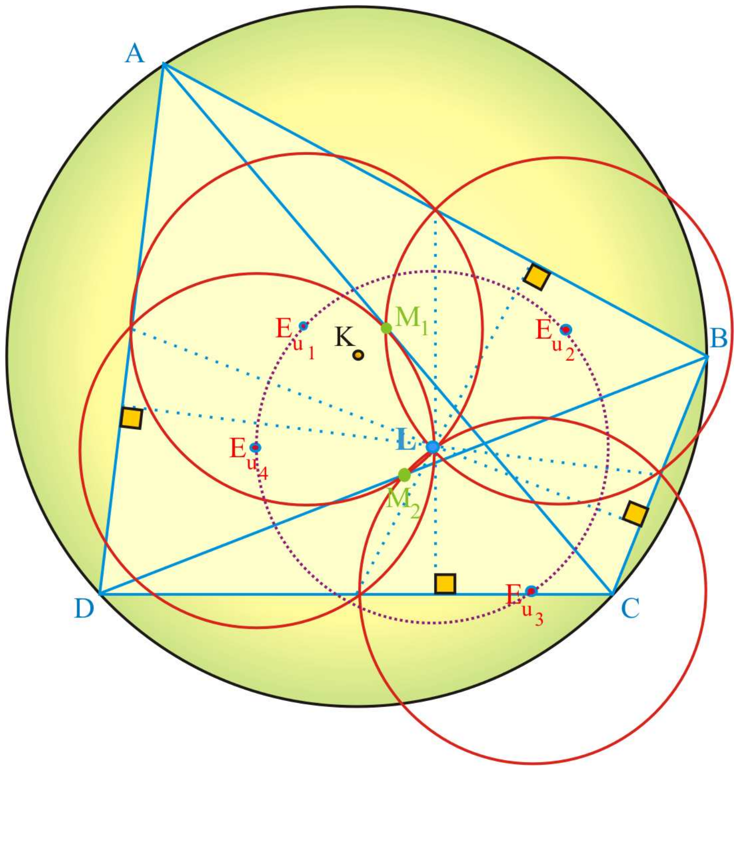
Géométrie des quadrilatères par l'informatique

Résolution automatique par l'informatique des théorèmes de géométrie relatifs aux quadrilatères

Jean-Paul JURZAK



CHAPITRE 1

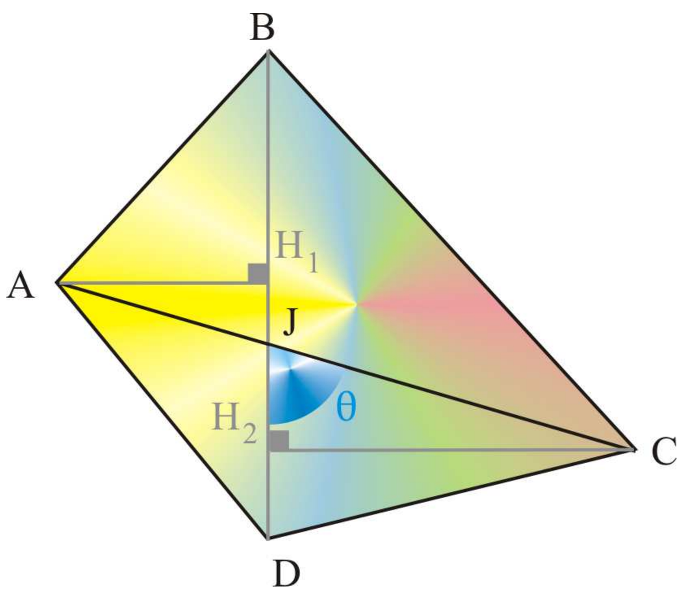
Aire du quadrilatère

1 Aire du quadrilatère

1.1 Formule de l'aire du quadrilatère

Exercice 1.1.1
Soit $ABCD$ un quadrilatère convexe. On a:

$$aire(ABCD) = \frac{1}{4}\sqrt{4\,AC^2\,BD^2 - (AB^2 - BC^2 + CD^2 - DA^2)^2}$$



Solution:
Notre démonstration s'appuie sur la forme

$$\delta(A_1, A_2, \cdots, A_{2p-1}, A_{2p}) = A_1A_2^2 - A_2A_3^2 + \cdots + A_{2p-1}A_{2p}^2 - A_{2p}A_1^2$$

Lorsque $p = 2$, elle s'écrit

$$\delta(A_1, A_2, A_3, A_4) \; = \; A_1A_2^2 - A_2A_3^2 + A_3A_4^2 - A_4A_1^2$$

qui est aussi égal au produit scalaire $(-2)\ \overrightarrow{A_1A_3} \cdot \ \overrightarrow{A_2A_4}$.
Soit J le point d'intersection des diagonales $[AC]$ et $[BD]$: désignons par H_1 (resp. H_2) la projection orthogonale du point A (resp. du point C) sur $[BD]$. On a

$$\begin{aligned}
aire(ABCD) &= aire(ABD) + aire(BCD) \\
&= \frac{1}{2}\, BD \cdot AH_1 + \frac{1}{2}\, BD \cdot CH_2 \\
&= \frac{1}{2}\, BD \cdot (AH_1 + CH_2) \\
&= \frac{1}{2}\, BD \cdot (AJ\, sin(\theta) + JC\, sin(\theta)) \\
&= \frac{1}{2}\, sin(\theta)\, AC \cdot BD
\end{aligned}$$

en désignant par θ l'angle non-orienté orienté entre les droites (AC) et (BD). Or

$$\begin{aligned}
\delta(A, B, C, D) &= AB^2 - BC^2 + CD^2 - DA^2 \\
&= (-2)\ \overrightarrow{AC} \cdot \ \overrightarrow{BD} \\
&= (-2)\, AC \cdot BD \cdot \, cos(\, angle(\, \overrightarrow{AC},\ \overrightarrow{BD})\,) \\
&= (-2)\, AC \cdot BD \cdot \pm\, cos(\theta)
\end{aligned}$$

En résumé,

$$\begin{aligned}
4\, aire(ABCD)^2 &= sin^2(\theta)\, AC^2\, BD^2 \\
\frac{1}{4}\, (AB^2 - BC^2 + CD^2 - DA^2)^2 &= cos^2(\theta)\, AC^2\, BD^2
\end{aligned}$$

En ajoutant membre à membre,

$$4\, aire(ABCD)^2 = \; AC^2\, BD^2 - \frac{1}{4}\, (AB^2 - BC^2 + CD^2 - DA^2)^2$$

donc

$$aire(ABCD) = \frac{1}{4}\, \sqrt{4\, AC^2\, BD^2 - \; (AB^2 - BC^2 + CD^2 - DA^2)^2}$$

On déduit également, en divisant membre à membre,

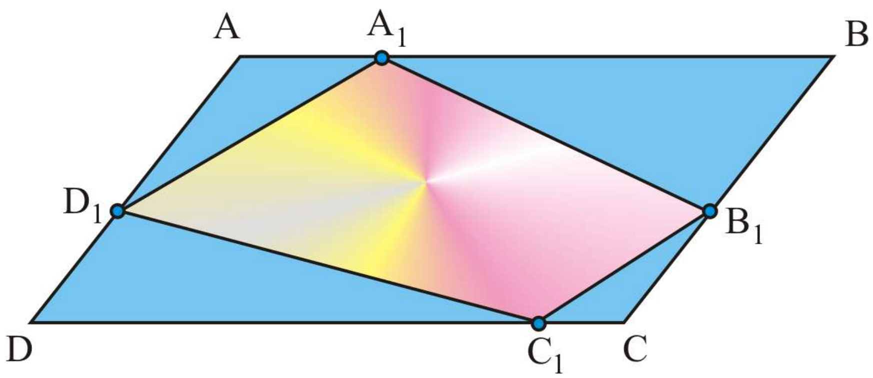
$$tan^2(\theta) = \frac{4\, AC^2\, BD^2}{(AB^2 - BC^2 + CD^2 - DA^2)^2} - 1$$

1.2 Aires de parallélogrammes

Exercice 1.2.1
Soit $ABCD$ un parallélogramme et k_1, k_2, k_3, k_4 des réels. Soient A_1 le barycentre de $\{(A, k_1), (B, 1-k_1)\}$, B_1 le barycentre de $\{(B, k_2), (C, 1-k_2)\}$, C_1 le barycentre de $\{(C, k_3), (D, 1-k_3)\}$, D_1 le barycentre de $\{(D, k_4), (A, 1-k_4)\}$.
Montrer que

$$aire^2(A_1B_1C_1D_1) = \frac{(2 - k_1 - k_2 + k_1\,k_2 - k_3 + k_2\,k_3 - k_4 + k_1\,k_4 + k_3\,k_4)^2}{4}\,aire^2(ABCD)$$

Préciser le cas $k_1 = k_2 = k_3 = k_4 = k$ et le cas où A_1, B_1, C_1 D_1 sont milieux des côtés du parallélogramme.



Solution:
Dessin $= \{A, B, C, D\}$
Le repère barycentrique choisi est A, B, C .
Le point composé est D .
On déduit les coordonnées barycentriques du point composé:

$$D = \{1, -1, 1\}$$

Dessin = Dessin $\cup \{A_1, B_1, C_1, D_1\} = \{A, A_1, B, B_1, C, C_1, D, D_1\}$
Le repère barycentrique choisi est A, B, C .
Les points composés sont A_1, B_1, C_1, D_1 .
Les coordonnées barycentriques des points composés sont:

$$\begin{aligned} A_1 &= \{k_1, 1-k_1, 0\} \\ B_1 &= \{0, k_2, 1-k_2\} \\ C_1 &= \{1-k_3, -1+k_3, 1\} \\ D_1 &= \{1, -k_4, k_4\} \end{aligned}$$

L'aire au carré du quadrilatère $ABCD$ est

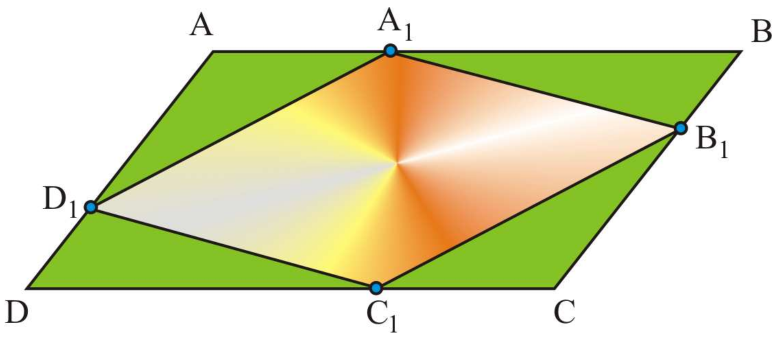
$$aire^2(ABCD) = \frac{(-a+b+c)\;(a+b-c)\;(a-b+c)\;(a+b+c)}{4}$$

L'aire au carré du quadrilatère $A_1B_1C_1D_1$ est

$$aire^2(A_1B_1C_1D_1) = \frac{(-a+b+c)\,(a+b-c)\,(a-b+c)\,(a+b+c)\,(2-k_1-k_2+k_1\,k_2-k_3+k_2\,k_3-k_4+k_1\,k_4+k_3\,k_4)^2}{16}$$

donc

$$aire^2(A_1B_1C_1D_1) = \frac{(2-k_1-k_2+k_1\,k_2-k_3+k_2\,k_3-k_4+k_1\,k_4+k_3\,k_4)^2}{4}\,aire^2(ABCD)$$



Lorsque $k_1 = k_2 = k_3 = k_4 = k$, on obtient

$$aire^2(A_1B_1C_1D_1) = \frac{\left(2-4\,k+4\,k^2\right)^2}{4}\,aire^2(ABCD)$$

Pour $k = \frac{1}{2}$, on obtient

$$aire(A_1B_1C_1D_1) = \frac{1}{2}\,aire(ABCD)$$

Exercice 1.2.2

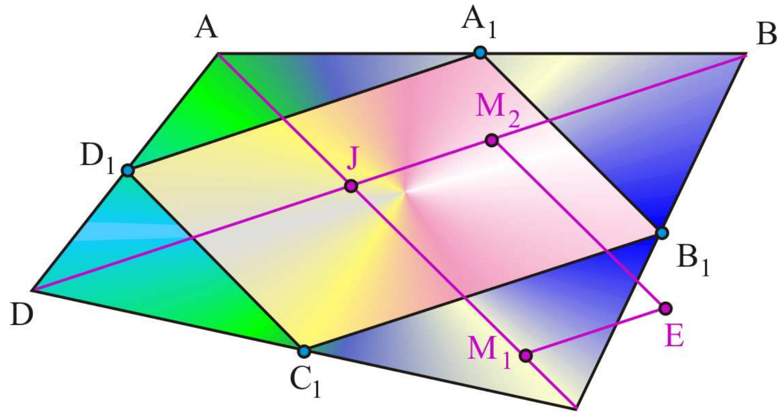
Soient $ABCD$ un quadrilatère quelconque, A_1 (resp. B_1, C_1, D_1) le milieu de $[AB]$ (resp. de $[BC]$, $[CD]$, $[DA]$), J le point d'intersection des diagonales $[AC]$ et $[BD]$. On choisit un point M_1 sur (AC) (M_1 barycentre de $\{(A,k_1),(C,1-k_1)\}$) et un point M_2 sur (BD) (M_2 barycentre de $\{(B,k_2),(D,1-k_2)\}$), k_1, k_2 réels arbitraires. On désigne par E le point d'intersection de la parallèle à (BD) passant par M_1 avec la parallèle à (AC) passant par M_2 (la figure JM_1EM_2 est donc un parallélogramme).

1. *Calculer les aires des quadrilatères D_1AA_1E, A_1BB_1E, B_1CC_1E, C_1DD_1E en fonction des coordonnées barycentriques $\{x, y, 1-x-y\}$ du point D.*

2. *Montrer que, pour tout quadrilatère $ABCD$, ces aires sont égales si et seulement si M_1 et M_2 sont milieux des diagonales du quadrilatère $ABCD$: on a alors*

$$aire(D_1AA_1E) = \frac{1}{4}\,aire(ABCD)$$

L'affirmation d'égalité des aires des quatre quadrilatères lorsque M_1 et M_2 sont milieux des diagonales du quadrilatère $ABCD$ constitue le théorème de Brune.



Solution:
Dessin $= \{A, B, C, D\}$
Le repère barycentrique choisi est A, B, C .
Le point composé est D .
Les coordonnées barycentriques du point composé sont:

$$D = \{x, y, 1 - x - y\}$$

Dessin = Dessin $\cup \{J\} = \{A, B, C, D, J\}$
Détermination du point J :
Soit J le point $(AC) \cap (BD)$. Le point J est composé.
On obtient:

$$J = \{\frac{x}{1 - y}, 0, \frac{-1 + x + y}{-1 + y}\}$$

Dessin = Dessin $\cup \{M_1, M_2\} = \{A, B, C, D, J, M_1, M_2\}$
Le repère barycentrique choisi est A, B, C .
Les points composés sont M_1, M_2 .
Les coordonnées barycentriques des points composés sont:

$$M_1 = \{k_1, 0, 1 - k_1\}$$
$$M_2 = \{(1 - k_2)\, x, k_2 + y - k_2\, y, (-1 + k_2)\, (-1 + x + y)\}$$

Dessin = Dessin $\cup \{E\} = \{A, B, C, D, E, J, M_1, M_2\}$
Le repère barycentrique choisi est A, B, C .
Le point composé est E .
Les coordonnées barycentriques du point composé sont:

$$E = \{\frac{-k_1 + k_2\, x + k_1\, y + x\, y - k_2\, x\, y}{-1 + y}, k_2 + y - k_2\, y,$$
$$\frac{-1 + k_1 + k_2 - k_2\, x + 2\, y - k_1\, y - 2\, k_2\, y - x\, y + k_2\, x\, y - y^2 + k_2\, y^2}{-1 + y}\}$$

Dessin = Dessin $\cup \{A_1, B_1, C_1, D_1\} = \{A, A_1, B, B_1, C, C_1, D, D_1, E, J, M_1, M_2\}$
Le repère barycentrique choisi est A, B, C .
Les points composés sont A_1, B_1, C_1, D_1 .
Les coordonnées barycentriques des points composés sont:

$$\begin{aligned} A_1 &= \{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\} \\ B_1 &= \{0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\} \\ C_1 &= \{\frac{x}{2}, \frac{y}{2}, \frac{2-x-y}{2}\} \\ D_1 &= \{\frac{1+x}{2}, \frac{y}{2}, \frac{1-x-y}{2}\} \end{aligned}$$

L'aire au carré du quadrilatère $ABCD$ a pour valeur:

$$aire^2(ABCD) = \frac{(-a+b+c)\ (a+b-c)\ (a-b+c)\ (a+b+c)\ (-1+y)^2}{16}$$

L'aire au carré du quadrilatère D_1AA_1E a pour valeur:

$$aire^2(D_1AA_1E) = \frac{(-a+b+c)\ (a+b-c)\ (a-b+c)\ (a+b+c)\ (-1+k_1)^2\,(-1+y)^2}{64}$$

L'aire au carré du quadrilatère A_1BB_1E a pour valeur:

$$aire^2(A_1BB_1E) = \frac{(-a+b+c)\ (a+b-c)\ (a-b+c)\ (a+b+c)\ (-1+k_2)^2\,(-1+y)^2}{64}$$

L'aire au carré du quadrilatère B_1CC_1E a pour valeur:

$$aire^2(B_1CC_1E) = \frac{(-a+b+c)\ (a+b-c)\ (a-b+c)\ (a+b+c)\ {k_1}^2\,(-1+y)^2}{64}$$

L'aire au carré du quadrilatère C_1DD_1E a pour valeur:

$$aire^2(C_1DD_1E) = \frac{(a-b+c)\ (a+b-c)\ (-a+b+c)\ (a+b+c)\ {k_2}^2\,(-1+y)^2}{64}$$

On a alors

$$\begin{aligned} &aire^2(D_1AA_1E) - aire^2(A_1BB_1E) \\ &= \frac{(-a+b+c)\ (a+b-c)\ (a-b+c)\ (a+b+c)\ (k_1-k_2)\ (-2+k_1+k_2)\ (-1+y)^2}{64} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &aire^2(D_1AA_1E) - aire^2(B_1CC_1E) \\ &= \frac{(a-b-c)\ (a+b-c)\ (a-b+c)\ (a+b+c)\ (-1+2\,k_1)\ (-1+y)^2}{64} \end{aligned}$$

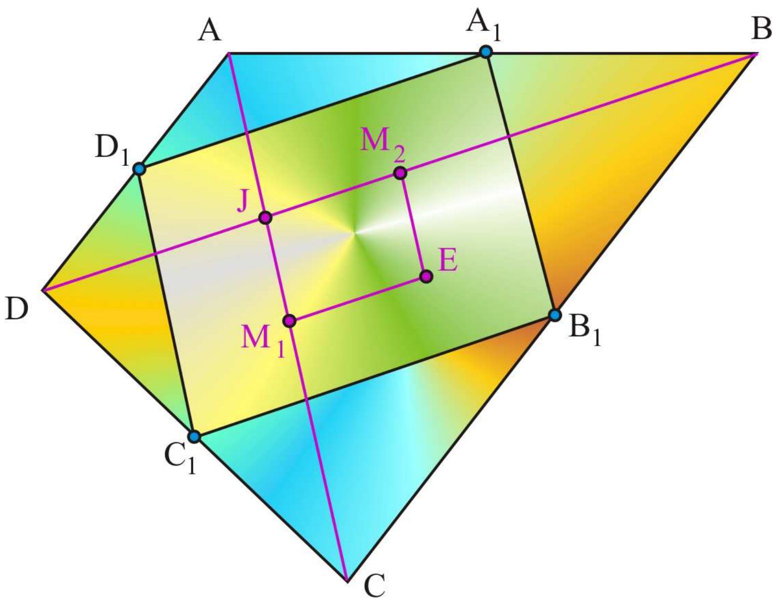
$$\begin{aligned} &aire^2(D_1AA_1E) - aire^2(C_1DD_1E) \\ &= \frac{(-a+b+c)\ (a+b-c)\ (a-b+c)\ (a+b+c)\ (-1+k_1-k_2)\ (-1+k_1+k_2)\ (-1+y)^2}{64} \end{aligned}$$

Ces trois expressions sont nulles pour un quadrilatère quelconque lorsque $k_1 = k_2 = \frac{1}{2}$. Dans ce cas, les quadrilatères D_1AA_1E, A_1BB_1E, B_1CC_1E, C_1DD_1E ont la même aire, de valeur

$$aire^2(D_1AA_1E) = \frac{(a-b+c)\ (a+b-c)\ (-a+b+c)\ (a+b+c)\ (-1+y)^2}{256}$$

Donc

$$aire(D_1AA_1E) = \frac{1}{4}\, aire(ABCD)$$



Exercice 1.2.3
Soit $ABCD$ un quadrilatère convexe quelconque. Montrer qu'il existe un point E tel que les aires des quatre quadrilatères $ABCE$, $BCDE$, $CDAE$, $DABE$ soient égales. Préciser le cas A, B, C, D cocycliques.

