'(z) \\ &= -\,g_1'(x)\, \cos(g_1(x))\, \sqrt{e^{-2\sin(g_1(x))}}\, g_2'(\sqrt{e^{-2\sin(g_1(x))}}) \end{aligned}$$

Exercice 1.5.9
Soient g_1, g_2 et g_3 des fonctions dérivables. Calculer la dérivée de

$$f(x) = g_3\left(\sqrt{g_2(\frac{1}{g_1(x)^4})}\right) \tag{29}$$

Solution:
On a la chaîne de calculs

$$\begin{array}{ccccccccc} x \longrightarrow & g_1(x) = u & \longrightarrow & u^{-4} = v & \longrightarrow & g_2(v) = w & \longrightarrow & \sqrt{w} = t & \longrightarrow & g_3(z) = f(x) \\ & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ & g_1'(x) & & \frac{-4}{u^5} & & g_2'(v) & & \frac{1}{2\sqrt{w}} & & g_3'(z) \end{array}$$

donc

$$\begin{aligned} f'(x) = & \quad g_1'(x) \times \frac{-4}{u^5} \times g_2'(v) \times \frac{1}{2\sqrt{w}} \times g_3'(z) \\ = & \quad -\frac{2\, g_1'(x)\, g_2'(\frac{1}{g_1(x)^4})\, g_3'\left(\sqrt{g_2(\frac{1}{g_1(x)^4})}\right)}{g_1(x)^5\, \sqrt{g_2(\frac{1}{g_1(x)^4})}} \end{aligned}$$

1.6 Autres exemples

Exercice 1.6.1
Soient g_1 et g_2 deux fonctions dérivables. Calculer la dérivée de

$$f(x) = \ln(g_2(\frac{1}{g_1(\sin(x)^2)})) \tag{30}$$

Solution:
On a la chaîne de calculs

$$\begin{array}{ccccccccccc} x \longrightarrow & \sin(x) = u & \longrightarrow & u^2 = v & \longrightarrow & g_1(v) = w & \longrightarrow & \frac{1}{w} = t & \longrightarrow & g_2(z) = r & \longrightarrow & \ln(t) = f(x) \\ & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ & \cos(x) & & 2\,u & & {g_1}'(v) & & -w^{-2} & & {g_2}'(z) & & \frac{1}{t} \end{array}$$

donc

$$\begin{aligned} f'(x) = & \quad \cos(x) \times 2\,u \times {g_1}'(v) \times -w^{-2} \times {g_2}'(z) \times \frac{1}{t} \\ = & \quad \frac{-2\, \cos(x)\, \sin(x)\, {g_1}'(\sin(x)^2)\, {g_2}'(\frac{1}{g_1(\sin(x)^2)})}{g_1(\sin(x)^2)^2\, g_2(\frac{1}{g_1(\sin(x)^2)})} \end{aligned}$$

Exercice 1.6.2
Calculer la dérivée de

$$f(x) = \frac{1}{\sin^4\left(e^{-\frac{1}{g_1(x)^3}}\right)} \tag{31}$$

Solution:
On a la chaîne de calculs

$$\begin{tikzcd} x \arrow[r] & g_1(x) = u \arrow[r] \arrow[d] & u^{-3} = v \arrow[r] \arrow[d] & e^{-v} = w \arrow[r] \arrow[d] & \sin(w) = t \arrow[r] \arrow[d] & t^{-4} = f(x) \arrow[d] \\ & {g_1}'(x) & \frac{-3}{u^4} & -e^{-v} & \cos(w) & \frac{-4}{t^5} \end{tikzcd}$$

donc

$$\begin{aligned} f'(x) = & \quad {g_1}'(x) \quad \times \quad \frac{-3}{u^4} \quad \times \quad -e^{-v} \quad \times \quad \cos(w) \quad \times \quad \frac{-4}{t^5} \\ = & \quad \frac{-12\ g_1'(x)\ \cos(e^{-g_1(x)^{-3}})}{e^{g_1(x)^{-3}}\ g_1(x)^4 \sin(e^{-g_1(x)^{-3}})^5} \end{aligned}$$

1.7 Utilisation de chaînes intermédiaires

Exercice 1.7.1
Calculer la dérivée de

$$f(x) = \frac{1}{\left(\sqrt{1+x^2} + (1+x+x^3)^3\right)^4} \tag{32}$$

Solution:
On pose

$$\begin{aligned} g_1(x) &= \sqrt{1+x^2} \\ g_2(x) &= \left(1+x+x^3\right)^3 \end{aligned}$$

donc

$$f(x) = \frac{1}{(g_1(x) + g_2(x))^4}$$

On a alors la chaîne de calculs

$$\begin{tikzcd} x \arrow[r] & g_1(x) + g_2(x) = u \arrow[r] \arrow[d] & u^{-4} = f(x) \arrow[d] \\ & g_1'(x) + g_2'(x) & \frac{-4}{u^5} \end{tikzcd}$$

donc

$$\begin{aligned} f'(x) = & \quad g_1'(x) + g_2'(x) \quad \times \quad -\frac{4}{u^5} \\ = & \quad \frac{-4\ (g_1'(x) + g_2'(x))}{(g_1(x) + g_2(x))^5} \end{aligned}$$

A l'aide de chaînes de calculs, on obtient

$$\begin{aligned} g_1'(x) &= \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \\ g_2'(x) &= 3\ \left(1+3\,x^2\right)\ \left(1+x+x^3\right)^2 \end{aligned}$$