Cette propriété semble inconnue.
Solution:
Soient $\{x, y, 1-x-y\}$ les coordonnées barycentriques du point E.
Dessin $= \{A, B, C, D, E\}$
Le repère barycentrique choisi est A, B, C .
Les points composés sont D, E .
Les coordonnées barycentriques des points composés sont:

$$\begin{aligned} D &= \{x_0, y_0, 1-x_0-y_0\} \\ E &= \{x, y, 1-x-y\} \end{aligned}$$

L'aire au carré du quadrilatère $ABCD$ a pour valeur:

$$aire^2(ABCD) = \frac{(-a+b+c)\ (a+b-c)\ (a-b+c)\ (a+b+c)\ (-1+y_0)^2}{16}$$

L'aire au carré du quadrilatère $ABCE$ a pour valeur:

$$aire^2(ABCE) = \frac{(-a+b+c)\ (a+b-c)\ (a-b+c)\ (a+b+c)\ (-1+y)^2}{16}$$

L'aire au carré du quadrilatère $BCDE$ a pour valeur:

$$aire^2(BCDE) = \frac{(-a+b+c)\ (a+b-c)\ (a-b+c)\ (a+b+c)\ (-x-x_0\,y+x\,y_0)^2}{16}$$

L'aire au carré du quadrilatère $CDAE$ a pour valeur:

$$aire^2(CDAE) = \frac{(a-b+c)\ (a+b-c)\ (-a+b+c)\ (a+b+c)\ (y-y_0)^2}{16}$$

L'aire au carré du quadrilatère $DABE$ a pour valeur:

$$aire^2(DABE) = \frac{(-a+b+c)\ (a+b-c)\ (a-b+c)\ (a+b+c)\ (1-x-x_0\,y-y_0+x\,y_0)^2}{16}$$

On a

$$aire^2(ABCE) - aire^2(BCDE) = \frac{(a-b-c)\ (a+b-c)\ (a-b+c)\ (a+b+c)\ (1+x-y+x_0\,y-x\,y_0)\ (-1+x+y+x_0\,y-x\,y_0)}{16}$$

$$aire^2(ABCE) - aire^2(CDAE) = \frac{(-a+b+c)\ (a+b-c)\ (a-b+c)\ (a+b+c)\ (-1+2\,y-y_0)\ (-1+y_0)}{16}$$

$$aire^2(ABCE) - aire^2(DABE) = \frac{(a-b-c)\ (a+b-c)\ (a-b+c)\ (a+b+c)\ (x-y+x_0\,y+y_0-x\,y_0)\ (-2+x+y+x_0\,y+y_0-x\,y_0)}{16}$$

Ces trois expressions doivent être nulles: la résolution des trois équations ainsi obtenues, d'inconnues x, y fournit

$$x = \frac{-1+x_0+y_0+x_0\,y_0}{2\ (-1+y_0)} \qquad y = \frac{1+y_0}{2}$$

Ainsi

$$E = \{\frac{-1+x_0+y_0+x_0\,y_0}{2\ (-1+y_0)}, \frac{1+y_0}{2}, \frac{-x_0+y_0-x_0\,y_0-y_0^2}{2\ (-1+y_0)}\}$$

On a alors

$$aire(ABCE) = \frac{1}{2}\,aire(ABCD)$$

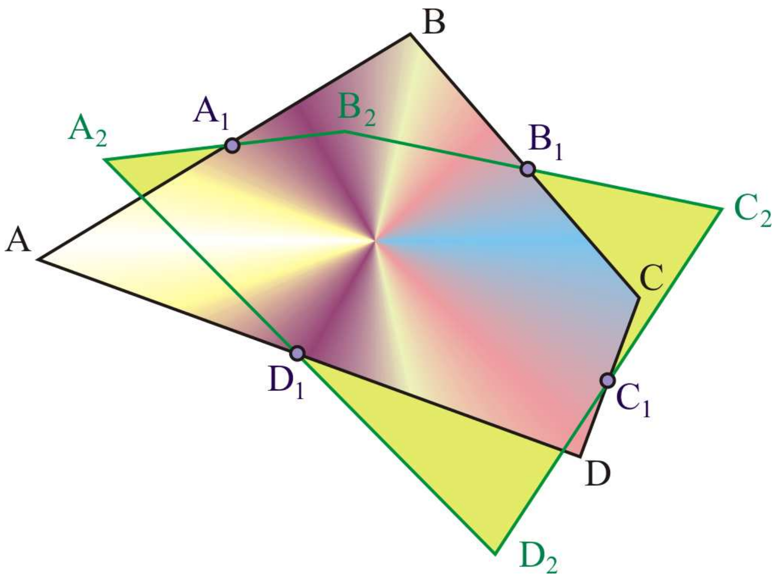
Lorsque D a pour coordonnées barycentriques

$$D = \{\frac{b^2+a^2\,t}{b^2+a^2\,t+b^2\,t-c^2\,t+a^2\,t^2}, \frac{t\ (b^2+a^2\,t)}{b^2+a^2\,t+b^2\,t-c^2\,t+a^2\,t^2}, \frac{-c^2\,t}{b^2+a^2\,t+b^2\,t-c^2\,t+a^2\,t^2}\}$$

on obtient

$$E = \{\frac{-t\left(b^4+b^2c^2+2a^2b^2t+a^2c^2t+b^2c^2t-c^4t+a^4t^2+a^2c^2t^2\right)}{2\left(b^4+2a^2b^2t+b^4t-2b^2c^2t+a^4t^2+2a^2b^2t^2-2a^2c^2t^2-b^2c^2t^2+c^4t^2+a^4t^3-a^2c^2t^3\right)}$$
$$,\frac{b^2+a^2t+2b^2t-c^2t+2a^2t^2}{2\left(b^2+a^2t+b^2t-c^2t+a^2t^2\right)},$$
$$\frac{\left(b^2+a^2t\right)\left(b^2+a^2t+b^2t-c^2t+a^2t^2+c^2t^2\right)}{2\left(b^4+2a^2b^2t+b^4t-2b^2c^2t+a^4t^2+2a^2b^2t^2-2a^2c^2t^2-b^2c^2t^2+c^4t^2+a^4t^3-a^2c^2t^3\right)}\}$$

Exercice 1.2.4
Soient $ABCD$ un quadrilatère convexe quelconque, A_1 (resp. B_1, C_1, D_1) le milieu de $[AB]$ (resp. de $[BC]$, $[CD]$, $[DA]$). Soit $A_2B_2C_2D_2$ un second quadrilatère tel que A_1 (resp. B_1, C_1, D_1) soit le milieu de $[A_2B_2]$ (resp. de $[B_2C_2]$, $[C_2D_2]$, $[D_2A_2]$). Montrer que les quadrilatères $ABCD$ et $A_2B_2C_2D_2$ ont même aire.



Solution:
On choisit arbitrairement le point A_2 et on construit progressivement les points B_2, C_2, D_2 (donc, B_2 symétrique de A_2 par rapport au point A_1,...).
Dessin $= \{A, B, C, D\}$
Le repère barycentrique choisi est A, B, C .
Le point composé est D .
Les coordonnées barycentriques du point composé sont:

$$D = \{x, y, 1-x-y\}$$

Dessin $=$ Dessin $\cup \{A_1, B_1, C_1, D_1\} = \{A, A_1, B, B_1, C, C_1, D, D_1\}$
Le repère barycentrique choisi est A, B, C .

Les points composés sont A_1, B_1, C_1, D_1 .
Les coordonnées barycentriques des points composés sont:

$$A_1 = \{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\}$$
$$B_1 = \{0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\}$$
$$C_1 = \{\frac{x}{2}, \frac{y}{2}, \frac{2-x-y}{2}\}$$
$$D_1 = \{\frac{1+x}{2}, \frac{y}{2}, \frac{1-x-y}{2}\}$$

Dessin $=$ Dessin $\cup \{A_2\} = \{A, A_1, A_2, B, B_1, C, C_1, D, D_1\}$
Le repère barycentrique choisi est A, B, C .
Le point composé est A_2 .
Les coordonnées barycentriques du point composé sont:

$$A_2 = \{x_0, y_0, 1 - x_0 - y_0\}$$

Dessin $=$ Dessin $\cup \{B_2\} = \{A, A_1, A_2, B, B_1, B_2, C, C_1, D, D_1\}$
Le repère barycentrique choisi est A, B, C .
Le point composé est B_2 .
Les coordonnées barycentriques du point composé sont:

$$B_2 = \{1 - x_0, 1 - y_0, -1 + x_0 + y_0\}$$

Dessin $=$ Dessin $\cup \{C_2\} = \{A, A_1, A_2, B, B_1, B_2, C, C_1, C_2, D, D_1\}$
Le repère barycentrique choisi est A, B, C .
Le point composé est C_2 .
Les coordonnées barycentriques du point composé sont:

$$C_2 = \{-1 + x_0, y_0, 2 - x_0 - y_0\}$$

Dessin $=$ Dessin $\cup \{D_2\} = \{A, A_1, A_2, B, B_1, B_2, C, C_1, C_2, D, D_1, D_2\}$
Le repère barycentrique choisi est A, B, C .
Le point composé est D_2 .
Les coordonnées barycentriques du point composé sont:

$$D_2 = \{1 + x - x_0, y - y_0, -x + x_0 - y + y_0\}$$

Dessin $=$ Dessin $\cup \{M\} = \{A, A_1, A_2, B, B_1, B_2, C, C_1, C_2, D, D_1, D_2, M\}$
Le repère barycentrique choisi est A, B, C .
Le point composé est M, symétrique du point D_2 par rapport au point D_1.
Les coordonnées barycentriques du point composé sont:

$$M = \{x_0, y_0, 1 - x_0 - y_0\}$$

Ainsi, $M = A_2$.
L'aire au carré du quadrilatère $ABCD$ a pour valeur:

$$aire^2(ABCD) = \frac{(-a+b+c)\ (a+b-c)\ (a-b+c)\ (a+b+c)\ (-1+y)^2}{16}$$

L'aire au carré du quadrilatère $A_2B_2C_2D_2$ a pour valeur:

$$aire^2(A_2B_2C_2D_2) = \frac{(-a+b+c)\ (a+b-c)\ (a-b+c)\ (a+b+c)\ (-1+y)^2}{16}$$

CHAPITRE

2

Quadrilatère inscrit dans un cercle

2 Quadrilatère inscrit dans un cercle

2.1 Définition de l'anti-centre

Exercice 2.1.1
Dans un quadrilatère $ABCD$ inscrit dans un cercle de centre K, montrer que les M-hauteurs sont concourantes en un unique point L, appelé anti-centre du quadrilatère, dont on calculera les coordonnées barycentriques.

Dans un quadrilatère $ABCD$, la droite passant par le milieu d'un côté et perpendiculaire au côté opposé est appelée M-hauteur (en anglais "Maltitude").
Nous adoptons dorénavant les notations suivantes:

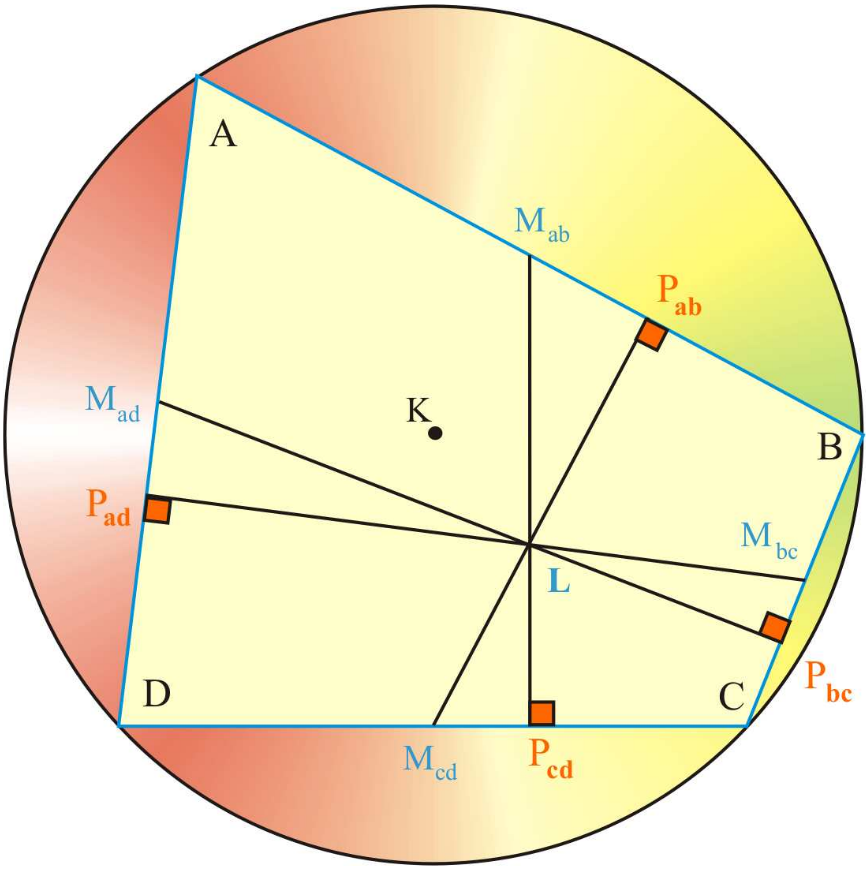
le milieu du segment $[AB]$ est le point M_{ab}
le milieu du segment $[BC]$ est le point M_{bc}
le milieu du segment $[CD]$ est le point M_{cd}
le milieu du segment $[DA]$ est le point M_{ad}
le centre du cercle circonscrit au quadrilatère est le point K

Solution:
Dessin $= \{A, B, C, D, K\}$
Le repère barycentrique choisi est A, B, C .
Les points composés sont D, K .
On déduit les coordonnées barycentriques des points composés:

$$K = \{\frac{a^2\,\left(a^2-b^2-c^2\right)}{(a-b-c)\,(a+b-c)\,(a-b+c)\,(a+b+c)}, \frac{b^2\,\left(-a^2+b^2-c^2\right)}{(-a+b-c)\,(a+b-c)\,(-a+b+c)\,(a+b+c)}, \frac{c^2\,\left(a^2+b^2-c^2\right)}{(-a+b+c)\,(a+b-c)\,(a-b+c)\,(a+b+c)}\}$$

$$D = \{\frac{b^2+a^2\,t}{b^2+a^2\,t+b^2\,t-c^2\,t+a^2\,t^2}, \frac{t\,\left(b^2+a^2\,t\right)}{b^2+a^2\,t+b^2\,t-c^2\,t+a^2\,t^2}, \frac{-c^2\,t}{b^2+a^2\,t+b^2\,t-c^2\,t+a^2\,t^2}\}$$

(t paramètre)



Dessin = Dessin $\cup \{M_{ab}, M_{ad}, M_{bc}, M_{cd}\} = \{A, B, C, D, K, M_{ab}, M_{ad}, M_{bc}, M_{cd}\}$
Le repère barycentrique choisi est A, B, C .
Les points composés sont $M_{ab}, M_{bc}, M_{cd}, M_{ad}$.
On déduit les coordonnées barycentriques des points composés:

$$M_{ab} = \{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\}$$

$$M_{bc} = \{0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\}$$

$$M_{cd} = \{\frac{b^2 + a^2\,t}{2\,(b^2 + a^2\,t + b^2\,t - c^2\,t + a^2\,t^2)}, \frac{t\,(b^2 + a^2\,t)}{2\,(b^2 + a^2\,t + b^2\,t - c^2\,t + a^2\,t^2)}, \frac{b^2 + a^2\,t + b^2\,t - 2\,c^2\,t + a^2\,t^2}{2\,(b^2 + a^2\,t + b^2\,t - c^2\,t + a^2\,t^2)}\}$$

$$M_{ad} = \{\frac{2\,b^2 + 2\,a^2\,t + b^2\,t - c^2\,t + a^2\,t^2}{2\,(b^2 + a^2\,t + b^2\,t - c^2\,t + a^2\,t^2)}, \frac{t\,(b^2 + a^2\,t)}{2\,(b^2 + a^2\,t + b^2\,t - c^2\,t + a^2\,t^2)}, \frac{-c^2\,t}{2\,(b^2 + a^2\,t + b^2\,t - c^2\,t + a^2\,t^2)}\}$$

Dessin = Dessin $\cup \{P_{ab}, P_{ad}, P_{bc}, P_{cd}\} = \{A, B, C, D, K, M_{ab}, M_{ad}, M_{bc}, M_{cd}, P_{ab}, P_{ad}, P_{bc}, P_{cd}\}$
Le repère barycentrique choisi est A, B, C .
Les points composés sont $P_{ab}, P_{bc}, P_{cd}, P_{ad}$.

La projection du point M_{ab} sur la droite (CD) est le point P_{cd} de coordonnées barycentriques

$$P_{cd} = \{\frac{a^2+3\,b^2-c^2+3\,a^2\,t+b^2\,t-c^2\,t}{4\,(b^2+a^2\,t+b^2\,t-c^2\,t+a^2\,t^2)}, \frac{t\,\left(a^2+3\,b^2-c^2+3\,a^2\,t+b^2\,t-c^2\,t\right)}{4\,(b^2+a^2\,t+b^2\,t-c^2\,t+a^2\,t^2)}, \frac{(1-t)\,\left(-a^2+b^2+c^2-a^2\,t+b^2\,t-c^2\,t\right)}{4\,(b^2+a^2\,t+b^2\,t-c^2\,t+a^2\,t^2)}\}$$

La projection du point M_{bc} sur la droite (AD) est le point P_{ad} de coordonnées barycentriques

$$P_{ad} = \{\frac{\left(b^2+c^2+a^2\,t\right)\,\left(a^2\,b^2-b^4+a^2\,c^2+2\,b^2\,c^2-c^4+a^4\,t-a^2\,b^2\,t+a^2\,c^2\,t\right)}{4\,a^2\,c^2\,(b^2+a^2\,t+b^2\,t-c^2\,t+a^2\,t^2)}, \frac{-\left(b^2+a^2\,t\right)\,\left(a^2\,b^2-b^4-a^2\,c^2+c^4+a^4\,t-a^2\,b^2\,t-3\,a^2\,c^2\,t\right)}{4\,a^2\,c^2\,(b^2+a^2\,t+b^2\,t-c^2\,t+a^2\,t^2)}, \frac{a^2\,b^2-b^4-a^2\,c^2+c^4+a^4\,t-a^2\,b^2\,t-3\,a^2\,c^2\,t}{4\,a^2\,(b^2+a^2\,t+b^2\,t-c^2\,t+a^2\,t^2)}\}$$

La projection du point M_{cd} sur la droite (AB) est le point P_{ab} de coordonnées barycentriques

$$P_{ab} = \{\frac{-a^2\,b^2+b^4-3\,b^2\,c^2-a^4\,t+b^4\,t-a^2\,c^2\,t-3\,b^2\,c^2\,t+2\,c^4\,t-a^4\,t^2+a^2\,b^2\,t^2-a^2\,c^2\,t^2}{4\,c^2\,(-b^2-a^2\,t-b^2\,t+c^2\,t-a^2\,t^2)}, \frac{a^2\,b^2-b^4-b^2\,c^2+a^4\,t-b^4\,t-3\,a^2\,c^2\,t-b^2\,c^2\,t+2\,c^4\,t+a^4\,t^2-a^2\,b^2\,t^2-3\,a^2\,c^2\,t^2}{4\,c^2\,(-b^2-a^2\,t-b^2\,t+c^2\,t-a^2\,t^2)}, 0\}$$

La projection du point M_{ad} sur la droite (BC) est le point P_{bc} de coordonnées barycentriques

$$P_{bc} = \{0, \frac{2\,a^2\,b^2+2\,b^4-2\,b^2\,c^2+2\,a^4\,t+5\,a^2\,b^2\,t+b^4\,t-3\,a^2\,c^2\,t-2\,b^2\,c^2\,t+c^4\,t+3\,a^4\,t^2+a^2\,b^2\,t^2-a^2\,c^2\,t^2}{4\,a^2\,(b^2+a^2\,t+b^2\,t-c^2\,t+a^2\,t^2)}, \frac{2\,a^2\,b^2-2\,b^4+2\,b^2\,c^2+2\,a^4\,t-a^2\,b^2\,t-b^4\,t-a^2\,c^2\,t+2\,b^2\,c^2\,t-c^4\,t+a^4\,t^2-a^2\,b^2\,t^2+a^2\,c^2\,t^2}{4\,a^2\,(b^2+a^2\,t+b^2\,t-c^2\,t+a^2\,t^2)}\}$$

Dessin $=$ Dessin $\cup \{L\} = \{A, B, C, D, K, L, M_{ab}, M_{ad}, M_{bc}, M_{cd}, P_{ab}, P_{ad}, P_{bc}, P_{cd}\}$
Détermination du point L :
Soit L le point $(M_{ab}P_{cd}) \cap (M_{bc}P_{ad})$. Le point L est composé.
Comme $L \in (M_{ab}P_{cd})$, on a, en choisissant l'inconnue ν_1

$$\overrightarrow{OL} = \nu_1\,\overrightarrow{OM_{ab}} + (1-\nu_1)\,\overrightarrow{OP_{cd}}$$

On déduit:

$$\overrightarrow{OL} = a(1)\,\overrightarrow{OA} + a(2)\,\overrightarrow{OB} + a(3)\,\overrightarrow{OC}$$

avec

$$a(1) = \frac{a^2+3\,b^2-c^2-a^2\,\nu_1-b^2\,\nu_1+c^2\,\nu_1+3\,a^2\,t+b^2\,t-c^2\,t-a^2\,\nu_1\,t+b^2\,\nu_1\,t-c^2\,\nu_1\,t+2\,a^2\,\nu_1\,t^2}{4\,(b^2+a^2\,t+b^2\,t-c^2\,t+a^2\,t^2)}$$

$$a(2) = \frac{a(2)^*}{4\,(b^2+a^2\,t+b^2\,t-c^2\,t+a^2\,t^2)}$$

$$a(3) = \frac{(-1+\nu_1)\ (-1+t)\ \left(-a^2+b^2+c^2-a^2\,t+b^2\,t-c^2\,t\right)}{4\ (b^2+a^2\,t+b^2\,t-c^2\,t+a^2\,t^2)}$$

avec

$$a(2)^* = 2\,b^2\,\nu_1+a^2\,t+3\,b^2\,t-c^2\,t+a^2\,\nu_1\,t-b^2\,\nu_1\,t-c^2\,\nu_1\,t+3\,a^2\,t^2+b^2\,t^2-c^2\,t^2 \\ -a^2\,\nu_1\,t^2-b^2\,\nu_1\,t^2+c^2\,\nu_1\,t^2$$

Comme $L \in (M_{bc}P_{ad})$, on a, en choisissant l'inconnue μ_1

$$\overrightarrow{OL} = \mu_1\ \overrightarrow{OM_{bc}} + (1-\mu_1)\ \overrightarrow{OP_{ad}}$$

On déduit:

$$\overrightarrow{OL} = b(1)\ \overrightarrow{OA} + b(2)\ \overrightarrow{OB} + b(3)\ \overrightarrow{OC}$$

avec

$$b(1) = \frac{(1-\mu_1)\ \left(b^2+c^2+a^2\,t\right)\ \left(a^2\,b^2-b^4+a^2\,c^2+2\,b^2\,c^2-c^4+a^4\,t-a^2\,b^2\,t+a^2\,c^2\,t\right)}{4\,a^2\,c^2\ (b^2+a^2\,t+b^2\,t-c^2\,t+a^2\,t^2)}$$

$$b(2) = \frac{b(2)^*}{4\,a^2\,c^2\ (b^2+a^2\,t+b^2\,t-c^2\,t+a^2\,t^2)}$$

$$b(3) = \frac{b(3)^*}{4\,a^2\ (b^2+a^2\,t+b^2\,t-c^2\,t+a^2\,t^2)}$$

avec

$$b(2)^* = -a^2\,b^4+b^6+a^2\,b^2\,c^2-b^2\,c^4+a^2\,b^4\,\mu_1-b^6\,\mu_1+a^2\,b^2\,c^2\,\mu_1+b^2\,c^4\,\mu_1-2\,a^4\,b^2\,t+2\,a^2\,b^4\,t \\ +a^4\,c^2\,t+3\,a^2\,b^2\,c^2\,t-a^2\,c^4\,t+2\,a^4\,b^2\,\mu_1\,t-2\,a^2\,b^4\,\mu_1\,t+a^4\,c^2\,\mu_1\,t-a^2\,b^2\,c^2\,\mu_1\,t-a^2\,c^4\,\mu_1\,t \\ -a^6\,t^2+a^4\,b^2\,t^2+3\,a^4\,c^2\,t^2+a^6\,\mu_1\,t^2-a^4\,b^2\,\mu_1\,t^2-a^4\,c^2\,\mu_1\,t^2$$

et

$$b(3)^* = a^2\,b^2-b^4-a^2\,c^2+c^4+a^2\,b^2\,\mu_1+b^4\,\mu_1+a^2\,c^2\,\mu_1-c^4\,\mu_1+a^4\,t-a^2\,b^2\,t-3\,a^2\,c^2\,t \\ +a^4\,\mu_1\,t+3\,a^2\,b^2\,\mu_1\,t+a^2\,c^2\,\mu_1\,t+2\,a^4\,\mu_1\,t^2$$

La résolution du système linéaire d'inconnues ν_1, μ_1 donne

$$\nu_1 = \frac{\left(a^2+b^2-c^2\right)\ \left(a^2-b^2-c^2+a^2\,t-b^2\,t+c^2\,t\right)}{(-a+b+c)\ (a+b-c)\ (a-b+c)\ (a+b+c)\ (-1+t)}$$

$$\mu_1 = \frac{\left(-a^2+b^2+c^2\right)\ \left(a^2\,b^2-b^4+a^2\,c^2+2\,b^2\,c^2-c^4+a^4\,t-a^2\,b^2\,t+a^2\,c^2\,t\right)}{(-a+b+c)\ (a+b-c)\ (a-b+c)\ (a+b+c)\ (b^2+c^2+a^2\,t)}$$

On déduit que:

$$L\ =\ \{\frac{\left(2\,b^2+a^2\,t+b^2\,t-c^2\,t\right)\ \left(a^2\,b^2-b^4+a^2\,c^2+2\,b^2\,c^2-c^4+a^4\,t-a^2\,b^2\,t+a^2\,c^2\,t\right)}{2\ (-a+b+c)\ (a+b-c)\ (a-b+c)\ (a+b+c)\ (b^2+a^2\,t+b^2\,t-c^2\,t+a^2\,t^2)}, \\ \frac{\left(a^2+b^2-c^2+2\,a^2\,t\right)\ \left(a^2\,b^2-b^4-b^2\,c^2+a^4\,t-a^2\,b^2\,t-2\,a^2\,c^2\,t-b^2\,c^2\,t+c^4\,t\right)}{2\ (a-b-c)\ (a+b-c)\ (a-b+c)\ (a+b+c)\ (b^2+a^2\,t+b^2\,t-c^2\,t+a^2\,t^2)}, \\ \frac{\left(a^2-b^2-c^2+a^2\,t-b^2\,t+c^2\,t\right)\ \left(a^2\,b^2-b^4+b^2\,c^2+a^4\,t-a^2\,b^2\,t-a^2\,c^2\,t\right)}{2\ (a-b-c)\ (a+b-c)\ (a-b+c)\ (a+b+c)\ (b^2+a^2\,t+b^2\,t-c^2\,t+a^2\,t^2)}\}$$

Dessin = Dessin $\cup \{L_1\} = \{A, B, C, D, K, L, L_1, M_{ab}, M_{ad}, M_{bc}, M_{cd}, P_{ab}, P_{ad}, P_{bc}, P_{cd}\}$
Détermination du point L_1 :
Soit L_1 le point $(M_{ad}P_{bc}) \cap (M_{cd}P_{ab})$. Le point L_1 est composé.
Comme $L_1 \in (M_{ad}P_{bc})$, on a, en choisissant l'inconnue ν_1

$$\overrightarrow{OL_1} = \nu_1 \; \overrightarrow{OM_{ad}} + (1-\nu_1) \; \overrightarrow{OP_{bc}}$$

On déduit:

$$\overrightarrow{OL_1} = c(1) \; \overrightarrow{OA} + c(2) \; \overrightarrow{OB} + c(3) \; \overrightarrow{OC}$$

avec

$$c(1) = \frac{\nu_1 \left(2\, b^2 + 2\, a^2\, t + b^2\, t - c^2\, t + a^2\, t^2\right)}{2\; (b^2 + a^2\, t + b^2\, t - c^2\, t + a^2\, t^2)}$$

$$c(2) = \frac{c(2)^*}{4\, a^2\; (b^2 + a^2\, t + b^2\, t - c^2\, t + a^2\, t^2)}$$

$$c(3) = \frac{c(3)^*}{4\, a^2\; (b^2 + a^2\, t + b^2\, t - c^2\, t + a^2\, t^2)}$$

avec

$$\begin{aligned} c(2)^* = {} & 2\, a^2\, b^2 + 2\, b^4 - 2\, b^2\, c^2 - 2\, a^2\, b^2\, \nu_1 - 2\, b^4\, \nu_1 + 2\, b^2\, c^2\, \nu_1 + 2\, a^4\, t + 5\, a^2\, b^2\, t + b^4\, t - 3\, a^2\, c^2\, t \\ & - 2\, b^2\, c^2\, t + c^4\, t - 2\, a^4\, \nu_1\, t - 3\, a^2\, b^2\, \nu_1\, t - b^4\, \nu_1\, t + 3\, a^2\, c^2\, \nu_1\, t + 2\, b^2\, c^2\, \nu_1\, t - c^4\, \nu_1\, t \\ & + 3\, a^4\, t^2 + a^2\, b^2\, t^2 - a^2\, c^2\, t^2 - a^4\, \nu_1\, t^2 - a^2\, b^2\, \nu_1\, t^2 + a^2\, c^2\, \nu_1\, t^2 \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} c(3)^* = {} & 2\, a^2\, b^2 - 2\, b^4 + 2\, b^2\, c^2 - 2\, a^2\, b^2\, \nu_1 + 2\, b^4\, \nu_1 - 2\, b^2\, c^2\, \nu_1 + 2\, a^4\, t - a^2\, b^2\, t - b^4\, t - a^2\, c^2\, t + 2\, b^2\, c^2\, t \\ & - c^4\, t - 2\, a^4\, \nu_1\, t + a^2\, b^2\, \nu_1\, t + b^4\, \nu_1\, t - a^2\, c^2\, \nu_1\, t - 2\, b^2\, c^2\, \nu_1\, t + c^4\, \nu_1\, t + a^4\, t^2 - a^2\, b^2\, t^2 + a^2\, c^2\, t^2 \\ & - a^4\, \nu_1\, t^2 + a^2\, b^2\, \nu_1\, t^2 - a^2\, c^2\, \nu_1\, t^2 \end{aligned}$$

Comme $L_1 \in (M_{cd}P_{ab})$, on a, en choisissant l'inconnue μ_1

$$\overrightarrow{OL_1} = \mu_1 \; \overrightarrow{OM_{cd}} + (1-\mu_1) \; \overrightarrow{OP_{ab}}$$

On déduit:

$$\overrightarrow{OL_1} = d(1) \; \overrightarrow{OA} + d(2) \; \overrightarrow{OB} + d(3) \; \overrightarrow{OC}$$

avec

$$d(1) = \frac{d(1)^*}{4\, c^2\; (-b^2 - a^2\, t - b^2\, t + c^2\, t - a^2\, t^2)}$$

$$d(2) = \frac{d(2)^*}{4\, c^2\; (-b^2 - a^2\, t - b^2\, t + c^2\, t - a^2\, t^2)}$$

$$d(3) = \frac{\mu_1 \left(b^2 + a^2\, t + b^2\, t - 2\, c^2\, t + a^2\, t^2\right)}{2\; (b^2 + a^2\, t + b^2\, t - c^2\, t + a^2\, t^2)}$$

avec

$$\begin{aligned} d(1)^* &= -a^2\,b^2 + b^4 - 3\,b^2\,c^2 + a^2\,b^2\,\mu_1 - b^4\,\mu_1 + b^2\,c^2\,\mu_1 - a^4\,t + b^4\,t - a^2\,c^2\,t - 3\,b^2\,c^2\,t + 2\,c^4\,t \\ &+ a^4\,\mu_1\,t - b^4\,\mu_1\,t - a^2\,c^2\,\mu_1\,t + 3\,b^2\,c^2\,\mu_1\,t - 2\,c^4\,\mu_1\,t - a^4\,t^2 + a^2\,b^2\,t^2 - a^2\,c^2\,t^2 + a^4\,\mu_1\,t^2 \\ &- a^2\,b^2\,\mu_1\,t^2 + a^2\,c^2\,\mu_1\,t^2 \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} d(2)^* &= a^2\,b^2 - b^4 - b^2\,c^2 - a^2\,b^2\,\mu_1 + b^4\,\mu_1 + b^2\,c^2\,\mu_1 + a^4\,t - b^4\,t - 3\,a^2\,c^2\,t - b^2\,c^2\,t + 2\,c^4\,t \\ &- a^4\,\mu_1\,t + b^4\,\mu_1\,t + 3\,a^2\,c^2\,\mu_1\,t - b^2\,c^2\,\mu_1\,t - 2\,c^4\,\mu_1\,t + a^4\,t^2 - a^2\,b^2\,t^2 - 3\,a^2\,c^2\,t^2 \\ &- a^4\,\mu_1\,t^2 + a^2\,b^2\,\mu_1\,t^2 + a^2\,c^2\,\mu_1\,t^2 \end{aligned}$$

La résolution du système linéaire d'inconnues ν_1, μ_1 donne

$$\nu_1 = \frac{\left(2\,b^2 + a^2\,t + b^2\,t - c^2\,t\right)\,\left(a^2\,b^2 - b^4 + a^2\,c^2 + 2\,b^2\,c^2 - c^4 + a^4\,t - a^2\,b^2\,t + a^2\,c^2\,t\right)}{(-a+b+c)\,(a+b-c)\,(a-b+c)\,(a+b+c)\,(2\,b^2 + 2\,a^2\,t + b^2\,t - c^2\,t + a^2\,t^2)}$$

$$\mu_1 = \frac{\left(a^2 - b^2 - c^2 + a^2\,t - b^2\,t + c^2\,t\right)\,\left(a^2\,b^2 - b^4 + b^2\,c^2 + a^4\,t - a^2\,b^2\,t - a^2\,c^2\,t\right)}{(a-b-c)\,(a+b-c)\,(a-b+c)\,(a+b+c)\,(b^2 + a^2\,t + b^2\,t - 2\,c^2\,t + a^2\,t^2)}$$

On déduit que:

$$\begin{aligned} L_1 = \{ & \frac{\left(2\,b^2 + a^2\,t + b^2\,t - c^2\,t\right)\,\left(a^2\,b^2 - b^4 + a^2\,c^2 + 2\,b^2\,c^2 - c^4 + a^4\,t - a^2\,b^2\,t + a^2\,c^2\,t\right)}{2\,(-a+b+c)\,(a+b-c)\,(a-b+c)\,(a+b+c)\,(b^2 + a^2\,t + b^2\,t - c^2\,t + a^2\,t^2)}, \\ & \frac{\left(a^2 + b^2 - c^2 + 2\,a^2\,t\right)\,\left(a^2\,b^2 - b^4 - b^2\,c^2 + a^4\,t - a^2\,b^2\,t - 2\,a^2\,c^2\,t - b^2\,c^2\,t + c^4\,t\right)}{2\,(a-b-c)\,(a+b-c)\,(a-b+c)\,(a+b+c)\,(b^2 + a^2\,t + b^2\,t - c^2\,t + a^2\,t^2)}, \\ & \frac{\left(a^2 - b^2 - c^2 + a^2\,t - b^2\,t + c^2\,t\right)\,\left(a^2\,b^2 - b^4 + b^2\,c^2 + a^4\,t - a^2\,b^2\,t - a^2\,c^2\,t\right)}{2\,(a-b-c)\,(a+b-c)\,(a-b+c)\,(a+b+c)\,(b^2 + a^2\,t + b^2\,t - c^2\,t + a^2\,t^2)} \} \end{aligned}$$

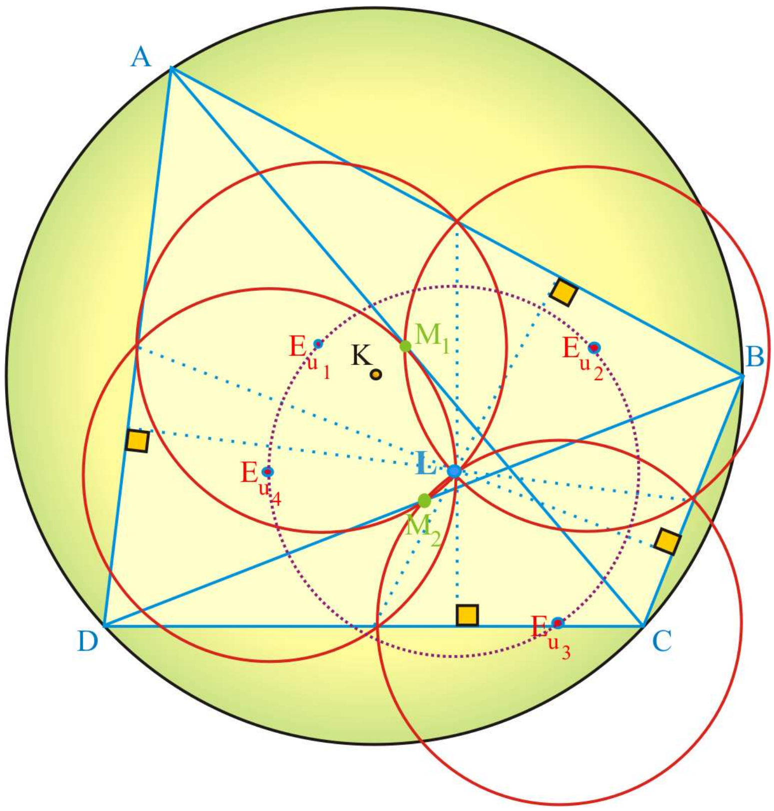
Donc $L = L_1 \in (M_{ad}P_{bc}) \cap (M_{cd}P_{ab}) \cap (M_{ab}P_{cd}) \cap (M_{bc}P_{ad})$.

2.2 Les quatre cercles d'Euler du quadrilatère inscrit

Exercice 2.2.1

Les deux diagonales $[AC]$ et $[BD]$ d'un quadrilatère $ABCD$ inscrit dans un cercle définissent quatre triangles obtenus en faisant choix de trois sommets du quadrilatère.

1. *Déterminer le cercle d'Euler de chacun de ces quatre triangles. Préciser les centres (notés $E_{u_1}, E_{u_2}, E_{u_3}, E_{u_4}$) des cercles d'Euler et montrer que les rayons de ces quatre cercles sont égaux.*
2. *Montrer que l'anticentre L du quadrilatère appartient à chacun de ces cercles d'Euler.*
3. *Montrer que les points E_{u_1}, E_{u_2}, E_{u_3}, E_{u_4} sont sur un même cercle dont le rayon est aussi égal au rayon des cercles d'Euler et dont le centre est l'anticentre du quadrilatère $ABCD$.*
4. *Montrer que les quatre droites obtenues en joignant chaque sommet du quadrilatère $ABCD$ au centre du cercle d'Euler formé par les trois autres sommets, sont concourantes en un même point dont on précisera les coordonnées barycentriques.*



Solution:
Le cercle d'Euler d'un triangle est le cercle passant par les milieux des 3 côtés du triangle.
Dessin $=\{A, B, C, D, K, L, M_{ab}, M_{ad}, M_{bc}, M_{cd}\}$
Le repère barycentrique choisi est A, B, C .
Les points composés sont $D, K, L, M_{ab}, M_{bc}, M_{cd}, M_{ad}$.
Les coordonnées barycentriques des points composés sont décrites dans 2.1.1.
Dessin $=$ Dessin $\cup \{M_1, M_2\} = \{A, B, C, D, K, L, M_1, M_2, M_{ab}, M_{ad}, M_{bc}, M_{cd}\}$
Soit M_1 le milieu de $[AC]$ et M_2 le milieu de $[BD]$.
Le repère barycentrique choisi est A, B, C .
Les points composés sont M_1, M_2 .
On déduit les coordonnées barycentriques des points composés:

$$M_1 = \{\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}\}$$

$$M_2 = \{\frac{b^2 + a^2\,t}{2\,(b^2 + a^2\,t + b^2\,t - c^2\,t + a^2\,t^2)}, \frac{b^2 + a^2\,t + 2\,b^2\,t - c^2\,t + 2\,a^2\,t^2}{2\,(b^2 + a^2\,t + b^2\,t - c^2\,t + a^2\,t^2)}, \frac{c^2\,t}{2\,(-b^2 - a^2\,t - b^2\,t + c^2\,t - a^2\,t^2\,)}\}$$

Cercle d'Euler du triangle ABD
Equation du cercle passant par les points M_{ab}, M_2, M_{ad}:

$$- c^2\, t\, \left(a^2 + b^2 - c^2 + 2\, a^2\, t\right)\, X^2 - c^2\, \left(2\, b^2 + a^2\, t + b^2\, t - c^2\, t\right)\, Y^2$$
$$+ (-2\, a^2\, b^2 - 4\, b^4 + 2\, b^2\, c^2 - 2\, a^4\, t - 8\, a^2\, b^2\, t - 2\, b^4\, t + 3\, a^2\, c^2\, t + 3\, b^2\, c^2\, t - c^4\, t - 4\, a^4\, t^2$$
$$- 2\, a^2\, b^2\, t^2 + 2\, a^2\, c^2\, t^2)\, Z^2$$
$$+ 2\, \left(a^2\, b^2 - 2\, b^4 + a^4\, t - 2\, a^2\, b^2\, t - b^4\, t - a^2\, c^2\, t + b^2\, c^2\, t - a^2\, b^2\, t^2 + a^2\, c^2\, t^2\right)\, Y\, Z$$
$$- 2\, \left(a^2\, b^2 - b^2\, c^2 + a^4\, t + 2\, a^2\, b^2\, t - b^4\, t - a^2\, c^2\, t + b^2\, c^2\, t + 2\, a^4\, t^2 - a^2\, b^2\, t^2\right)\, X\, Z$$
$$+ 2\, c^2\, \left(b^2 + a^2\, t + b^2\, t - c^2\, t + a^2\, t^2\right)\, X\, Y\, = 0$$

Les coordonnées du centre E_{u_1} sont

$$E_{u_1} = \{\frac{Num_x(E_{u_1})}{2\,(a-b-c)\,(a+b-c)\,(a-b+c)\,(a+b+c)\,(b^2 + a^2\, t + b^2\, t - c^2\, t + a^2\, t^2)},$$
$$\frac{Num_y(E_{u_1})}{2\,(a-b-c)\,(a+b-c)\,(a-b+c)\,(a+b+c)\,(b^2 + a^2\, t + b^2\, t - c^2\, t + a^2\, t^2)},$$
$$\frac{c^2\,\left(a^2\, b^2 + b^4 - b^2\, c^2 + 4\, a^2\, b^2\, t + a^4\, t^2 + a^2\, b^2\, t^2 - a^2\, c^2\, t^2\right)}{2\,(a-b-c)\,(a+b-c)\,(a-b+c)\,(a+b+c)\,(b^2 + a^2\, t + b^2\, t - c^2\, t + a^2\, t^2)}\}$$

avec

$$Num_x(E_{u_1})$$
$$= a^4\, b^2 - 3\, a^2\, b^4 + 2\, b^6 - 3\, a^2\, b^2\, c^2 - 4\, b^4\, c^2 + 2\, b^2\, c^4 + a^6\, t - 3\, a^4\, b^2\, t + a^2\, b^4\, t + b^6\, t - 3\, a^4\, c^2\, t$$
$$- 4\, a^2\, b^2\, c^2\, t - 3\, b^4\, c^2\, t + 3\, a^2\, c^4\, t + 3\, b^2\, c^4\, t - c^6\, t - a^4\, b^2\, t^2 + a^2\, b^4\, t^2 - a^4\, c^2\, t^2 - 2\, a^2\, b^2\, c^2\, t^2 + a^2\, c^4\, t^2$$

et

$$Num_y(E_{u_1})$$
$$= a^4\, b^2 - a^2\, b^4 - 2\, a^2\, b^2\, c^2 - b^4\, c^2 + b^2\, c^4 + a^6\, t + a^4\, b^2\, t - 3\, a^2\, b^4\, t + b^6\, t - 3\, a^4\, c^2\, t - 4\, a^2\, b^2\, c^2\, t$$
$$- 3\, b^4\, c^2\, t + 3\, a^2\, c^4\, t + 3\, b^2\, c^4\, t - c^6\, t + 2\, a^6\, t^2 - 3\, a^4\, b^2\, t^2 + a^2\, b^4\, t^2 - 4\, a^4\, c^2\, t^2 - 3\, a^2\, b^2\, c^2\, t^2 + 2\, a^2\, c^4\, t^2$$

Le rayon au carré de ce cercle a pour valeur

$$R^2_{M_{ab},M_2,M_{ad}} = \frac{a^2\, b^2\, c^2}{4\,(-a+b+c)\,(a+b-c)\,(a-b+c)\,(a+b+c)}$$

<u>Cercle d'Euler du triangle ABC</u>
Equation du cercle passant par les points M_{ab}, M_{bc}, M_1:

$$0 = \left(-a^2 + b^2 + c^2\right)\, X^2 + \left(a^2 - b^2 + c^2\right)\, Y^2 + \left(a^2 + b^2 - c^2\right)\, Z^2 - 2\, a^2\, Y\, Z - 2\, b^2\, X\, Z - 2\, c^2\, X\, Y$$

Les coordonnées du centre E_{u_2} sont

$$E_{u_2} = \{\frac{-\left(a^2\, b^2 - b^4 + a^2\, c^2 + 2\, b^2\, c^2 - c^4\right)}{2\,(a-b-c)\,(a+b-c)\,(a-b+c)\,(a+b+c)}, \frac{a^4 - a^2\, b^2 - 2\, a^2\, c^2 - b^2\, c^2 + c^4}{2\,(a-b-c)\,(a+b-c)\,(a-b+c)\,(a+b+c)},$$
$$\frac{a^4 - 2\, a^2\, b^2 + b^4 - a^2\, c^2 - b^2\, c^2}{2\,(a-b-c)\,(a+b-c)\,(a-b+c)\,(a+b+c)}\}$$

Le rayon au carré de ce cercle a pour valeur

$$R^2_{M_{ab},M_{bc},M_1} = \frac{a^2\,b^2\,c^2}{4\,(-a+b+c)\,(a+b-c)\,(a-b+c)\,(a+b+c)}$$