Finalement

$$f'(x) = \frac{-4\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} + 3\,(1+3\,x^2)\,(1+x+x^3)^2\right)}{\left(\sqrt{1+x^2}+(1+x+x^3)^3\right)^5}$$

Exercice 1.7.2
Calculer la dérivée de

$$f(x) = \sqrt{\sin\left[(1+x^2)\,\cos(x)^3 + \sqrt{\ln(1+x^2)}\right]} \tag{33}$$

Solution:

$$g_1(x) = \sqrt{\ln(1+x^2)}$$
$$g_2(x) = \cos(x)^3$$

donc

$$f(x) = \sqrt{\sin[g_1(x) + (x^2+1)\;g_2(x)]}$$

On a alors la chaîne de calculs

$$\begin{array}{ccccccc} x & \longrightarrow & g_1(x) + \left(x^2+1\right)\,g_2(x) = u & \longrightarrow & \sin u = v & \longrightarrow & \sqrt{v} = f(x) \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ & & g_1'(x) + \left(x^2+1\right)\,g_2'(x) + 2\,x\,g_2(x) & & \cos(u) & & \frac{1}{2\sqrt{v}} \end{array}$$

donc

$$\begin{aligned} f'(x) &= \quad g_1'(x) + \left(x^2+1\right)\,g_2'(x) + 2\,x\,g_2(x) \quad \times \quad \cos(u) \quad \times \quad \frac{1}{2\sqrt{v}} \\ &= \frac{\cos[g_1(x) + \left(1+x^2\right)\,g_2(x)]\,\left(2\,x\,g_2(x) + g_1'(x) + \left(1+x^2\right)\,g_2'(x)\right)}{2\sqrt{\sin[g_1(x)+(1+x^2)\;g_2(x)]}} \end{aligned}$$

A l'aide de chaînes de calculs, on obtient

$$g_1'(x) = \frac{x}{(1+x^2)\,\sqrt{\ln(1+x^2)}}$$
$$g_2'(x) = -3\cos(x)^2\,\sin(x)$$

Finalement

$$f'(x) = \left[-3\,\left(1+x^2\right)\,\cos(x)^2\,\sin(x) + 2\,x\cos(x)^3 + \frac{x}{(1+x^2)\,\sqrt{\ln(1+x^2)}}\right]$$
$$\times \frac{\cos(\left(1+x^2\right)\,\cos(x)^3 + \sqrt{\ln(1+x^2)})}{2\sqrt{\sin\left[(1+x^2)\,\cos(x)^3 + \sqrt{\ln(1+x^2)}\right]}}$$

Exercice 1.7.3
Calculer la dérivée de

$$f(x) = \sqrt{e^{\frac{\sqrt{\ln(1+x^2)}}{\ln(\ln(x))}}\,(1+x)} \tag{34}$$

Solution:
On pose

$$
\begin{aligned}
g_1(x) &= \sqrt{\ln(1+x^2)} \\
g_2(x) &= \ln(\ln(x)) \\
g_3(x) &= g_1(x)/g_2(x) \\
g_4(x) &= e^{g_3(x)}
\end{aligned}
$$

donc

$$f(x) = \sqrt{g_4(x)\ (1+x)}$$

On a alors la chaîne de calculs

$$
\begin{array}{ccccccc}
x & \longrightarrow & g_4(x)\,(1+x) = u & \longrightarrow & e^u = v & \longrightarrow & \sqrt{v} = f(x) \\
 & & \big\downarrow & & \big\downarrow & & \big\downarrow \\
 & & g_4(x) + g_4'(x)\,(1+x) & & e^u & & \frac{1}{2\sqrt{v}}
\end{array}
$$

donc

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \quad (g_4(x) + g_4'(x)\,(1+x)) \quad \times \quad e^u \quad \times \quad \frac{1}{2\sqrt{v}} \\
&= \frac{e^{g_3(x)} + e^{g_3(x)}\ (1+x)\ g_3'(x)}{2\sqrt{e^{g_3(x)}\ (1+x)}} \\
&= e^{g_3(x)}\,\frac{1+\ (1+x)\ g_3'(x)}{2\sqrt{e^{g_3(x)}\ (1+x)}}
\end{aligned}
$$

A l'aide de chaînes de calculs, on obtient

$$
\begin{aligned}
g_1'(x) &= \frac{x}{(1+x^2)\ \sqrt{\ln(1+x^2)}} \\
g_2'(x) &= \frac{1}{x\ \ln(x)} \\
g'3(x) &= \frac{g_1'(x)g_2(x) - g_2'(x)g_1(x)}{g_2(x)^2} = \frac{g_1'(x)}{g_2(x)} - \frac{g_2'(x)g_1(x)}{g_2(x)^2} \\
&= \frac{-\sqrt{\ln(1+x^2)}}{x\ \ln(x)\ln(\ln(x))^2} + \frac{x}{(1+x^2)\ \sqrt{\ln(1+x^2)}\ \ln(\ln(x))}
\end{aligned}
$$

Finalement

$$f'(x) = e^{\frac{\sqrt{\ln(1+x^2)}}{\log(\log(x))}}\,\frac{\left[1+(1+x)\ \left(\frac{x}{(1+x^2)\ \sqrt{\log(1+x^2)}\ \log(\log(x))} - \frac{\sqrt{\log(1+x^2)}}{x\ \log(x)\log(\log(x))^2}\right)\right]}{2\sqrt{e^{\frac{\sqrt{\log(1+x^2)}}{\log(\log(x))}}\ (1+x)}}$$