Cercle d'Euler du triangle BCD

Equation du cercle passant par les points M_{bc}, M_{cd}, M_2:

$$\begin{aligned}0 &= \left(a^2\,b^2 - b^4 - b^2\,c^2 + a^4\,t + a^2\,b^2\,t - 2\,b^4\,t - 3\,a^2\,c^2\,t + 2\,c^4\,t + 2\,a^4\,t^2 - 2\,a^2\,b^2\,t^2 - 4\,a^2\,c^2\,t^2\right)\,X^2\\ &+ \left(-a^2\,b^2 + b^4 - b^2\,c^2 - a^4\,t + a^2\,b^2\,t + a^2\,c^2\,t\right)\,Y^2 - \left(b^2 + a^2\,t\right)\,\left(a^2 + b^2 - c^2 + 2\,a^2\,t\right)\,Z^2\\ &+ 2\,a^2\,\left(b^2 + a^2\,t + b^2\,t - c^2\,t + a^2\,t^2\right)\,Y\,Z\\ &+ 2\,\left(b^4 + a^2\,b^2\,t + b^4\,t - a^2\,c^2\,t - 2\,b^2\,c^2\,t + c^4\,t + a^2\,b^2\,t^2 - 2\,a^2\,c^2\,t^2\right)\,X\,Z\\ &- 2\,\left(-b^2\,c^2 - a^2\,b^2\,t + b^4\,t - a^2\,c^2\,t - 2\,b^2\,c^2\,t + c^4\,t - a^4\,t^2 + a^2\,b^2\,t^2\right)\,X\,Y\end{aligned}$$

Les coordonnées du centre E_{u_3} sont

$$\begin{aligned}E_{u_3} = \{&\frac{-a^2\,b^4 + b^6 - a^2\,b^2\,c^2 - 2\,b^4\,c^2 + b^2\,c^4 - 2\,a^4\,b^2\,t + 2\,a^2\,b^4\,t - 2\,a^2\,b^2\,c^2\,t - a^6\,t^2 + a^4\,b^2\,t^2 + a^4\,c^2\,t^2}{2\,(a-b-c)\,(a+b-c)\,(a-b+c)\,(a+b+c)\,(b^2 + a^2\,t + b^2\,t - c^2\,t + a^2\,t^2)},\\ &\frac{Num_y(E_{u_3})}{2\,(a-b-c)\,(a+b-c)\,(a-b+c)\,(a+b+c)\,(b^2 + a^2\,t + b^2\,t - c^2\,t + a^2\,t^2)},\\ &\frac{Num_z(E_{u_3})}{2\,(a-b-c)\,(a+b-c)\,(a-b+c)\,(a+b+c)\,(b^2 + a^2\,t + b^2\,t - c^2\,t + a^2\,t^2)}\}\end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned}&Num_y(E_{u_3})\\ &= a^4\,b^2 - a^2\,b^4 - 2\,a^2\,b^2\,c^2 - b^4\,c^2 + b^2\,c^4 + a^6\,t + a^4\,b^2\,t - 3\,a^2\,b^4\,t + b^6\,t - 3\,a^4\,c^2\,t - 4\,a^2\,b^2\,c^2\,t\\ &- 3\,b^4\,c^2\,t + 3\,a^2\,c^4\,t + 3\,b^2\,c^4\,t - c^6\,t + 2\,a^6\,t^2 - 3\,a^4\,b^2\,t^2 + a^2\,b^4\,t^2 - 4\,a^4\,c^2\,t^2 - 3\,a^2\,b^2\,c^2\,t^2 + 2\,a^2\,c^4\,t^2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&Num_z(E_{u_3})\\ &= a^4\,b^2 - 2\,a^2\,b^4 + b^6 - a^2\,b^2\,c^2 - b^4\,c^2 + a^6\,t - a^4\,b^2\,t - a^2\,b^4\,t + b^6\,t - 3\,a^4\,c^2\,t + 2\,a^2\,b^2\,c^2\,t - 3\,b^4\,c^2\,t\\ &+ 3\,a^2\,c^4\,t + 3\,b^2\,c^4\,t - c^6\,t + a^6\,t^2 - 2\,a^4\,b^2\,t^2 + a^2\,b^4\,t^2 - a^4\,c^2\,t^2 - a^2\,b^2\,c^2\,t^2\end{aligned}$$

Le rayon au carré de ce cercle a pour valeur

$$R^2_{M_{bc},M_{cd},M_2} = \frac{a^2\,b^2\,c^2}{4\,(-a+b+c)\,(a+b-c)\,(a-b+c)\,(a+b+c)}$$

Cercle d'Euler du triangle ACD

Equation du cercle passant par les points M_{cd}, M_{ad}, M_1:

$$\begin{aligned}0 &= -t\,\left(a^2\,b^2 - b^4 + b^2\,c^2 + a^4\,t - a^2\,b^2\,t - a^2\,c^2\,t\right)\,X^2\\ &+ \left(2\,a^2\,b^2 - 2\,b^4 + 4\,b^2\,c^2 + 2\,a^4\,t - a^2\,b^2\,t - b^4\,t + 3\,b^2\,c^2\,t - 2\,c^4\,t + a^4\,t^2 - a^2\,b^2\,t^2 + a^2\,c^2\,t^2\right)\,Y^2\\ &+ \left(b^2 + a^2\,t\right)\,\left(2\,b^2 + a^2\,t + b^2\,t - c^2\,t\right)\,Z^2\\ &- 2\,\left(a^2\,b^2 - 2\,b^2\,c^2 + a^4\,t + a^2\,b^2\,t - 2\,a^2\,c^2\,t - b^2\,c^2\,t + c^4\,t + a^4\,t^2\right)\,Y\,Z\\ &- 2\,b^2\,\left(b^2 + a^2\,t + b^2\,t - c^2\,t + a^2\,t^2\right)\,X\,Z\\ &+ 2\,\left(a^2\,b^2 - b^4 + a^4\,t - a^2\,b^2\,t - 2\,a^2\,c^2\,t - b^2\,c^2\,t + c^4\,t - a^2\,c^2\,t^2\right)\,X\,Y\end{aligned}$$

Les coordonnées du centre E_{u_4} sont

$$E_{u_4} = \{\frac{Num_x(E_{u_4})}{2\,(a-b-c)\,(a+b-c)\,(a-b+c)\,(a+b+c)\,(b^2+a^2\,t+b^2\,t-c^2\,t+a^2\,t^2)},$$
$$\frac{a^2\,b^4-b^6+b^4\,c^2+2\,a^4\,b^2\,t-2\,a^2\,b^4\,t-2\,a^2\,b^2\,c^2\,t+a^6\,t^2-a^4\,b^2\,t^2-2\,a^4\,c^2\,t^2-a^2\,b^2\,c^2\,t^2+a^2\,c^4\,t^2}{2\,(a-b-c)\,(a+b-c)\,(a-b+c)\,(a+b+c)\,(b^2+a^2\,t+b^2\,t-c^2\,t+a^2\,t^2)},$$
$$\frac{Num_z(E_{u_4})}{2\,(a-b-c)\,(a+b-c)\,(a-b+c)\,(a+b+c)\,(b^2+a^2\,t+b^2\,t-c^2\,t+a^2\,t^2)}\}$$

avec

$$\begin{aligned}&Num_x(E_{u_4})\\&=a^4\,b^2-3\,a^2\,b^4+2\,b^6-3\,a^2\,b^2\,c^2-4\,b^4\,c^2+2\,b^2\,c^4+a^6\,t-3\,a^4\,b^2\,t+a^2\,b^4\,t+b^6\,t-3\,a^4\,c^2\,t\\&-4\,a^2\,b^2\,c^2\,t-3\,b^4\,c^2\,t+3\,a^2\,c^4\,t+3\,b^2\,c^4\,t-c^6\,t-a^4\,b^2\,t^2+a^2\,b^4\,t^2-a^4\,c^2\,t^2-2\,a^2\,b^2\,c^2\,t^2+a^2\,c^4\,t^2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}Num_zz(E_{u_4})&=a^4\,b^2-2\,a^2\,b^4+b^6-a^2\,b^2\,c^2-b^4\,c^2+a^6\,t-a^4\,b^2\,t-a^2\,b^4\,t+b^6\,t-3\,a^4\,c^2\,t+2\,a^2\,b^2\,c^2\,t\\&-3\,b^4\,c^2\,t+3\,a^2\,c^4\,t+3\,b^2\,c^4\,t-c^6\,t+a^6\,t^2-2\,a^4\,b^2\,t^2+a^2\,b^4\,t^2-a^4\,c^2\,t^2-a^2\,b^2\,c^2\,t^2\end{aligned}$$

Le rayon au carré de ce cercle a pour valeur

$$R^2_{M_{cd},M_{ad},M_1}=\frac{a^2\,b^2\,c^2}{4\,(-a+b+c)\,(a+b-c)\,(a-b+c)\,(a+b+c)}$$

On vérifie que les coordonnées barycentriques de l'anticentre L satisfont l'équation barycentrique de l'un des cercles d'Euler. En raison de l'invariance du dessin du quadrilatère par rotation circulaire de la liste A, B, C, D, les coordonnées barycentriques de l'anticentre L satisfont l'équation barycentrique des autres cercles d'Euler. Les rayons des 4 cercles d'Euler étant égaux, il résulte que les points E_{u_1}, E_{u_2}, E_{u_3}, E_{u_4} sont sur un même cercle centré en L. Nous poursuivons ici sans tenir compte de cette remarque.
Equation du cercle passant par les points E_{u_1}, E_{u_2}, E_{u_3}:

$$0=a(1)\,X^2+a(2)\,Y^2+a(3)\,Z^2+a(4)\,Y\,Z+a(5)\,X\,Z+a(6)\,X\,Y$$

avec

$$\begin{aligned}a(1)&=-a^6\,b^2+2\,a^4\,b^4-a^2\,b^6+2\,a^4\,b^2\,c^2-a^2\,b^4\,c^2-a^2\,b^2\,c^4-a^8\,t+4\,a^4\,b^4\,t-4\,a^2\,b^6\,t+b^8\,t+4\,a^6\,c^2\,t\\&-a^4\,b^2\,c^2\,t+a^2\,b^4\,c^2\,t-2\,b^6\,c^2\,t-6\,a^4\,c^4\,t-a^2\,b^2\,c^4\,t+4\,a^2\,c^6\,t+2\,b^2\,c^6\,t-c^8\,t-2\,a^8\,t^2+5\,a^6\,b^2\,t^2\\&-4\,a^4\,b^4\,t^2+a^2\,b^6\,t^2+6\,a^6\,c^2\,t^2-5\,a^4\,b^2\,c^2\,t^2-6\,a^4\,c^4\,t^2-3\,a^2\,b^2\,c^4\,t^2+2\,a^2\,c^6\,t^2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}a(2)&=a^6\,b^2-4\,a^4\,b^4+5\,a^2\,b^6-2\,b^8-5\,a^2\,b^4\,c^2+6\,b^6\,c^2-3\,a^2\,b^2\,c^4-6\,b^4\,c^4+2\,b^2\,c^6+a^8\,t-4\,a^6\,b^2\,t+4\,a^4\,b^4\,t\\&-b^8\,t-2\,a^6\,c^2\,t+a^4\,b^2\,c^2\,t-a^2\,b^4\,c^2\,t+4\,b^6\,c^2\,t-a^2\,b^2\,c^4\,t-6\,b^4\,c^4\,t+2\,a^2\,c^6\,t+4\,b^2\,c^6\,t-c^8\,t-a^6\,b^2\,t^2\\&+2\,a^4\,b^4\,t^2-a^2\,b^6\,t^2-a^4\,b^2\,c^2\,t^2+2\,a^2\,b^4\,c^2\,t^2-a^2\,b^2\,c^4\,t^2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}a(3)&=a^6\,b^2-3\,a^2\,b^6+2\,b^8-4\,a^4\,b^2\,c^2-5\,a^2\,b^4\,c^2-6\,b^6\,c^2+5\,a^2\,b^2\,c^4+6\,b^4\,c^4-2\,b^2\,c^6+a^8\,t+2\,a^6\,b^2\,t\\&-6\,a^4\,b^4\,t+2\,a^2\,b^6\,t+b^8\,t-4\,a^6\,c^2\,t-11\,a^4\,b^2\,c^2\,t-11\,a^2\,b^4\,c^2\,t-4\,b^6\,c^2\,t+6\,a^4\,c^4\,t+13\,a^2\,b^2\,c^4\,t+6\,b^4\,c^4\,t\\&-4\,a^2\,c^6\,t-4\,b^2\,c^6\,t+c^8\,t+2\,a^8\,t^2-3\,a^6\,b^2\,t^2+a^2\,b^6\,t^2-6\,a^6\,c^2\,t^2-5\,a^4\,b^2\,c^2\,t^2-4\,a^2\,b^4\,c^2\,t^2+6\,a^4\,c^4\,t^2\\&+5\,a^2\,b^2\,c^4\,t^2-2\,a^2\,c^6\,t^2\end{aligned}$$

$$a(4) = -2\,a^2\,(a^4\,b^2 - 2\,a^2\,b^4 + b^6 - 2\,a^2\,b^2\,c^2 + b^4\,c^2 + b^2\,c^4 + a^6\,t - a^4\,b^2\,t - a^2\,b^4\,t + b^6\,t - 3\,a^4\,c^2\,t + a^2\,b^2\,c^2\,t + 3\,a^2\,c^4\,t - c^6\,t + a^6\,t^2 - 2\,a^4\,b^2\,t^2 + a^2\,b^4\,t^2 - a^4\,c^2\,t^2 - a^2\,b^2\,c^2\,t^2 + b^4\,c^2\,t^2 - a^2\,c^4\,t^2 - 2\,b^2\,c^4\,t^2 + c^6\,t^2)$$

$$a(5) = -2\,b^2\,(a^4\,b^2 - 2\,a^2\,b^4 + b^6 + a^4\,c^2 - a^2\,b^2\,c^2 - b^4\,c^2 - 2\,a^2\,c^4 - b^2\,c^4 + c^6 + a^6\,t - a^4\,b^2\,t - a^2\,b^4\,t + b^6\,t + a^2\,b^2\,c^2\,t - 3\,b^4\,c^2\,t + 3\,b^2\,c^4\,t - c^6\,t + a^6\,t^2 - 2\,a^4\,b^2\,t^2 + a^2\,b^4\,t^2 + a^4\,c^2\,t^2 - 2\,a^2\,b^2\,c^2\,t^2 + a^2\,c^4\,t^2)$$

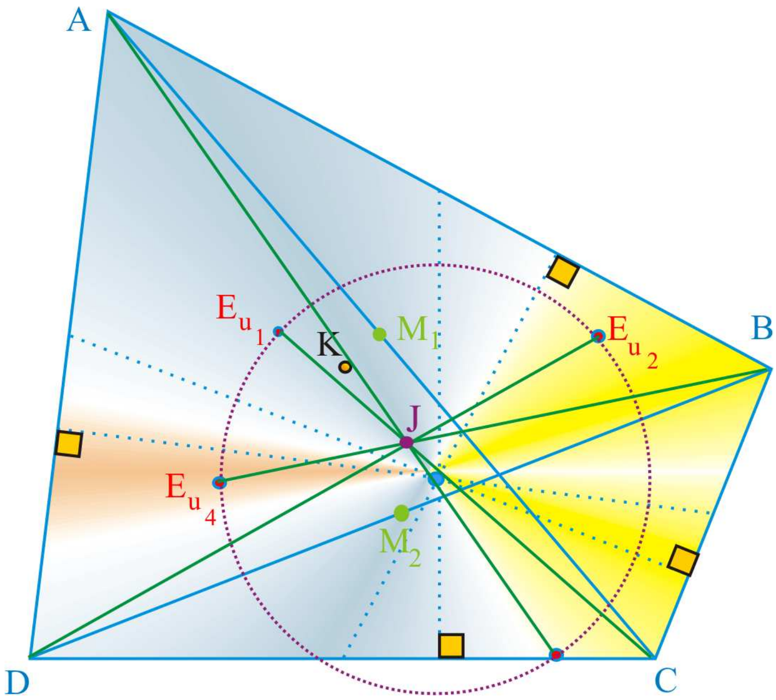
$$a(6) = -2\,(a^4\,b^4 - 2\,a^2\,b^6 + b^8 + a^4\,b^2\,c^2 - a^2\,b^4\,c^2 - b^6\,c^2 - 2\,a^2\,b^2\,c^4 - b^4\,c^4 + b^2\,c^6 + 2\,a^6\,b^2\,t - 4\,a^4\,b^4\,t + 2\,a^2\,b^6\,t + a^6\,c^2\,t - 2\,a^4\,b^2\,c^2\,t - 2\,a^2\,b^4\,c^2\,t + b^6\,c^2\,t - 3\,a^4\,c^4\,t - 3\,a^2\,b^2\,c^4\,t - 3\,b^4\,c^4\,t + 3\,a^2\,c^6\,t + 3\,b^2\,c^6\,t - c^8\,t + a^8\,t^2 - 2\,a^6\,b^2\,t^2 + a^4\,b^4\,t^2 - a^6\,c^2\,t^2 - a^4\,b^2\,c^2\,t^2 + a^2\,b^4\,c^2\,t^2 - a^4\,c^4\,t^2 - 2\,a^2\,b^2\,c^4\,t^2 + a^2\,c^6\,t^2)$$

Les coordonnées du centre sont

$$\Big\{\frac{\left(2\,b^2 + a^2\,t + b^2\,t - c^2\,t\right)\,\left(a^2\,b^2 - b^4 + a^2\,c^2 + 2\,b^2\,c^2 - c^4 + a^4\,t - a^2\,b^2\,t + a^2\,c^2\,t\right)}{2\,(-a+b+c)\,(a+b-c)\,(a-b+c)\,(a+b+c)\,(b^2 + a^2\,t + b^2\,t - c^2\,t + a^2\,t^2)},$$
$$\frac{\left(a^2 + b^2 - c^2 + 2\,a^2\,t\right)\,\left(a^2\,b^2 - b^4 - b^2\,c^2 + a^4\,t - a^2\,b^2\,t - 2\,a^2\,c^2\,t - b^2\,c^2\,t + c^4\,t\right)}{2\,(a-b-c)\,(a+b-c)\,(a-b+c)\,(a+b+c)\,(b^2 + a^2\,t + b^2\,t - c^2\,t + a^2\,t^2)},$$
$$\frac{\left(a^2 - b^2 - c^2 + a^2\,t - b^2\,t + c^2\,t\right)\,\left(a^2\,b^2 - b^4 + b^2\,c^2 + a^4\,t - a^2\,b^2\,t - a^2\,c^2\,t\right)}{2\,(a-b-c)\,(a+b-c)\,(a-b+c)\,(a+b+c)\,(b^2 + a^2\,t + b^2\,t - c^2\,t + a^2\,t^2)}\Big\}$$

Le centre du cercle passant par les points E_{u_1}, E_{u_2}, E_{u_3} est donc le point L anticentre du quadrilatère inscrit. On vérifie que les coordonnées barycentriques du point E_{u_4} satisfont l'équation barycentrique de ce cercle.
Le rayon au carré de ce cercle a pour valeur

$$R^2_{E_{u_1},E_{u_2},E_{u_3}} = \frac{a^2\,b^2\,c^2}{4\,(-a+b+c)\,(a+b-c)\,(a-b+c)\,(a+b+c)}$$



Dessin = Dessin $\cup \{J_1\} = \{A, B, C, D, E_{u_1}, E_{u_2}, E_{u_3}, E_{u_4}, J_1, K, L, M_1, M_2, M_{ab}, M_{ad}, M_{bc}, M_{cd}\}$
Détermination du point J_1 :
Soit J_1 le point $(E_{u_1}C) \cap (E_{u_2}D)$. Le point J_1 est composé.
Comme $J_1 \in (E_{u_1}C)$, on a, en choisissant l'inconnue ν_1

$$\overrightarrow{OJ_1} = (1-\nu_1)\ \overrightarrow{OC} + \nu_1\ \overrightarrow{OE_{u_1}}$$

On déduit:

$$\overrightarrow{OJ_1} = a(1)\ \overrightarrow{OA} + a(2)\ \overrightarrow{OB} + a(3)\ \overrightarrow{OC}$$

avec

$$a(1) = \frac{(\nu_1\, a(1)^*)}{2\ (a-b-c)\ (a+b-c)\ (a-b+c)\ (a+b+c)\ (b^2+a^2\,t+b^2\,t-c^2\,t+a^2\,t^2)}$$
$$a(2) = \frac{\nu_1\ (a(2)^*)}{2\ (a-b-c)\ (a+b-c)\ (a-b+c)\ (a+b+c)\ (b^2+a^2\,t+b^2\,t-c^2\,t+a^2\,t^2)}$$
$$a(3) = \frac{a(3)^*}{2\ (a-b-c)\ (a+b-c)\ (a-b+c)\ (a+b+c)\ (b^2+a^2\,t+b^2\,t-c^2\,t+a^2\,t^2)}$$

avec

$$\begin{aligned} a(1)^* = {} & a^4\,b^2-3\,a^2\,b^4+2\,b^6-3\,a^2\,b^2\,c^2-4\,b^4\,c^2+2\,b^2\,c^4+a^6\,t-3\,a^4\,b^2\,t+a^2\,b^4\,t+b^6\,t-3\,a^4\,c^2\,t \\ & -4\,a^2\,b^2\,c^2\,t-3\,b^4\,c^2\,t+3\,a^2\,c^4\,t+3\,b^2\,c^4\,t-c^6\,t-a^4\,b^2\,t^2+a^2\,b^4\,t^2-a^4\,c^2\,t^2-2\,a^2\,b^2\,c^2\,t^2+a^2\,c^4\,t^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a(2)^* = {} & a^4\,b^2-a^2\,b^4-2\,a^2\,b^2\,c^2-b^4\,c^2+b^2\,c^4+a^6\,t+a^4\,b^2\,t-3\,a^2\,b^4\,t+b^6\,t-3\,a^4\,c^2\,t-4\,a^2\,b^2\,c^2\,t-3\,b^4\,c^2\,t \\ & +3\,a^2\,c^4\,t+3\,b^2\,c^4\,t-c^6\,t+2\,a^6\,t^2-3\,a^4\,b^2\,t^2+a^2\,b^4\,t^2-4\,a^4\,c^2\,t^2-3\,a^2\,b^2\,c^2\,t^2+2\,a^2\,c^4\,t^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a(3)^* = {} & 2\,a^4\,b^2-4\,a^2\,b^4+2\,b^6-4\,a^2\,b^2\,c^2-4\,b^4\,c^2+2\,b^2\,c^4-2\,a^4\,b^2\,\nu_1+4\,a^2\,b^4\,\nu_1-2\,b^6\,\nu_1+5\,a^2\,b^2\,c^2\,\nu_1 \\ & +5\,b^4\,c^2\,\nu_1-3\,b^2\,c^4\,\nu_1+2\,a^6\,t-2\,a^4\,b^2\,t-2\,a^2\,b^4\,t+2\,b^6\,t-6\,a^4\,c^2\,t-4\,a^2\,b^2\,c^2\,t-6\,b^4\,c^2\,t+6\,a^2\,c^4\,t \\ & +6\,b^2\,c^4\,t-2\,c^6\,t-2\,a^6\,\nu_1\,t+2\,a^4\,b^2\,\nu_1\,t+2\,a^2\,b^4\,\nu_1\,t-2\,b^6\,\nu_1\,t+6\,a^4\,c^2\,\nu_1\,t+8\,a^2\,b^2\,c^2\,\nu_1\,t \\ & +6\,b^4\,c^2\,\nu_1\,t-6\,a^2\,c^4\,\nu_1\,t-6\,b^2\,c^4\,\nu_1\,t+2\,c^6\,\nu_1\,t+2\,a^6\,t^2-4\,a^4\,b^2\,t^2+2\,a^2\,b^4\,t^2-4\,a^4\,c^2\,t^2 \\ & -4\,a^2\,b^2\,c^2\,t^2+2\,a^2\,c^4\,t^2-2\,a^6\,\nu_1\,t^2+4\,a^4\,b^2\,\nu_1\,t^2-2\,a^2\,b^4\,\nu_1\,t^2+5\,a^4\,c^2\,\nu_1\,t^2+5\,a^2\,b^2\,c^2\,\nu_1\,t^2-3\,a^2\,c^4\,\nu_1\,t^2 \end{aligned}$$

Comme $J_1 \in (E_{u_2}D)$, on a, en choisissant l'inconnue μ_1

$$\overrightarrow{OJ_1} = (1-\mu_1)\ \overrightarrow{OD} + \mu_1\ \overrightarrow{OE_{u_2}}$$

On déduit:

$$\overrightarrow{OJ_1} = b(1)\ \overrightarrow{OA} + b(2)\ \overrightarrow{OB} + b(3)\ \overrightarrow{OC}$$

avec

$$b(1) = \frac{b(1)^*}{2\ (a-b-c)\ (a+b-c)\ (a-b+c)\ (a+b+c)\ (b^2+a^2\,t+b^2\,t-c^2\,t+a^2\,t^2)}$$
$$b(2) = \frac{b(2)^*}{2\ (a-b-c)\ (a+b-c)\ (a-b+c)\ (a+b+c)\ (b^2+a^2\,t+b^2\,t-c^2\,t+a^2\,t^2)}$$
$$b(3) = \frac{b(3)^*}{2\ (a-b-c)\ (a+b-c)\ (a-b+c)\ (a+b+c)\ (b^2+a^2\,t+b^2\,t-c^2\,t+a^2\,t^2)}$$

avec

$$b(1)^* = 2\,a^4\,b^2 - 4\,a^2\,b^4 + 2\,b^6 - 4\,a^2\,b^2\,c^2 - 4\,b^4\,c^2 + 2\,b^2\,c^4 - 2\,a^4\,b^2\,\mu_1 + 3\,a^2\,b^4\,\mu_1 - b^6\,\mu_1 + 3\,a^2\,b^2\,c^2\,\mu_1 + 2\,b^4\,c^2\,\mu_1 - b^2\,c^4\,\mu_1 + 2\,a^6\,t - 4\,a^4\,b^2\,t + 2\,a^2\,b^4\,t - 4\,a^4\,c^2\,t - 4\,a^2\,b^2\,c^2\,t + 2\,a^2\,c^4\,t - 2\,a^6\,\mu_1\,t + 3\,a^4\,b^2\,\mu_1\,t - 2\,a^2\,b^4\,\mu_1\,t + b^6\,\mu_1\,t + 3\,a^4\,c^2\,\mu_1\,t + 2\,a^2\,b^2\,c^2\,\mu_1\,t - 3\,b^4\,c^2\,\mu_1\,t + 3\,b^2\,c^4\,\mu_1\,t - c^6\,\mu_1\,t - a^4\,b^2\,\mu_1\,t^2 + a^2\,b^4\,\mu_1\,t^2 - a^4\,c^2\,\mu_1\,t^2 - 2\,a^2\,b^2\,c^2\,\mu_1\,t^2 + a^2\,c^4\,\mu_1\,t^2$$

$$b(2)^* = a^4\,b^2\,\mu_1 - a^2\,b^4\,\mu_1 - 2\,a^2\,b^2\,c^2\,\mu_1 - b^4\,c^2\,\mu_1 + b^2\,c^4\,\mu_1 + 2\,a^4\,b^2\,t - 4\,a^2\,b^4\,t + 2\,b^6\,t - 4\,a^2\,b^2\,c^2\,t - 4\,b^4\,c^2\,t + 2\,b^2\,c^4\,t + a^6\,\mu_1\,t - 2\,a^4\,b^2\,\mu_1\,t + 3\,a^2\,b^4\,\mu_1\,t - 2\,b^6\,\mu_1\,t - 3\,a^4\,c^2\,\mu_1\,t + 2\,a^2\,b^2\,c^2\,\mu_1\,t + 3\,b^4\,c^2\,\mu_1\,t + 3\,a^2\,c^4\,\mu_1\,t - c^6\,\mu_1\,t + 2\,a^6\,t^2 - 4\,a^4\,b^2\,t^2 + 2\,a^2\,b^4\,t^2 - 4\,a^4\,c^2\,t^2 - 4\,a^2\,b^2\,c^2\,t^2 + 2\,a^2\,c^4\,t^2 - a^6\,\mu_1\,t^2 + 3\,a^4\,b^2\,\mu_1\,t^2 - 2\,a^2\,b^4\,\mu_1\,t^2 + 2\,a^4\,c^2\,\mu_1\,t^2 + 3\,a^2\,b^2\,c^2\,\mu_1\,t^2 - a^2\,c^4\,\mu_1\,t^2$$

$$b(3)^* = a^4\,b^2\,\mu_1 - 2\,a^2\,b^4\,\mu_1 + b^6\,\mu_1 - a^2\,b^2\,c^2\,\mu_1 - b^4\,c^2\,\mu_1 - 2\,a^4\,c^2\,t + 4\,a^2\,b^2\,c^2\,t - 2\,b^4\,c^2\,t + 4\,a^2\,c^4\,t + 4\,b^2\,c^4\,t - 2\,c^6\,t + a^6\,\mu_1\,t - a^4\,b^2\,\mu_1\,t - a^2\,b^4\,\mu_1\,t + b^6\,\mu_1\,t - 4\,a^2\,b^2\,c^2\,\mu_1\,t - 3\,a^2\,c^4\,\mu_1\,t - 3\,b^2\,c^4\,\mu_1\,t + 2\,c^6\,\mu_1\,t + a^6\,\mu_1\,t^2 - 2\,a^4\,b^2\,\mu_1\,t^2 + a^2\,b^4\,\mu_1\,t^2 - a^4\,c^2\,\mu_1\,t^2 - a^2\,b^2\,c^2\,\mu_1\,t^2$$

La résolution du système linéaire d'inconnues ν_1, μ_1 donne

$$\nu_1 = \frac{2}{3}, \mu_1 = \frac{2}{3}$$

On déduit que:

$$J_1 = \{\frac{Num_x(J_1)}{3\,(a-b-c)\,(a+b-c)\,(a-b+c)\,(a+b+c)\,(b^2+a^2\,t+b^2\,t-c^2\,t+a^2\,t^2)}, \frac{Num_y(J_1)}{3\,(a-b-c)\,(a+b-c)\,(a-b+c)\,(a+b+c)\,(b^2+a^2\,t+b^2\,t-c^2\,t+a^2\,t^2)}, \frac{Num_z(J_1)}{3\,(a-b-c)\,(a+b-c)\,(a-b+c)\,(a+b+c)\,(b^2+a^2\,t+b^2\,t-c^2\,t+a^2\,t^2)}\}$$

avec

$$Num_x(J_1) = a^4\,b^2 - 3\,a^2\,b^4 + 2\,b^6 - 3\,a^2\,b^2\,c^2 - 4\,b^4\,c^2 + 2\,b^2\,c^4 + a^6\,t - 3\,a^4\,b^2\,t + a^2\,b^4\,t + b^6\,t - 3\,a^4\,c^2\,t - 4\,a^2\,b^2\,c^2\,t - 3\,b^4\,c^2\,t + 3\,a^2\,c^4\,t + 3\,b^2\,c^4\,t - c^6\,t - a^4\,b^2\,t^2 + a^2\,b^4\,t^2 - a^4\,c^2\,t^2 - 2\,a^2\,b^2\,c^2\,t^2 + a^2\,c^4\,t^2$$

$$Num_y(J_1) = a^4\,b^2 - a^2\,b^4 - 2\,a^2\,b^2\,c^2 - b^4\,c^2 + b^2\,c^4 + a^6\,t + a^4\,b^2\,t - 3\,a^2\,b^4\,t + b^6\,t - 3\,a^4\,c^2\,t - 4\,a^2\,b^2\,c^2\,t - 3\,b^4\,c^2\,t + 3\,a^2\,c^4\,t + 3\,b^2\,c^4\,t - c^6\,t + 2\,a^6\,t^2 - 3\,a^4\,b^2\,t^2 + a^2\,b^4\,t^2 - 4\,a^4\,c^2\,t^2 - 3\,a^2\,b^2\,c^2\,t^2 + 2\,a^2\,c^4\,t^2$$

$$Num_z(J_1) = a^4\,b^2 - 2\,a^2\,b^4 + b^6 - a^2\,b^2\,c^2 - b^4\,c^2 + a^6\,t - a^4\,b^2\,t - a^2\,b^4\,t + b^6\,t - 3\,a^4\,c^2\,t + 2\,a^2\,b^2\,c^2\,t - 3\,b^4\,c^2\,t + 3\,a^2\,c^4\,t + 3\,b^2\,c^4\,t - c^6\,t + a^6\,t^2 - 2\,a^4\,b^2\,t^2 + a^2\,b^4\,t^2 - a^4\,c^2\,t^2 - a^2\,b^2\,c^2\,t^2$$

On notera que

$$\overrightarrow{OJ_1} = \frac{1}{3}\,\overrightarrow{OC} + \frac{2}{3}\,\overrightarrow{OE_{u_1}}$$

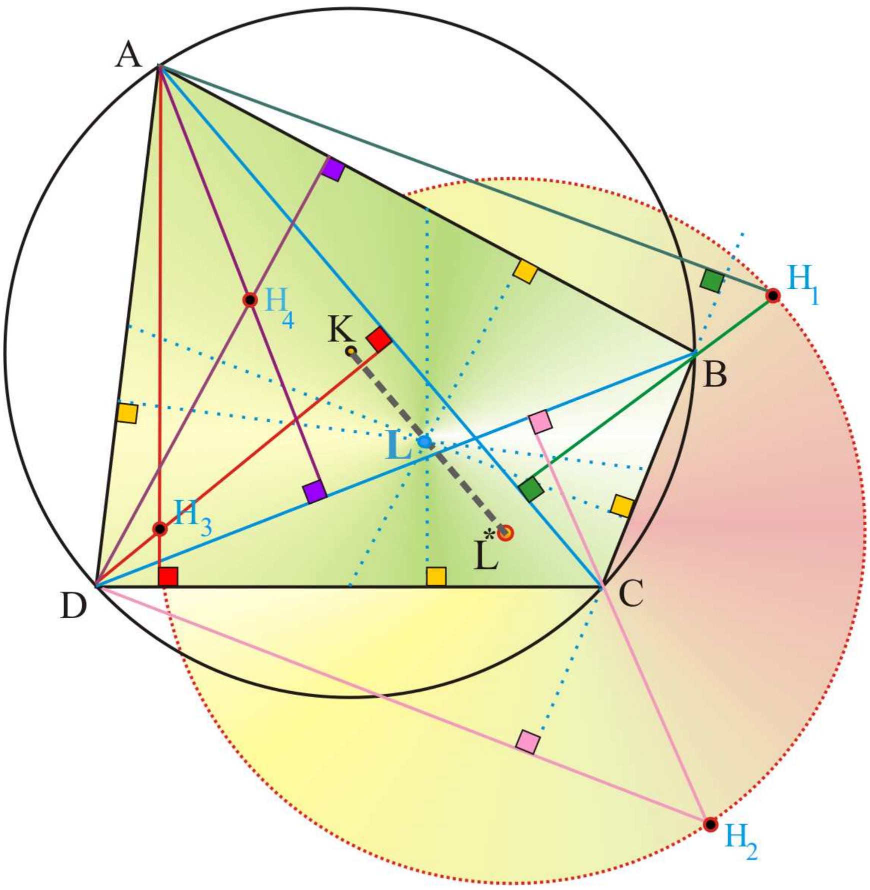
Soit J_2 le point $(E_{u_3}A) \cap (E_{u_4}B)$: on obtient, après un calcul semblable, $J_2 = J_1$ donc les droites mentionnées dans l'énoncé sont concourantes.

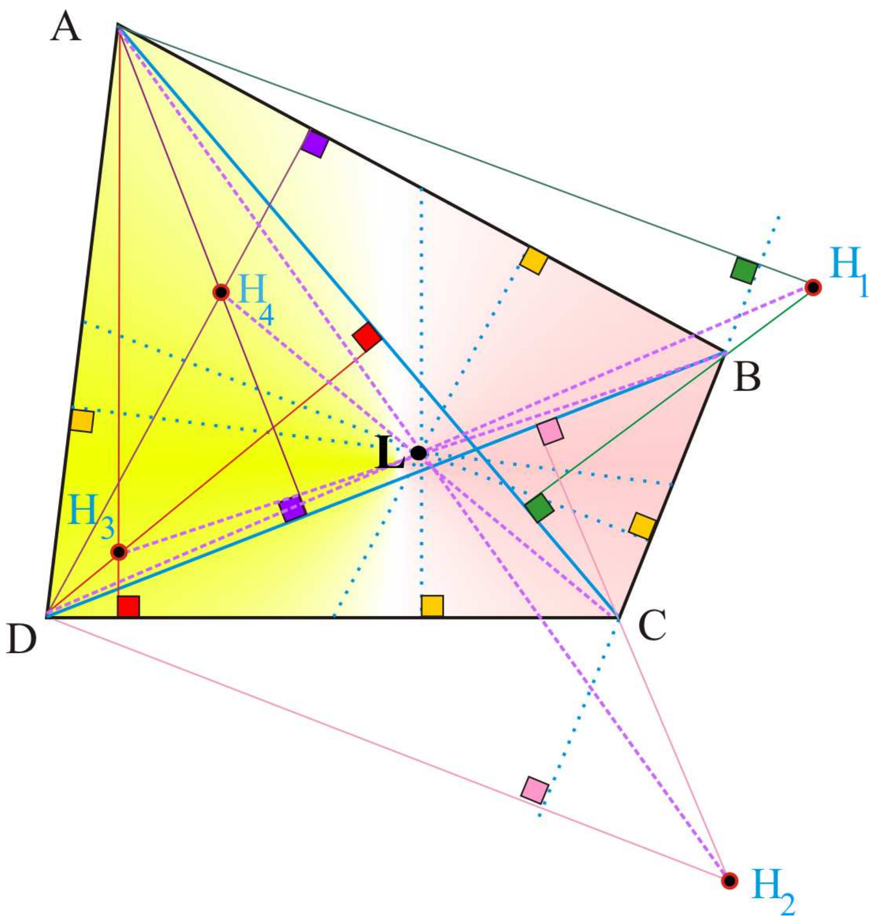
2.3 Les quatre orthocentres du quadrilatère inscrit

Exercice 2.3.1

Soit $ABCD$ un quadrilatère inscrit dans un cercle.

1. *Montrer que les orthocentres H_1, H_2, H_3, H_4 des quatre triangles que déterminent les deux diagonales du quadrilatère sont sur un même cercle dont on précisera le centre L^* et le rayon.*
2. *Montrer que le milieu du segment $[KL^*]$ est l'anticentre L du quadrilatère.*
3. *Montrer que les orthocentres des quatre triangles que déterminent les deux diagonales du quadrilatère H_1, H_2, H_3, H_4 sont les points A, B, C, D.*
4. *Montrer que les quatre segments obtenus en joignant chaque sommet du quadrilatère $ABCD$ à l'orthocentre du triangle formé par les trois autres sommets, sont concourants en leur milieu qui est l'anticentre L.*





Solution:
Nous conservons les notations de 2.1.1.
Dessin = $\{A, B, C, D\}$
Le repère barycentrique choisi est A, B, C .
Le point composé est D .
On déduit les coordonnées barycentriques du point composé:

$$D = \{\frac{b^2 + a^2 t}{b^2 + a^2 t + b^2 t - c^2 t + a^2 t^2}, \frac{t\,(b^2 + a^2 t)}{b^2 + a^2 t + b^2 t - c^2 t + a^2 t^2}, \frac{-c^2 t}{b^2 + a^2 t + b^2 t - c^2 t + a^2 t^2}\}$$

L'orthocentre du triangle A, B, C satisfait $\overrightarrow{AH_1} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$ et $\overrightarrow{BH_1} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$.
Les coordonnées de l'orthocentre H_1 du triangle A, B , C sont ainsi

$$H_1 = \{\frac{(a^2 + b^2 - c^2)\,(a^2 - b^2 + c^2)}{(-a + b + c)\,(a + b - c)\,(a - b + c)\,(a + b + c)}, \frac{(-a^2 + b^2 + c^2)\,(a^2 + b^2 - c^2)}{(-a + b + c)\,(a + b - c)\,(a - b + c)\,(a + b + c)}, \frac{(-a^2 + b^2 + c^2)\,(a^2 - b^2 + c^2)}{(-a + b + c)\,(a + b - c)\,(a - b + c)\,(a + b + c)}\}$$

L'orthocentre du triangle B, C, D satisfait $\overrightarrow{BH_2} \cdot \overrightarrow{CD} = 0$ et $\overrightarrow{CH_2} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$.

Les coordonnées de l'orthocentre H_2 du triangle B, C , D sont ainsi

$$H_2 = \{-\frac{\left(a^2+b^2-c^2+2\,a^2\,t\right)\,\left(a^2\,b^2-b^4+b^2\,c^2+a^4\,t-a^2\,b^2\,t-a^2\,c^2\,t\right)}{(a-b-c)\,(a+b-c)\,(a-b+c)\,(a+b+c)\,(b^2+a^2\,t+b^2\,t-c^2\,t+a^2\,t^2)},$$
$$\frac{\left(a^2+b^2-c^2+2\,a^2\,t\right)\,\left(a^2\,b^2-b^4-b^2\,c^2+a^4\,t-a^2\,b^2\,t-2\,a^2\,c^2\,t-b^2\,c^2\,t+c^4\,t\right)}{(a-b-c\,)\,(a+b-c)\,(a-b+c)\,(a+b+c)\,(b^2+a^2\,t+b^2\,t-c^2\,t+a^2\,t^2)},$$
$$\frac{\left(a^2-b^2-c^2+a^2\,t-b^2\,t+c^2\,t\right)\,\left(a^2\,b^2-b^4+b^2\,c^2+a^4\,t-a^2\,b^2\,t-a^2\,c^2\,t\right)}{(a-b-c)\,(a+b-c)\,(a-b+c)\,(a+b+c)\,(b^2+a^2\,t+b^2\,t-c^2\,t+a^2\,t^2)}\}$$

L'orthocentre du triangle C, D, A satisfait $\overrightarrow{CH_3}\cdot\overrightarrow{DA}=0$ et $\overrightarrow{DH_3}\cdot\overrightarrow{CD}=0$.
Les coordonnées de l'orthocentre H_3 du triangle C, D , A sont ainsi

$$H_3 = \{-\frac{\left(2\,b^2+a^2\,t+b^2\,t-c^2\,t\right)\,\left(a^2\,b^2-b^4+a^2\,c^2+2\,b^2\,c^2-c^4+a^4\,t-a^2\,b^2\,t+a^2\,c^2\,t\right)}{(a-b-c)\,(a+b-c)\,(a-b+c)\,(a+b+c)\,(b^2+a^2\,t+b^2\,t-c^2\,t+a^2\,t^2)},$$
$$\frac{\left(2\,b^2+a^2\,t+b^2\,t-c^2\,t\right)\,\left(a^2\,b^2-b^4+b^2\,c^2+a^4\,t-a^2\,b^2\,t-a^2\,c^2\,t\right)}{(a-b-c)\,(a+b-c)\,(a-b+c)\,(a+b+c)\,(b^2+a^2\,t+b^2\,t-c^2\,t+a^2\,t^2)},$$
$$\frac{\left(a^2-b^2-c^2+a^2\,t-b^2\,t+c^2\,t\right)\,\left(a^2\,b^2-b^4+b^2\,c^2+a^4\,t-a^2\,b^2\,t-a^2\,c^2\,t\right)}{(a-b-c)\,(a+b-c)\,(a-b+c)\,(a+b+c)\,(b^2+a^2\,t+b^2\,t-c^2\,t+a^2\,t^2)}\}$$

L'orthocentre du triangle D, A, B satisfait $\overrightarrow{DH_4}\cdot\overrightarrow{AB}=0$ et $\overrightarrow{AH_4}\cdot\overrightarrow{DA}=0$.
Les coordonnées de l'orthocentre H_4 du triangle D, A , B sont ainsi

$$H_4 = \{-\frac{\left(2\,b^2+a^2\,t+b^2\,t-c^2\,t\right)\,\left(a^2\,b^2-b^4+a^2\,c^2+2\,b^2\,c^2-c^4+a^4\,t-a^2\,b^2\,t+a^2\,c^2\,t\right)}{(a-b-c)\,(a+b-c)\,(a-b+c)\,(a+b+c)\,(b^2+a^2\,t+b^2\,t-c^2\,t+a^2\,t^2)},$$
$$\frac{\left(a^2+b^2-c^2+2\,a^2\,t\right)\,\left(a^2\,b^2-b^4-b^2\,c^2+a^4\,t-a^2\,b^2\,t-2\,a^2\,c^2\,t-b^2\,c^2\,t+c^4\,t\right)}{(a-b-c\,)\,(a+b-c)\,(a-b+c)\,(a+b+c)\,(b^2+a^2\,t+b^2\,t-c^2\,t+a^2\,t^2)},$$
$$\frac{c^2\,\left(a^2+b^2-c^2+2\,a^2\,t\right)\,\left(2\,b^2+a^2\,t+b^2\,t-c^2\,t\right)}{(a-b-c\,)\,(a+b-c)\,(a-b+c)\,(a+b+c)\,(b^2+a^2\,t+b^2\,t-c^2\,t+a^2\,t^2)}\}$$

Equation du cercle passant par les points H_1, H_2, H_3:

$$\begin{aligned}0 = &\left(a^2-b^2-c^2\right)\,\left(a^2+b^2-c^2+2\,a^2\,t\right)\,\left(a^2\,b^2-b^4+b^2\,c^2+a^4\,t-a^2\,b^2\,t-a^2\,c^2\,t\right)\,X^2\\ &+\left(a^2-b^2+c^2\right)\,\left(2\,b^2+a^2\,t+b^2\,t-c^2\,t\right)\,\left(a^2\,b^2-b^4+b^2\,c^2+a^4\,t-a^2\,b^2\,t-a^2\,c^2\,t\right)\,Y^2\\ &+c^2\,\left(a^2+b^2-c^2\right)\,\left(a^2+b^2-c^2+2\,a^2\,t\right)\,\left(2\,b^2+a^2\,t+b^2\,t-c^2\,t\right)\,Z^2\\ &+a(1)\,Y\,Z+a(2)\,X\,Z+a(3)\,X\,Y\end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned}a(1) = (&a^6\,b^2-3\,a^2\,b^6+2\,b^8+6\,a^2\,b^4\,c^2-2\,b^6\,c^2-3\,a^2\,b^2\,c^4-2\,b^4\,c^4+2\,b^2\,c^6+a^8\,t+2\,a^6\,b^2\,t-6\,a^4\,b^4\,t\\ &+2\,a^2\,b^6\,t+b^8\,t-2\,a^6\,c^2\,t+6\,a^4\,b^2\,c^2\,t+6\,a^2\,b^4\,c^2\,t-2\,b^6\,c^2\,t-10\,a^2\,b^2\,c^4\,t+2\,a^2\,c^6\,t+2\,b^2\,c^6\,t-c^8\,t\\ &+2\,a^8\,t^2-3\,a^6\,b^2\,t^2+a^2\,b^6\,t^2-a^6\,c^2\,t^2+4\,a^4\,b^2\,c^2\,t^2+a^2\,b^4\,c^2\,t^2-4\,a^4\,c^4\,t^2-5\,a^2\,b^2\,c^4\,t^2+3\,a^2\,c^6\,t^2)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}a(2) = (&a^6\,b^2-3\,a^2\,b^6+2\,b^8+a^4\,b^2\,c^2+4\,a^2\,b^4\,c^2-b^6\,c^2-5\,a^2\,b^2\,c^4-4\,b^4\,c^4+3\,b^2\,c^6+a^8\,t+2\,a^6\,b^2\,t\\ &-6\,a^4\,b^4\,t+2\,a^2\,b^6\,t+b^8\,t-2\,a^6\,c^2\,t+6\,a^4\,b^2\,c^2\,t+6\,a^2\,b^4\,c^2\,t-2\,b^6\,c^2\,t-10\,a^2\,b^2\,c^4\,t+2\,a^2\,c^6\,t\\ &+2\,b^2\,c^6\,t-c^8\,t+2\,a^8\,t^2-3\,a^6\,b^2\,t^2+a^2\,b^6\,t^2-2\,a^6\,c^2\,t^2+6\,a^4\,b^2\,c^2\,t^2-2\,a^4\,c^4\,t^2-3\,a^2\,b^2\,c^4\,t^2+2\,a^2\,c^6\,t^2)\end{aligned}$$

$$a(3) = (a^6\,b^2 + a^4\,b^4 - 5\,a^2\,b^6 + 3\,b^8 + 4\,a^2\,b^4\,c^2 - 4\,b^6\,c^2 - 3\,a^2\,b^2\,c^4 - b^4\,c^4 + 2\,b^2\,c^6 + a^8\,t + 4\,a^6\,b^2\,t - 10\,a^4\,b^4\,t$$
$$+ 4\,a^2\,b^6\,t + b^8\,t - 2\,a^6\,c^2\,t + 2\,a^4\,b^2\,c^2\,t + 2\,a^2\,b^4\,c^2\,t - 2\,b^6\,c^2\,t - 8\,a^2\,b^2\,c^4\,t + 2\,a^2\,c^6\,t + 2\,b^2\,c^6\,t - c^8\,t$$
$$+ 3\,a^8\,t^2 - 5\,a^6\,b^2\,t^2 + a^4\,b^4\,t^2 + a^2\,b^6\,t^2 - 4\,a^6\,c^2\,t^2 + 4\,a^4\,b^2\,c^2\,t^2 - a^4\,c^4\,t^2 - 3\,a^2\,b^2\,c^4\,t^2 + 2\,a^2\,c^6\,t^2)$$

Le logiciel de calcul symbolique vérifie que les coordonnées barycentriques du point H_4 satisfont cette équation.
Les coordonnées du centre sont

$$L^* = \{-\frac{Num_x(L^*)}{(a-b-c)\,(a+b-c)\,(a-b+c)\,(a+b+c)\,(b^2+a^2\,t+b^2\,t-c^2\,t+a^2\,t^2)},$$
$$\frac{Num_y(L^*)}{(a-b-c)\,(a+b-c)\,(a-b+c)\,(a+b+c)\,(b^2+a^2\,t+b^2\,t-c^2\,t+a^2\,t^2)},$$
$$\frac{Num_z(L^*)}{(a-b-c)\,(a+b-c)\,(a-b+c)\,(a+b+c)\,(b^2+a^2\,t+b^2\,t-c^2\,t+a^2\,t^2)}\}$$

avec

$$Num_x(L^*) = a^4\,b^2 + a^2\,b^4 - 2\,b^6 + a^2\,b^2\,c^2 + 4\,b^4\,c^2 - 2\,b^2\,c^4 + a^6\,t + 3\,a^4\,b^2\,t - 3\,a^2\,b^4\,t - b^6\,t - a^4\,c^2\,t + 4\,a^2\,b^2\,c^2\,t$$
$$+ 3\,b^4\,c^2\,t - a^2\,c^4\,t - 3\,b^2\,c^4\,t + c^6\,t + 2\,a^6\,t^2 - a^4\,b^2\,t^2 - a^2\,b^4\,t^2 - a^4\,c^2\,t^2 + 2\,a^2\,b^2\,c^2\,t^2 - a^2\,c^4\,t^2$$

$$Num_y(L^*) = a^4\,b^2 + a^2\,b^4 - 2\,b^6 - 2\,a^2\,b^2\,c^2 + b^4\,c^2 + b^2\,c^4 + a^6\,t + 3\,a^4\,b^2\,t - 3\,a^2\,b^4\,t - b^6\,t - 3\,a^4\,c^2\,t - 4\,a^2\,b^2\,c^2\,t$$
$$+ b^4\,c^2\,t + 3\,a^2\,c^4\,t + b^2\,c^4\,t - c^6\,t + 2\,a^6\,t^2 - a^4\,b^2\,t^2 - a^2\,b^4\,t^2 - 4\,a^4\,c^2\,t^2 - a^2\,b^2\,c^2\,t^2 + 2\,a^2\,c^4\,t^2$$

$$Num_y(L^*) = a^4\,b^2 - 2\,a^2\,b^4 + b^6 + a^2\,b^2\,c^2 + b^4\,c^2 - 2\,b^2\,c^4 + a^6\,t - a^4\,b^2\,t - a^2\,b^4\,t + b^6\,t - a^4\,c^2\,t + 6\,a^2\,b^2\,c^2\,t$$
$$- b^4\,c^2\,t - a^2\,c^4\,t - b^2\,c^4\,t + c^6\,t + a^6\,t^2 - 2\,a^4\,b^2\,t^2 + a^2\,b^4\,t^2 + a^4\,c^2\,t^2 + a^2\,b^2\,c^2\,t^2 - 2\,a^2\,c^4\,t^2$$

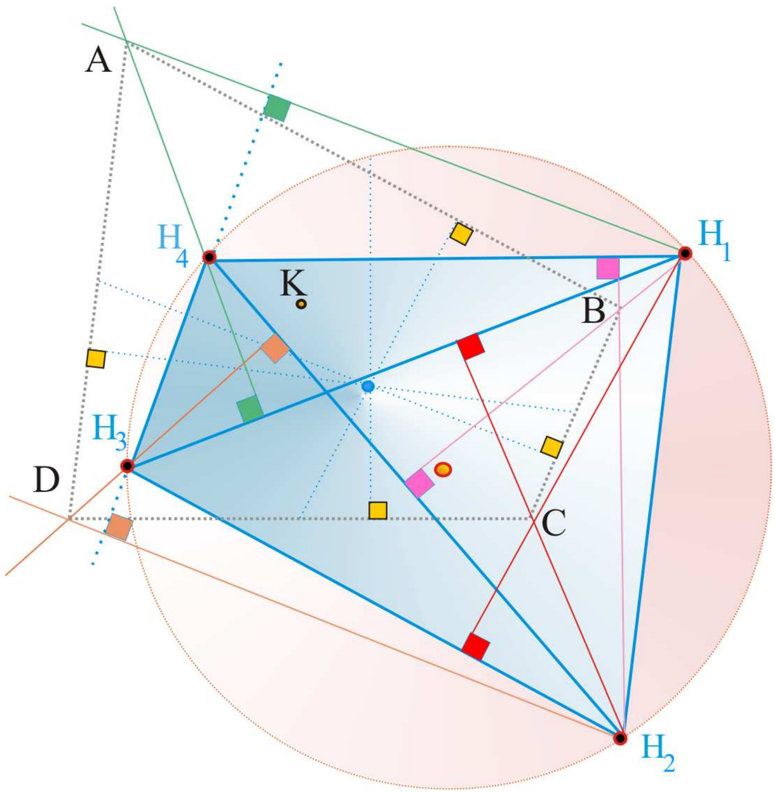
Le rayon au carré de ce cercle a pour valeur

$$R^2_{H_1,H_2,H_3} = \frac{a^2\,b^2\,c^2}{(-a+b+c)\,(a+b-c)\,(a-b+c)\,(a+b+c)}$$

La demi-somme des coordonnées barycentriques des points K et L^* est égale aux coordonnées barycentriques du point L anticentre du quadrilatère.
L'orthocentre M du triangle $H_1H_2H_3$ satisfait $\overrightarrow{H_1M} \cdot \overrightarrow{H_2H_3} = 0$ et $\overrightarrow{H_2M} \cdot \overrightarrow{H_1H_2} = 0$.
Les coordonnées de l'orthocentre M du triangle $H_1H_2H_3$ sont ainsi

$$M = \{0, 0, 1\}$$

Ainsi $M = A$. On procède de même pour les autres triangles.



Dessin = Dessin $\cup \{J_1\} = \{A, B, C, D, H_1, H_2, H_3, H_4, J_1\}$

Détermination du point J_1 :

Soit J_1 le point $(H_1D) \cap (H_2A)$. Le point J_1 est composé.

Comme $J_1 \in (H_1D)$, on a, en choisissant l'inconnue ν_1

$$\overrightarrow{OJ_1} = (1-\nu_1)\ \overrightarrow{OD} + \nu_1\ \overrightarrow{OH_1}$$

On déduit:

$$\overrightarrow{OJ_1} = a(1)\ \overrightarrow{OA} + a(2)\ \overrightarrow{OB} + a(3)\ \overrightarrow{OC}$$

avec

$$a(1) = \frac{a(1)^*}{(a-b-c)\ (a+b-c)\ (a-b+c)\ (a+b+c)\ (b^2+a^2\,t+b^2\,t-c^2\,t+a^2\,t^2)}$$

$$a(2) = \frac{a(2)^*}{(a-b-c)\ (a+b-c)\ (a-b+c)\ (a+b+c)\ (b^2+a^2\,t+b^2\,t-c^2\,t+a^2\,t^2)}$$

$$a(3) = \frac{a(3)^*}{(a-b-c)\ (a+b-c)\ (a-b+c)\ (a+b+c)\ (b^2+a^2\,t+b^2\,t-c^2\,t+a^2\,t^2)}$$

avec

$$\begin{aligned} a(1)^* = {}& a^4\,b^2 - 2\,a^2\,b^4 + b^6 - 2\,a^2\,b^2\,c^2 - 2\,b^4\,c^2 + b^2\,c^4 - 2\,a^4\,b^2\,\nu_1 + 2\,a^2\,b^4\,\nu_1 + 2\,a^2\,b^2\,c^2\,\nu_1 + a^6\,t \\ & - 2\,a^4\,b^2\,t + a^2\,b^4\,t - 2\,a^4\,c^2\,t - 2\,a^2\,b^2\,c^2\,t + a^2\,c^4\,t - 2\,a^6\,\nu_1\,t + a^4\,b^2\,\nu_1\,t + b^6\,\nu_1\,t + 3\,a^4\,c^2\,\nu_1\,t \\ & - 3\,b^4\,c^2\,\nu_1\,t + 3\,b^2\,c^4\,\nu_1\,t - c^6\,\nu_1\,t - a^6\,\nu_1\,t^2 + a^2\,b^4\,\nu_1\,t^2 - 2\,a^2\,b^2\,c^2\,\nu_1\,t^2 + a^2\,c^4\,\nu_1\,t^2 \end{aligned}$$

$$a(2)^* = a^4\,b^2\,\nu_1 - b^6\,\nu_1 - 2\,a^2\,b^2\,c^2\,\nu_1 + b^2\,c^4\,\nu_1 + a^4\,b^2\,t - 2\,a^2\,b^4\,t + b^6\,t - 2\,a^2\,b^2\,c^2\,t - 2\,b^4\,c^2\,t + b^2\,c^4\,t$$
$$+ a^6\,\nu_1\,t + a^2\,b^4\,\nu_1\,t - 2\,b^6\,\nu_1\,t - 3\,a^4\,c^2\,\nu_1\,t + 3\,b^4\,c^2\,\nu_1\,t + 3\,a^2\,c^4\,\nu_1\,t - c^6\,\nu_1\,t + a^6\,t^2 - 2\,a^4\,b^2\,t^2$$
$$+ a^2\,b^4\,t^2 - 2\,a^4\,c^2\,t^2 - 2\,a^2\,b^2\,c^2\,t^2 + a^2\,c^4\,t^2 + 2\,a^4\,b^2\,\nu_1\,t^2 - 2\,a^2\,b^4\,\nu_1\,t^2 + 2\,a^2\,b^2\,c^2\,\nu_1\,t^2$$

$$a(3)^* = a^4\,b^2\,\nu_1 - 2\,a^2\,b^4\,\nu_1 + b^6\,\nu_1 - b^2\,c^4\,\nu_1 - a^4\,c^2\,t + 2\,a^2\,b^2\,c^2\,t - b^4\,c^2\,t + 2\,a^2\,c^4\,t + 2\,b^2\,c^4\,t - c^6\,t$$
$$+ a^6\,\nu_1\,t - a^4\,b^2\,\nu_1\,t - a^2\,b^4\,\nu_1\,t + b^6\,\nu_1\,t - 3\,a^2\,c^4\,\nu_1\,t - 3\,b^2\,c^4\,\nu_1\,t + 2\,c^6\,\nu_1\,t + a^6\,\nu_1\,t^2$$
$$- 2\,a^4\,b^2\,\nu_1\,t^2 + a^2\,b^4\,\nu_1\,t^2 - a^2\,c^4\,\nu_1\,t^2$$

Comme $J_1 \in (H_2 A)$, on a, en choisissant l'inconnue μ_1

$$\overrightarrow{OJ_1} = (1-\mu_1)\ \overrightarrow{OA} + \mu_1\ \overrightarrow{OH_2}$$

On déduit:

$$\overrightarrow{OJ_1} = b(1)\ \overrightarrow{OA} + b(2)\ \overrightarrow{OB} + b(3)\ \overrightarrow{OC}$$

avec

$$b(1) = \frac{b(1)^*}{(a-b-c)\ (a+b-c)\ (a-b+c)\ (a+b+c)\ (b^2+a^2\,t+b^2\,t-c^2\,t+a^2\,t^2)}$$
$$b(2) = \frac{\mu_1\ \left(a^2+b^2-c^2+2\,a^2\,t\right)\ \left(a^2\,b^2-b^4-b^2\,c^2+a^4\,t-a^2\,b^2\,t-2\,a^2\,c^2\,t-b^2\,c^2\,t+c^4\,t\right)}{(a-b-c\ )\ (a+b-c)\ (a-b+c)\ (a+b+c)\ (b^2+a^2\,t+b^2\,t-c^2\,t+a^2\,t^2)}$$
$$b(3) = \frac{\mu_1\ \left(a^2-b^2-c^2+a^2\,t-b^2\,t+c^2\,t\right)\ \left(a^2\,b^2-b^4+b^2\,c^2+a^4\,t-a^2\,b^2\,t-a^2\,c^2\,t\right)}{(a-b-c)\ (a+b-c)\ (a-b+c)\ (a+b+c)\ (b^2+a^2\,t+b^2\,t-c^2\,t+a^2\,t^2)}$$

avec

$$b(1)^* = a^4\,b^2 - 2\,a^2\,b^4 + b^6 - 2\,a^2\,b^2\,c^2 - 2\,b^4\,c^2 + b^2\,c^4 - 2\,a^4\,b^2\,\mu_1 + 2\,a^2\,b^4\,\mu_1 + 2\,a^2\,b^2\,c^2\,\mu_1 + a^6\,t$$
$$- a^4\,b^2\,t - a^2\,b^4\,t + b^6\,t - 3\,a^4\,c^2\,t - 2\,a^2\,b^2\,c^2\,t - 3\,b^4\,c^2\,t + 3\,a^2\,c^4\,t + 3\,b^2\,c^4\,t - c^6\,t - 2\,a^6\,\mu_1\,t$$
$$- a^4\,b^2\,\mu_1\,t + 4\,a^2\,b^4\,\mu_1\,t - b^6\,\mu_1\,t + 5\,a^4\,c^2\,\mu_1\,t + 3\,b^4\,c^2\,\mu_1\,t - 4\,a^2\,c^4\,\mu_1\,t - 3\,b^2\,c^4\,\mu_1\,t$$
$$+ c^6\,\mu_1\,t + a^6\,t^2 - 2\,a^4\,b^2\,t^2 + a^2\,b^4\,t^2 - 2\,a^4\,c^2\,t^2 - 2\,a^2\,b^2\,c^2\,t^2 + a^2\,c^4\,t^2 - 3\,a^6\,\mu_1\,t^2 + 4\,a^4\,b^2\,\mu_1\,t^2$$
$$- a^2\,b^4\,\mu_1\,t^2 + 4\,a^4\,c^2\,\mu_1\,t^2 + 2\,a^2\,b^2\,c^2\,\mu_1\,t^2 - a^2\,c^4\,\mu_1\,t^2$$

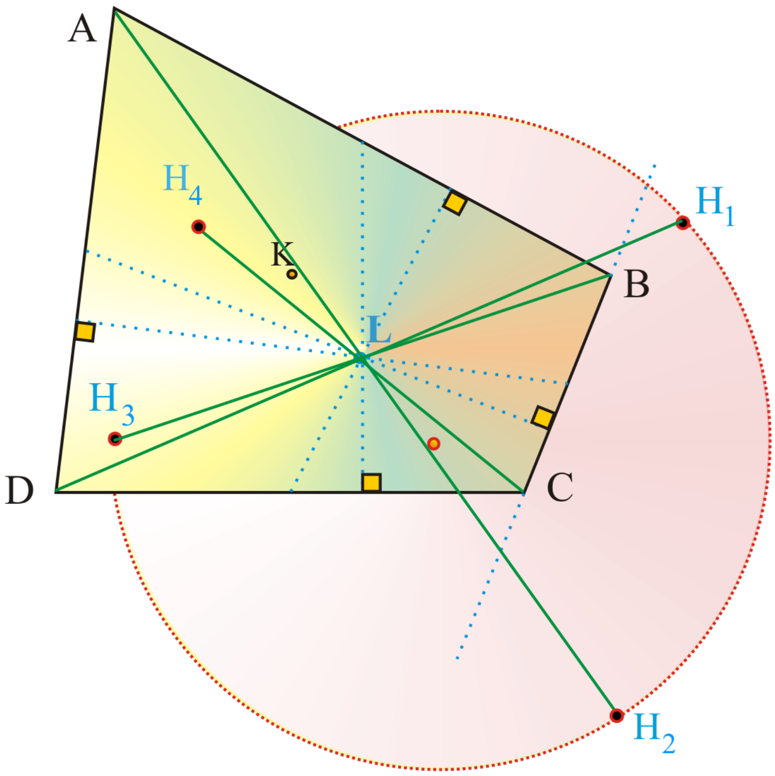
La résolution du système linéaire d'inconnues ν_1, μ_1 donne

$$\nu_1 = \frac{1}{2} \qquad \mu_1 = \frac{1}{2}$$

On déduit que:

$$J_1 \ = \{\frac{\left(2\,b^2+a^2\,t+b^2\,t-c^2\,t\right)\ \left(a^2\,b^2-b^4+a^2\,c^2+2\,b^2\,c^2-c^4+a^4\,t-a^2\,b^2\,t+a^2\,c^2\,t\right)}{2\ (-a+b+c)\ (a+b-c)\ (a-b+c)\ (a+b+c)\ (b^2+a^2\,t+b^2\,t-c^2\,t+a^2\,t^2)},$$
$$\frac{\left(a^2+b^2-c^2+2\,a^2\,t\right)\ \left(a^2\,b^2-b^4-b^2\,c^2+a^4\,t-a^2\,b^2\,t-2\,a^2\,c^2\,t-b^2\,c^2\,t+c^4\,t\right)}{2\ (a-b-c)\ (a+b-c)\ (a-b+c)\ (a+b+c)\ (b^2+a^2\,t+b^2\,t-c^2\,t+a^2\,t^2)},$$
$$\frac{\left(a^2-b^2-c^2+a^2\,t-b^2\,t+c^2\,t\right)\ \left(a^2\,b^2-b^4+b^2\,c^2+a^4\,t-a^2\,b^2\,t-a^2\,c^2\,t\right)}{2\ (a-b-c)\ (a+b-c)\ (a-b+c)\ (a+b+c)\ (b^2+a^2\,t+b^2\,t-c^2\,t+a^2\,t^2)}\}$$

donc $J_1 = L$ est l'anticentre du quadrilatére. Par permutation circulaire sur les points A, B, C, D, on obtient la dernière assertion de l'énoncé.



2.4 Propriétés de l'anticentre

Exercice 2.4.1
Soit L l'anticentre d'un quadrilatère $ABCD$ inscrit dans un cercle.

1. *Montrer que le milieu du segment $[LK]$ est le centre de gravité G du quadrilatère $ABCD$.*
2. *Montrer que L appartient aux quatre droites de Simson, chacune étant obtenue par choix d'un sommet du quadrilatère relativement au triangle formé par les 3 autres sommets restants.*

Nous conservons les notations de 2.1.1.
Dessin $= \{A, B, C, D, K, L\}$
Le repère barycentrique choisi est A, B, C .
Les points composés sont D, K, L .
Les coordonnées barycentriques sont décrites en 2.1.1.
Dessin $=$ Dessin $\cup \{G\} = \{A, B, C, D, G, K, L\}$
Le repère barycentrique choisi est A, B, C .
Le point composé est G .
On déduit les coordonnées barycentriques du point composé:

$$G = \{\frac{2\,b^2+2\,a^2\,t+b^2\,t-c^2\,t+a^2\,t^2}{4\,(b^2+a^2\,t+b^2\,t-c^2\,t+a^2\,t^2)}, \frac{b^2+a^2\,t+2\,b^2\,t-c^2\,t+2\,a^2\,t^2}{4\,(b^2+a^2\,t+b^2\,t-c^2\,t+a^2\,t^2)}, \frac{b^2+a^2\,t+b^2\,t-2\,c^2\,t+a^2\,t^2}{4\,(b^2+a^2\,t+b^2\,t-c^2\,t+a^2\,t^2)}\}$$

Calculons le vecteur $\overrightarrow{KG}$. On a:

$$\overrightarrow{KG} = a(1)\ \overrightarrow{OA} + a(2)\ \overrightarrow{OB} + a(3)\ \overrightarrow{OC}$$

avec

$$a(1) = \frac{a(1)^*}{4\,(a-b-c)\,(a+b-c)\,(a-b+c)\,(a+b+c)\,(b^2+a^2\,t+b^2\,t-c^2\,t+a^2\,t^2)}$$

$$a(2) = \frac{a(2)^*}{4\,(a-b-c)\,(a+b-c)\,(a-b+c)\,(a+b+c)\,(b^2+a^2\,t+b^2\,t-c^2\,t+a^2\,t^2)}$$

$$a(3) = \frac{a(3)^*}{4\,(a-b-c)\,(a+b-c)\,(a-b+c)\,(a+b+c)\,(b^2+a^2\,t+b^2\,t-c^2\,t+a^2\,t^2)}$$

et

$$a(1)^* = -2\,a^4\,b^2+2\,b^6-4\,b^4\,c^2+2\,b^2\,c^4-2\,a^6\,t-3\,a^4\,b^2\,t+4\,a^2\,b^4\,t+b^6\,t+3\,a^4\,c^2\,t-4\,a^2\,b^2\,c^2\,t-3\,b^4\,c^2\,t$$
$$+3\,b^2\,c^4\,t-c^6\,t-3\,a^6\,t^2+2\,a^4\,b^2\,t^2+a^2\,b^4\,t^2+2\,a^4\,c^2\,t^2-2\,a^2\,b^2\,c^2\,t^2+a^2\,c^4\,t^2$$

$$a(2)^* = a^4\,b^2+2\,a^2\,b^4-3\,b^6-2\,a^2\,b^2\,c^2+2\,b^4\,c^2+b^2\,c^4+a^6\,t+4\,a^4\,b^2\,t-3\,a^2\,b^4\,t-2\,b^6\,t-3\,a^4\,c^2\,t-4\,a^2\,b^2\,c^2\,t$$
$$+3\,b^4\,c^2\,t+3\,a^2\,c^4\,t-c^6\,t+2\,a^6\,t^2-2\,a^2\,b^4\,t^2-4\,a^4\,c^2\,t^2+2\,a^2\,c^4\,t^2$$

$$a(3)^* = a^4\,b^2-2\,a^2\,b^4+b^6+2\,a^2\,b^2\,c^2+2\,b^4\,c^2-3\,b^2\,c^4+a^6\,t-a^4\,b^2\,t-a^2\,b^4\,t+b^6\,t+8\,a^2\,b^2\,c^2\,t-3\,a^2\,c^4\,t$$
$$-3\,b^2\,c^4\,t+2\,c^6\,t+a^6\,t^2-2\,a^4\,b^2\,t^2+a^2\,b^4\,t^2+2\,a^4\,c^2\,t^2+2\,a^2\,b^2\,c^2\,t^2-3\,a^2\,c^4\,t^2$$

Calculons le vecteur $\overrightarrow{GL}$. On a:

$$\overrightarrow{GL} = b(1)\ \overrightarrow{OA} + b(2)\ \overrightarrow{OB} + b(3)\ \overrightarrow{OC}$$

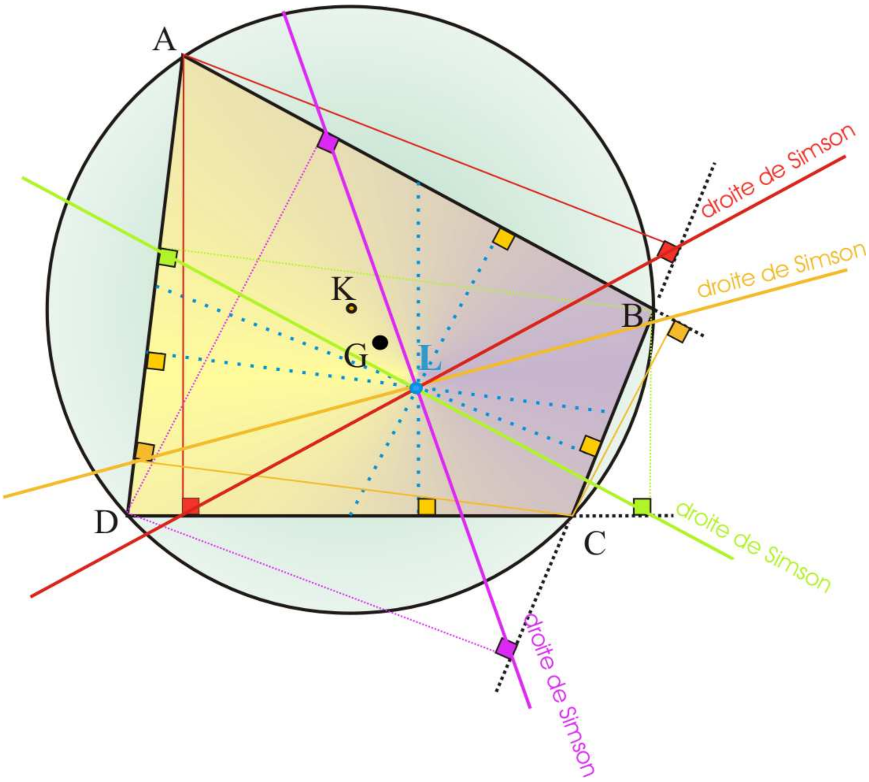
avec

$$b(1) = a(1) \qquad b(2) = a(2) \qquad b(3) = a(3)$$

On a ainsi

$$\overrightarrow{KG} = \overrightarrow{GL}$$

Le milieu du segment $[LK]$ est donc le centre de gravité G du quadrilatère $ABCD$.



Dessin $=$ Dessin $\cup \{P_1, P_2\} = \{A, B, C, D, G, K, L, P_1, P_2\}$
Le repère barycentrique choisi est A, B, C .
Les points composés sont P_1, P_2 .
La projection du point D sur la droite (AB) est le point P_1 de coordonnées barycentriques

$$P_1 = \{\frac{-2\,b^2 - a^2\,t - b^2\,t + c^2\,t}{2\,(-b^2 - a^2\,t - b^2\,t + c^2\,t - a^2\,t^2)}, \frac{t\,\left(-a^2 - b^2 + c^2 - 2\,a^2\,t\right)}{2\,(-b^2 - a^2\,t - b^2\,t + c^2\,t - a^2\,t^2)}, 0\}$$

La projection du point D sur la droite (BC) est le point P_2 de coordonnées barycentriques

$$P_2 = \{0, \frac{\left(b^2 + a^2\,t\right)\,\left(a^2 + b^2 - c^2 + 2\,a^2\,t\right)}{2\,a^2\,(b^2 + a^2\,t + b^2\,t - c^2\,t + a^2\,t^2)}, \frac{a^2\,b^2 - b^4 + b^2\,c^2 + a^4\,t - a^2\,b^2\,t - a^2\,c^2\,t}{2\,a^2\,(b^2 + a^2\,t + b^2\,t - c^2\,t + a^2\,t^2)}\}$$

Calculons le vecteur $\overrightarrow{P_1L}$. On a:

$$\overrightarrow{P_1L} = c(1)\,\overrightarrow{OA} + c(2)\,\overrightarrow{OB} + c(3)\,\overrightarrow{OC}$$

avec

$$c(1) = \frac{a^2\,\left(2\,b^2 + a^2\,t + b^2\,t - c^2\,t\right)\,\left(a^2 - b^2 - c^2 + a^2\,t - b^2\,t + c^2\,t\right)}{2\,(-a + b + c)\,(a + b - c)\,(a - b + c)\,(a + b + c)\,(b^2 + a^2\,t + b^2\,t - c^2\,t + a^2\,t^2)}$$

$$c(2) = \frac{b^2\,\left(a^2 + b^2 - c^2 + 2\,a^2\,t\right)\,\left(a^2 - b^2 - c^2 + a^2\,t - b^2\,t + c^2\,t\right)}{2\,(a - b - c)\,(a + b - c)\,(a - b + c)\,(a + b + c)\,(b^2 + a^2\,t + b^2\,t - c^2\,t + a^2\,t^2)}$$

$$c(3) = \frac{\left(a^2 - b^2 - c^2 + a^2\,t - b^2\,t + c^2\,t\right)\,\left(a^2\,b^2 - b^4 + b^2\,c^2 + a^4\,t - a^2\,b^2\,t - a^2\,c^2\,t\right)}{2\,(a - b - c)\,(a + b - c)\,(a - b + c)\,(a + b + c)\,(b^2 + a^2\,t + b^2\,t - c^2\,t + a^2\,t^2)}$$

Calculons le vecteur $\overrightarrow{P_1P_2}$. On a:

$$\overrightarrow{P_1P_2} = d(1)\ \overrightarrow{OA} + d(2)\ \overrightarrow{OB} + d(3)\ \overrightarrow{OC}$$

avec

$$d(1) = \frac{-\left(2\,b^2 + a^2\,t + b^2\,t - c^2\,t\right)}{2\ (b^2 + a^2\,t + b^2\,t - c^2\,t + a^2\,t^2)}$$

$$d(2) = \frac{b^2\ \left(a^2 + b^2 - c^2 + 2\,a^2\,t\right)}{2\,a^2\ (b^2 + a^2\,t + b^2\,t - c^2\,t + a^2\,t^2)}$$

$$d(3) = \frac{a^2\,b^2 - b^4 + b^2\,c^2 + a^4\,t - a^2\,b^2\,t - a^2\,c^2\,t}{2\,a^2\ (b^2 + a^2\,t + b^2\,t - c^2\,t + a^2\,t^2)}$$

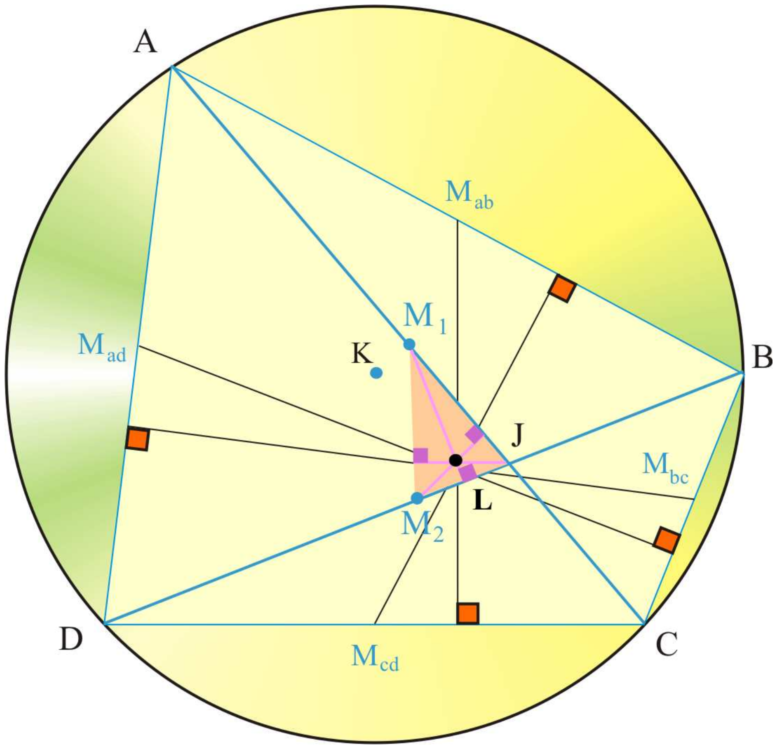
On a ainsi

$$\overrightarrow{P_1L} = \frac{a^2\ \left(a^2 - b^2 - c^2 + a^2\,t - b^2\,t + c^2\,t\right)}{a^4 - 2\,a^2\,b^2 + b^4 - 2\,a^2\,c^2 - 2\,b^2\,c^2 + c^4}\ \overrightarrow{P_1P_2}$$

Le point L appartient donc à la droite de Simson du point D relativement au triangle ABC. Comme le quadrilatère $ABCD$ est invariant lorsque l'on change les notations des sommets par rotation circulaire, on obtient 2).

Exercice 2.4.2

L'anticentre L d'un quadrilatère $ABCD$ inscrit dans un cercle est l'orthocentre du triangle M_1M_2J, avec M_1 milieu de la diagonale $[AC]$, M_2 milieu de la diagonale $[BD]$ du quadrilatère $ABCD$ et J le point $(BD) \cap (AC)$.



Solution:
Dessin $= \{A, B, C, D\}$
Le repère barycentrique choisi est A, B, C .
Le point composé est D .
On déduit les coordonnées barycentriques du point composé:

$$D = \{\frac{b^2 + a^2\,t}{b^2 + a^2\,t + b^2\,t - c^2\,t + a^2\,t^2}, \frac{t\,\left(b^2 + a^2\,t\right)}{b^2 + a^2\,t + b^2\,t - c^2\,t + a^2\,t^2}, \frac{-c^2\,t}{b^2 + a^2\,t + b^2\,t - c^2\,t + a^2\,t^2}\}$$

Dessin $=$ Dessin $\cup \{M_1, M_2\} = \{A, B, C, D, M_1, M_2\}$
Le repère barycentrique choisi est A, B, C .
Les points composés sont M_1, M_2 .
On déduit les coordonnées barycentriques des points composés:

$$M_1 = \{\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}\}$$

$$M_2 = \{\frac{b^2 + a^2\,t}{2\,\left(b^2 + a^2\,t + b^2\,t - c^2\,t + a^2\,t^2\right)}, \frac{b^2 + a^2\,t + 2\,b^2\,t - c^2\,t + 2\,a^2\,t^2}{2\,\left(b^2 + a^2\,t + b^2\,t - c^2\,t + a^2\,t^2\right)}, \frac{-c^2\,t}{2\,\left(b^2 + a^2\,t + b^2\,t - c^2\,t + a^2\,t^2\right)}\}$$

Dessin $=$ Dessin $\cup \{J\} = \{A, B, C, D, J, M_1, M_2\}$
Détermination du point J :
Soit J le point $(BD) \cap (AC)$. Le point J est composé.
Comme $J \in (BD)$, on a, en choisissant l'inconnue ν_1

$$\overrightarrow{OJ} = \nu_1\ \overrightarrow{OB} + (1 - \nu_1)\ \overrightarrow{OD}$$

On déduit:

$$\overrightarrow{OJ} = a(1)\ \overrightarrow{OA} + a(2)\ \overrightarrow{OB} + a(3)\ \overrightarrow{OC}$$

avec

$$a(1) = \frac{(1 - \nu_1)\ \left(b^2 + a^2\,t\right)}{b^2 + a^2\,t + b^2\,t - c^2\,t + a^2\,t^2}$$

$$a(2) = \frac{b^2\,\nu_1 + b^2\,t + a^2\,\nu_1\,t - c^2\,\nu_1\,t + a^2\,t^2}{b^2 + a^2\,t + b^2\,t - c^2\,t + a^2\,t^2}$$

$$a(3) = \frac{c^2\ (1 - \nu_1)\ t}{-b^2 - a^2\,t - b^2\,t + c^2\,t - a^2\,t^2}$$

Comme $J \in (AC)$, on a, en choisissant l'inconnue μ_1

$$\overrightarrow{OJ} = \mu_1\ \overrightarrow{OA} + (1 - \mu_1)\ \overrightarrow{OC}$$

La résolution du système linéaire d'inconnues ν_1, μ_1 donne

$$\mu_1 = \frac{b^2 + a^2\,t}{b^2 + a^2\,t - c^2\,t} \qquad \nu_1 = -\frac{t\,\left(b^2 + a^2\,t\right)}{b^2 + a^2\,t - c^2\,t}$$

On déduit que:

$$J = \{\frac{b^2 + a^2\,t}{b^2 + a^2\,t - c^2\,t}, 0, \frac{-c^2\,t}{b^2 + a^2\,t - c^2\,t}\}$$

L'orthocentre L_1 du triangle M_1, M_2, J satisfait $\overrightarrow{M_1L_1} \cdot \overrightarrow{M_2J} = 0$ et $\overrightarrow{M_2L_1} \cdot \overrightarrow{M_1M_2} = 0$.
Les coordonnées de l'orthocentre L_1 du triangle M_1, M_2 , J sont ainsi

$$L_1 = \{\frac{\left(2\,b^2+a^2\,t+b^2\,t-c^2\,t\right)\,\left(a^2\,b^2-b^4+a^2\,c^2+2\,b^2\,c^2-c^4+a^4\,t-a^2\,b^2\,t+a^2\,c^2\,t\right)}{2\,(-a+b+c)\,(a+b-c)\,(a-b+c)\,(a+b+c)\,(b^2+a^2\,t+b^2\,t-c^2\,t+a^2\,t^2)},$$
$$\frac{\left(a^2+b^2-c^2+2\,a^2\,t\right)\,\left(a^2\,b^2-b^4-b^2\,c^2+a^4\,t-a^2\,b^2\,t-2\,a^2\,c^2\,t-b^2\,c^2\,t+c^4\,t\right)}{2\,(a-b-c)\,(a+b-c)\,(a-b+c)\,(a+b+c)\,(b^2+a^2\,t+b^2\,t-c^2\,t+a^2\,t^2)},$$
$$\frac{\left(a^2-b^2-c^2+a^2\,t-b^2\,t+c^2\,t\right)\,\left(a^2\,b^2-b^4+b^2\,c^2+a^4\,t-a^2\,b^2\,t-a^2\,c^2\,t\right)}{2\,(a-b-c)\,(a+b-c)\,(a-b+c)\,(a+b+c)\,(b^2+a^2\,t+b^2\,t-c^2\,t+a^2\,t^2)}\}$$

Donc L_1 est l'anticentre du quadrilatère $ABCD$.

CHAPITRE

3

Quadrilatères orthodiagonaux

3 Quadrilatères orthodiagonaux

3.1 Quadrilatère orthodiagonal

Un quadrilatère orthodiagonal $ABCD$ est un quadrilatère dans lequel les diagonales (AC) et (BD) sont orthogonales. Comme $(-2)\ \overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD} = AB^2 - BC^2 + CD^2 - DA^2$, un quadrilatère $ABCD$ est quadrilatère orthodiagonal $ABCD$ si et seulement si

$$AB^2 - BC^2 + CD^2 - DA^2 = 0$$

Exercice 3.1.1
Soit $ABCD$ un quadrilatère orthodiagonal.

1. *Montrer que l'on peut adopter pour coordonnées barycentriques du point D l'expression*

$$D = \{\frac{\left(a^2+b^2-c^2\right)\ (1-y)}{2\,b^2}, y, \frac{\left(-a^2+b^2+c^2\right)\ (1-y)}{2\,b^2}\}$$

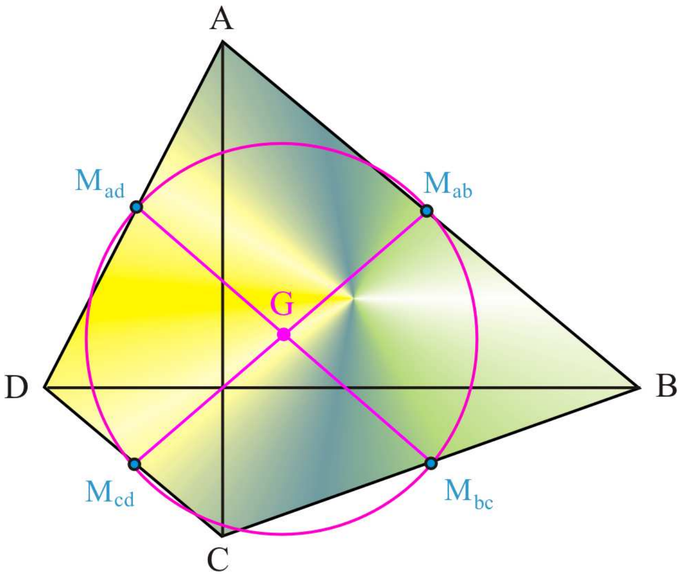
   dépendant d'un paramètre y, le repére barycentrique étant A, B, C.

2. *Montrer que les segments joignant les milieux de deux côtés opposés du quadrilatère ont la même longueur.*

3. *Montrer que les milieux des quatre côtés du quadrilatère appartiennent à un même cercle dont le centre est le centre de gravité du quadrilatère.*

Nous rappelons les notations:

le milieu du segment $[AB]$ est le point M_{ab}
le milieu du segment $[BC]$ est le point M_{bc}
le milieu du segment $[CD]$ est le point M_{cd}
le milieu du segment $[DA]$ est le point M_{ad}



Solution:
Dessin $=\{A, B, C, D\}$
Le repère barycentrique choisi est A, B, C .
Le point composé est D .
Les coordonnées barycentriques du point composé sont, à priori:

$$D = \{x, y, 1 - x - y\}$$

Le produit scalaire $\overrightarrow{BD} \cdot \overrightarrow{AC}$ est égal à zéro et a pour valeur

$$\overrightarrow{BD} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{a^2 + b^2 - c^2 - 2\,b^2\,x - a^2\,y - b^2\,y + c^2\,y}{2}$$

Il suit que $x = \frac{a^2+b^2-c^2-a^2\,y-b^2\,y+c^2\,y}{2\,b^2}$. En reportant cette valeur dans l'expression $D = \{x, y, 1 - x - y\}$, on obtient

$$D = \{\frac{\left(a^2 + b^2 - c^2\right)\,(1 - y)}{2\,b^2}, y, \frac{\left(-a^2 + b^2 + c^2\right)\,(1 - y)}{2\,b^2}\}$$

Dessin = Dessin $\cup \{M_{ab}, M_{ad}, M_{bc}, M_{cd}\} = \{A, B, C, D, M_{ab}, M_{ad}, M_{bc}, M_{cd}\}$
Le repère barycentrique choisi est A, B, C .
Les points composés sont $M_{ab}, M_{bc}, M_{cd}, M_{ad}$.
On déduit les coordonnées barycentriques des points composés:

$$M_{ab} = \{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\}$$

$$M_{bc} = \{0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\}$$

$$M_{cd} = \{\frac{\left(a^2 + b^2 - c^2\right)\,(1 - y)}{4\,b^2}, \frac{y}{2}, \frac{-a^2 + 3\,b^2 + c^2 + a^2\,y - b^2\,y - c^2\,y}{4\,b^2}\}$$

$$M_{ad} = \{\frac{a^2 + 3\,b^2 - c^2 - a^2\,y - b^2\,y + c^2\,y}{4\,b^2}, \frac{y}{2}, \frac{\left(-a^2 + b^2 + c^2\right)\,(1 - y)}{4\,b^2}\}$$

La distance $M_{ab}M_{cd}^2$ est égale à

$$M_{ab}M_{cd}^2 = \frac{AB^2\ (-1+y)\ \left(-a^2+b^2+c^2+a^2\,y+b^2\,y-c^2\,y\right)}{8\,b^2} + \frac{BC^2\ (-1+y)\ \left(a^2-3\,b^2-c^2-a^2\,y+b^2\,y+c^2\,y\right)}{8\,b^2} - \frac{AC^2\ \left(-a^2+b^2+c^2+a^2\,y+b^2\,y-c^2\,y\right)\ \left(a^2-3\,b^2-c^2-a^2\,y+b^2\,y+c^2\,y\right)}{16\,b^4}$$

soit

$$M_{ab}M_{cd}^2 = \frac{Num(M_{ab}M_{cd}^2)}{16\,b^2}$$

avec

$$Num(M_{ab}M_{cd}^2) = -a^4+2\,a^2\,b^2+3\,b^4+2\,a^2\,c^2+2\,b^2\,c^2-c^4+2\,a^4\,y-4\,a^2\,b^2\,y+2\,b^4\,y-4\,a^2\,c^2\,y - 4\,b^2\,c^2\,y+2\,c^4\,y-a^4\,y^2+2\,a^2\,b^2\,y^2-b^4\,y^2+2\,a^2\,c^2\,y^2+2\,b^2\,c^2\,y^2-c^4\,y^2$$

La distance $M_{bc}M_{ad}^2$ est égale à

$$M_{bc}M_{ad}^2 = \frac{AB^2\ (-1+y)\ \left(-a^2-3\,b^2+c^2+a^2\,y+b^2\,y-c^2\,y\right)}{8\,b^2} + \frac{BC^2\ (-1+y)\ \left(a^2+b^2-c^2-a^2\,y+b^2\,y+c^2\,y\right)}{8\,b^2} - \frac{AC^2\ \left(-a^2-3\,b^2+c^2+a^2\,y+b^2\,y-c^2\,y\right)\ \left(a^2+b^2-c^2-a^2\,y+b^2\,y+c^2\,y\ \right)}{16\,b^4}$$

soit, après calculs,

$$M_{bc}M_{ad}^2 = M_{ab}M_{cd}^2$$

Equation du cercle passant par les points M_{bc}, M_{cd}, M_{ad}:

$$0 = \left(-a^4+4\,a^2\,b^2-3\,b^4+2\,a^2\,c^2-4\,b^2\,c^2-c^4+a^4\,y-2\,a^2\,b^2\,y+b^4\,y-2\,a^2\,c^2\,y-2\,b^2\,c^2\,y+c^4\,y\right)\ X^2 + \left(a^4-4\,a^2\,b^2+3\,b^4-2\,a^2\,c^2-4\,b^2\,c^2+c^4-a^4\,y+2\,a^2\,b^2\,y-b^4\,y+2\,a^2\,c^2\,y+2\,b^2\,c^2\,y-c^4\,y\right)\ Y^2 + \left(-a^4-4\,a^2\,b^2-3\,b^4+2\,a^2\,c^2+4\,b^2\,c^2-c^4+a^4\,y-2\,a^2\,b^2\,y+b^4\,y-2\,a^2\,c^2\,y-2\,b^2\,c^2\,y+c^4\,y\right)\ Z^2 + 2\ \left(-a^4+5\,b^4+2\,a^2\,c^2-c^4+a^4\,y-2\,a^2\,b^2\,y+b^4\,y-2\,a^2\,c^2\,y-2\,b^2\,c^2\,y+c^4\,y\right)\ X\,Z + 8\,a^2\,b^2\,Y\,Z+8\,b^2\,c^2\,X\,Y$$

Cette expression est nulle pour $X = 1$, $Y = 1$ et $Z = 0$, donc, en raison de l'homogénéité de l'expression, M_{ab} appartient au cercle passant par les points M_{bc}, M_{cd}, M_{ad}.
Les coordonnées du centre de ce cercle sont

$$\left\{\frac{a^2+3\,b^2-c^2-a^2\,y-b^2\,y+c^2\,y}{8\,b^2}, \frac{1+y}{4}, \frac{-a^2+3\,b^2+c^2+a^2\,y-b^2\,y-c^2\,y}{8\,b^2}\right\}$$

Le rayon au carré de ce cercle a pour valeur

$$R^2_{M_{bc},M_{cd},M_{ad}} = \frac{Num(R^2_{M_{bc},M_{cd},M_{ad}})}{64\,b^2}$$

avec

$$Num(R^2_{M_{bc},M_{cd},M_{ad}}) = -a^4 + 2a^2b^2 + 3b^4 + 2a^2c^2 + 2b^2c^2 - c^4 + 2a^4y - 4a^2b^2y + 2b^4y - 4a^2c^2y - 4b^2c^2y + 2c^4y - a^4y^2 + 2a^2b^2y^2 - b^4y^2 + 2a^2c^2y^2 + 2b^2c^2y^2 - c^4y^2$$

Dessin = Dessin $\cup \{G\} = \{A, B, C, D, M_{ab}, M_{ad}, M_{bc}, M_{cd}\}$
Le repère barycentrique choisi est A, B, C .
Le point composé est G .
Les coordonnées barycentriques de G sont (moyenne pondéré des coordonnées barycentriques des points A, B, C, D):

$$G = \{\frac{a^2 + 3b^2 - c^2 - a^2y - b^2y + c^2y}{8b^2}, \frac{1+y}{4}, \frac{-a^2 + 3b^2 + c^2 + a^2y - b^2y - c^2y}{8b^2}\}$$

On retrouve l'expression des coordonnées barycentriques du centre du cercle.

3.2 Quadrilatère orthodiagonal cyclique

Un quadrilatère orthodiagonal cyclique $ABCD$ est un quadrilatère dont les sommets A, B, C, D sont situés sur un même cercle (le point D appartient au cercle circonscrit au triangle ABC) pour lequel les diagonales (AC) et (BD) sont orthogonales.

Exercice 3.2.1 *coordonnées barycentriques*
Soit D un point appartenant au cercle circonscrit Γ d'un triangle ABC, donc D a des coordonnées barycentriques de la forme

$$D = \{\frac{b^2 + a^2t}{b^2 + a^2t + b^2t - c^2t + a^2t^2}, \frac{t\left(b^2 + a^2t\right)}{b^2 + a^2t + b^2t - c^2t + a^2t^2}, \frac{-c^2t}{b^2 + a^2t + b^2t - c^2t + a^2t^2}\}$$

avec t paramètre. Montrer que la valeur de t telle que $ABCD$ soit un quadrilatère orthodiagonal est

$$t = \frac{b^2\left(-a^2 + b^2 + c^2\right)}{a^4 - a^2b^2 - 2a^2c^2 - b^2c^2 + c^4}$$

Préciser alors l'expression des coordonnées barycentriques de D.

Solution:
Dessin = $\{A, B, C, D\}$
Le repère barycentrique choisi est A, B, C .
Le point composé est D .

$$D = \{\frac{b^2 + a^2t}{b^2 + a^2t + b^2t - c^2t + a^2t^2}, \frac{t\left(b^2 + a^2t\right)}{b^2 + a^2t + b^2t - c^2t + a^2t^2}, \frac{-c^2t}{b^2 + a^2t + b^2t - c^2t + a^2t^2}\}$$

On a $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD} = 0$, donc

$$a^2b^2 - b^4 - b^2c^2 + a^4t - a^2b^2t - 2a^2c^2t - b^2c^2t + c^4t = 0$$

qui implique

$$t = \frac{b^2\left(-a^2+b^2+c^2\right)}{a^4-a^2b^2-2a^2c^2-b^2c^2+c^4}$$

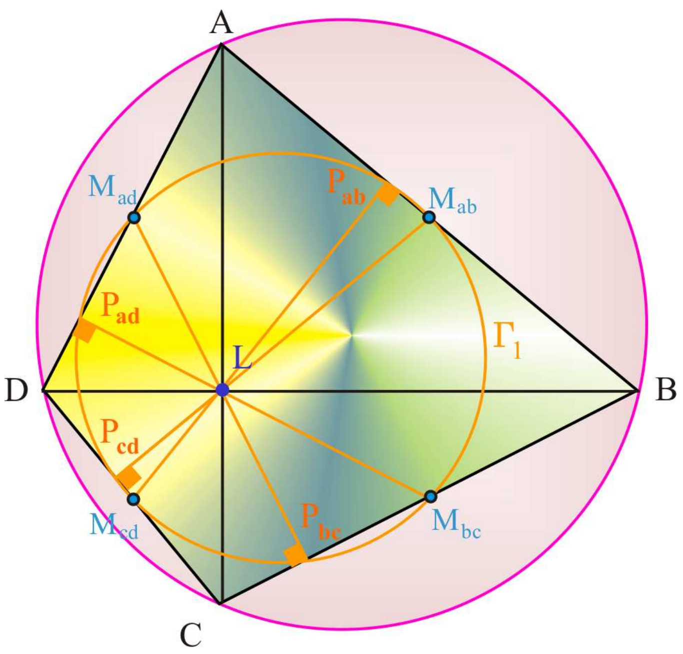
Il suit que

$$D = \left\{\frac{\left(a^2+b^2-c^2\right)\left(-a^4+a^2b^2+2a^2c^2+b^2c^2-c^4\right)}{b^2\,(a-b+c)\,(a+b-c)\,(-a+b+c)\,(a+b+c)}, \frac{\left(a^2-b^2-c^2\right)\left(a^2+b^2-c^2\right)}{(-a+b+c)\,(a+b-c)\,(a-b+c)\,(a+b+c)}, \frac{\left(-a^2+b^2+c^2\right)\left(-a^4+a^2b^2+2a^2c^2+b^2c^2-c^4\right)}{b^2\,(a-b+c)\,(a+b-c)\,(-a+b+c)\,(a+b+c)}\right\}$$

Exercice 3.2.2

Soit $ABCD$ un quadrilatère orthodiagonal cyclique.

1. *Montrer que l'anticentre du quadrilatère coïncide avec le point d'intersection des diagonales.*
2. *Montrer que les projections $P_{ab}, P_{ad}, P_{bc}, P_{cd}$ de l'anticentre sur les quatre côtés du quadrilatère appartiennent à un même cercle Γ_1 qui passe également par les milieux des quatre côtés du quadrilatère.*
3. *Montrer que le quadrilatère $P_{ab}, P_{ad}, P_{bc}, P_{cd}$ ayant pour sommets les projections de l'anticentre sur les quatre côtés de $ABCD$, est circonscriptible à un cercle Γ_2 de centre Ω (ce qui signifie que les quatre côtés de ce quadrilatère sont tangents à un même cercle). Calculer $K\Omega^2$, K étant le centre du cercle Γ passant par A, B, C, D.*



Solution:
Pour un quadrilatère quelconque, les coordonnées barycentriques de l'anticentre L sont

$$L = \{\frac{\left(2\,b^2+a^2\,t+b^2\,t-c^2\,t\right)\,\left(a^2\,b^2-b^4+a^2\,c^2+2\,b^2\,c^2-c^4+a^4\,t-a^2\,b^2\,t+a^2\,c^2\,t\right)}{2\,(-a+b+c)\,(a+b-c)\,(a-b+c)\,(a+b+c)\,(b^2+a^2\,t+b^2\,t-c^2\,t+a^2\,t^2)},$$
$$\frac{\left(a^2+b^2-c^2+2\,a^2\,t\right)\,\left(a^2\,b^2-b^4-b^2\,c^2+a^4\,t-a^2\,b^2\,t-2\,a^2\,c^2\,t-b^2\,c^2\,t+c^4\,t\right)}{2\,(a-b-c)\,(a+b-c)\,(a-b+c)\,(a+b+c)\,(b^2+a^2\,t+b^2\,t-c^2\,t+a^2\,t^2)},$$
$$\frac{\left(a^2-b^2-c^2+a^2\,t-b^2\,t+c^2\,t\right)\,\left(a^2\,b^2-b^4+b^2\,c^2+a^4\,t-a^2\,b^2\,t-a^2\,c^2\,t\right)}{2\,(a-b-c)\,(a+b-c)\,(a-b+c)\,(a+b+c)\,(b^2+a^2\,t+b^2\,t-c^2\,t+a^2\,t^2)}\}$$

Comme $ABCD$ est un quadrilatère orthodiagonal, on a

$$t = \frac{b^2\,\left(-a^2+b^2+c^2\right)}{a^4-a^2\,b^2-2\,a^2\,c^2-b^2\,c^2+c^4}$$

Dessin $=\{A,B,C,D,L\}$
Le repère barycentrique choisi est A,B,C .
Les points composés sont D,L .
On déduit les coordonnées barycentriques des points composés:

$$D = \{\frac{\left(a^2+b^2-c^2\right)\,\left(-a^4+a^2\,b^2+2\,a^2\,c^2+b^2\,c^2-c^4\right)}{b^2\,(a-b+c)\,(a+b-c)\,(-a+b+c)\,(a+b+c)},\frac{\left(a^2-b^2-c^2\right)\,\left(a^2+b^2-c^2\right)}{(-a+b+c)\,(a+b-c)\,(a-b+c)\,(a+b+c)},$$
$$\frac{\left(-a^2+b^2+c^2\right)\,\left(-a^4+a^2\,b^2+2\,a^2\,c^2+b^2\,c^2-c^4\right)}{b^2\,(a-b+c)\,(a+b-c)\,(-a+b+c)\,(a+b+c)}\}$$

$$L = \{\frac{a^2+b^2-c^2}{2\,b^2},0,\frac{-a^2+b^2+c^2}{2\,b^2}\}$$

Dessin $=$ Dessin $\cup\{L_1\} = \{A,B,C,D,L,L_1\}$
Détermination du point L_1 :
Soit L_1 le point $(AC)\cap(BD)$. Le point L_1 est composé.
Comme $L_1\in(AC)$, on a, en choisissant l'inconnue ν_1

$$\overrightarrow{OL_1} = \nu_1\,\overrightarrow{OA}+(1-\nu_1)\,\overrightarrow{OC}$$

Comme $L_1\in(BD)$, on a, en choisissant l'inconnue μ_1

$$\overrightarrow{OL_1} = \mu_1\,\overrightarrow{OB}+(1-\mu_1)\,\overrightarrow{OD}$$

On déduit:

$$\overrightarrow{OL_1} = b(1)\,\overrightarrow{OA}+b(2)\,\overrightarrow{OB}+b(3)\,\overrightarrow{OC}$$

avec

$$b(1) = \frac{\left(a^2+b^2-c^2\right)\,\left(-a^4+a^2\,b^2+2\,a^2\,c^2+b^2\,c^2-c^4\right)\,(-1+\mu_1)}{b^2\,(-a+b-c)\,(a+b-c)\,(-a+b+c)\,(a+b+c)}$$

$$b(2) = \frac{-a^4+b^4+2\,a^2\,c^2-c^4+2\,a^4\,\mu_1-2\,a^2\,b^2\,\mu_1-4\,a^2\,c^2\,\mu_1-2\,b^2\,c^2\,\mu_1+2\,c^4\,\mu_1}{(a-b-c)\,(a+b-c)\,(a-b+c)\,(a+b+c)}$$

$$b(3) = \frac{\left(-a^2+b^2+c^2\right)\left(-a^4+a^2\,b^2+2\,a^2\,c^2+b^2\,c^2-c^4\right)\left(-1+\mu_1\right)}{b^2\,(-a+b-c)\,(a+b-c)\,(-a+b+c)\,(a+b+c)}$$

La résolution du système linéaire d'inconnues ν_1, μ_1 donne

$$\nu_1 = \frac{a^2+b^2-c^2}{2\,b^2} \qquad \mu_1 = \frac{\left(a^2-b^2-c^2\right)\left(a^2+b^2-c^2\right)}{2\,\left(a^4-a^2\,b^2-2\,a^2\,c^2-b^2\,c^2+c^4\right)}$$

On déduit que:

$$L_1 \;=\; \{\frac{a^2+b^2-c^2}{2\,b^2}, 0, \frac{-a^2+b^2+c^2}{2\,b^2}\}$$

On a donc $L_1 = L$ anticentre du quadrilatère.
Dessin = Dessin $\cup \{M_{ab}, M_{ad}, M_{bc}, M_{cd}\} = \{A, B, C, D, L, L_1, M_{ab}, M_{ad}, M_{bc}, M_{cd}\}$
Le repère barycentrique choisi est A, B, C .
Le milieu du segment $[AB]$ (resp. $[BC]$, $[CD]$, $[DA]$) est le point M_{ab} (resp. M_{bc}, M_{cd},M_{ad}).
Les points composés sont $M_{ab}, M_{bc}, M_{cd}, M_{ad}$.
On déduit les coordonnées barycentriques des points composés:

$$M_{ab} \;=\; \{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\} \qquad M_{bc} \;=\; \{0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\}$$

$$M_{cd} \;=\; \{\frac{\left(a^2+b^2-c^2\right)\left(a^4-a^2\,b^2-2\,a^2\,c^2-b^2\,c^2+c^4\right)}{2\,b^2\,(-a+b-c)\,(a+b-c)\,(-a+b+c)\,(a+b+c)}, \frac{\left(-a^2+b^2+c^2\right)\left(a^2+b^2-c^2\right)}{2\,(a-b-c)\,(a+b-c)\,(a-b+c)\,(a+b+c)},$$
$$\frac{-a^6+3\,a^4\,b^2-3\,a^2\,b^4+b^6+3\,a^4\,c^2-4\,a^2\,b^2\,c^2-3\,b^4\,c^2-3\,a^2\,c^4+b^2\,c^4+c^6}{2\,b^2\,(-a+b-c)\,(a+b-c)\,(-a+b+c)\,(a+b+c)}\}$$

$$M_{ad} \;=\; \{\frac{a^6+a^4\,b^2-3\,a^2\,b^4+b^6-3\,a^4\,c^2-4\,a^2\,b^2\,c^2-3\,b^4\,c^2+3\,a^2\,c^4+3\,b^2\,c^4-c^6}{2\,b^2\,(-a+b-c)\,(a+b-c)\,(-a+b+c)\,(a+b+c)},$$
$$\frac{\left(-a^2+b^2+c^2\right)\left(a^2+b^2-c^2\right)}{2\,(a-b-c)\,(a+b-c)\,(a-b+c)\,(a+b+c)}, \frac{\left(-a^2+b^2+c^2\right)\left(a^4-a^2\,b^2-2\,a^2\,c^2-b^2\,c^2+c^4\right)}{2\,b^2\,(-a+b-c)\,(a+b-c)\,(-a+b+c)\,(a+b+c)}\}$$

Dessin = Dessin $\cup \{P_{ab}, P_{ad}, P_{bc}, P_{cd}\} = \{A, B, C, D, L, L_1, M_{ab}, M_{ad}, M_{bc}, M_{cd}, P_{ab}, P_{ad}, P_{bc}, P_{cd}\}$
Le repère barycentrique choisi est A, B, C .
Les points composés sont $P_{ab}, P_{bc}, P_{cd}, P_{ad}$.
La projection du point L sur la droite (CD) est le point P_{cd} de coordonnées barycentriques

$$P_{cd} \;=\{\frac{-\left(a^2+b^2-c^2\right)\left(a^4-a^2\,b^2-2\,a^2\,c^2-b^2\,c^2+c^4\right)}{4\,b^4\,c^2}, \frac{\left(a^2-b^2-c^2\right)\left(a^2+b^2-c^2\right)}{4\,b^2\,c^2},$$
$$\frac{\left(a^2-b^2-c^2\right)\left(a^4-b^4-2\,a^2\,c^2-2\,b^2\,c^2+c^4\right)}{4\,b^4\,c^2}\}$$

La projection du point L sur la droite (AD) est le point P_{ad} de coordonnées barycentriques

$$P_{ad} \;=\{\frac{-\left(a^2+b^2-c^2\right)\left(a^4-2\,a^2\,b^2-b^4-2\,a^2\,c^2+c^4\right)}{4\,a^2\,b^4}, \frac{\left(a^2-b^2-c^2\right)\left(a^2+b^2-c^2\right)}{4\,a^2\,b^2},$$
$$\frac{\left(a^2-b^2-c^2\right)\left(a^4-a^2\,b^2-2\,a^2\,c^2-b^2\,c^2+c^4\right)}{4\,a^2\,b^4}\}$$

La projection du point L sur la droite (AB) est le point P_{ab} de coordonnées barycentriques

$$P_{ab} = \{\frac{(a+b-c)\ (a-b+c)\ (-a+b+c)\ (a+b+c)}{4\,b^2\,c^2}, \frac{\left(-a^2+b^2+c^2\right)^2}{4\,b^2\,c^2}, 0\}$$

La projection du point L sur la droite (BC) est le point P_{bc} de coordonnées barycentriques

$$P_{bc} = \{0, \frac{\left(a^2+b^2-c^2\right)^2}{4\,a^2\,b^2}, \frac{(-a+b+c)\ (a+b-c)\ (a-b+c)\ (a+b+c)}{4\,a^2\,b^2}\}$$

Equation du cercle Γ_1 passant par les points P_{cd}, P_{ad}, P_{ab}:

$$\begin{aligned}0 &= \left(a^2-b^2-c^2\right)^2 X^2 - (a-b-c)\ (a+b-c)\ (a-b+c)\ (a+b+c)\ Y^2 \\ &+ \left(a^2+b^2-c^2\right)^2 Z^2 - 4\,a^2\,b^2\,Y\,Z + 2\,\left(a^4\,3\,b^4 - 2\,a^2\,c^2 + c^4\right)\ X\,Z - 4\,b^2\,c^2\,X\,Y\end{aligned}$$

Les coordonnées du centre de Γ_1 sont

$$\begin{aligned}&\{\frac{a^6+a^4\,b^2-3\,a^2\,b^4+b^6-3\,a^4\,c^2-4\,a^2\,b^2\,c^2-3\,b^4\,c^2+3\,a^2\,c^4+3\,b^2\,c^4-c^6}{4\,b^2\ (a-b-c)\ (a+b-c)\ (a-b+c)\ (a+b+c)}, \\ &\frac{-b^2\ \left(a^2-b^2+c^2\right)}{2\ (a-b-c)\ (a+b-c)\ (a-b+c)\ (a+b+c)}, \\ &\frac{-a^6+3\,a^4\,b^2-3\,a^2\,b^4+b^6+3\,a^4\,c^2-4\,a^2\,b^2\,c^2-3\,b^4\,c^2-3\,a^2\,c^4+b^2\,c^4+c^6}{4\,b^2\ (a-b-c)\ (a+b-c)\ (a-b+c)\ (a+b+c)}\}\end{aligned}$$

Le rayon au carré de ce cercle a pour valeur

$$R^2_{P_{cd},P_{ad},P_{ab}} = \frac{Num(R^2_{P_{cd},P_{ad},P_{ab}})}{16\,b^2\ (a-b-c)\ (a+b-c)\ (a-b+c)\ (a+b+c)}$$

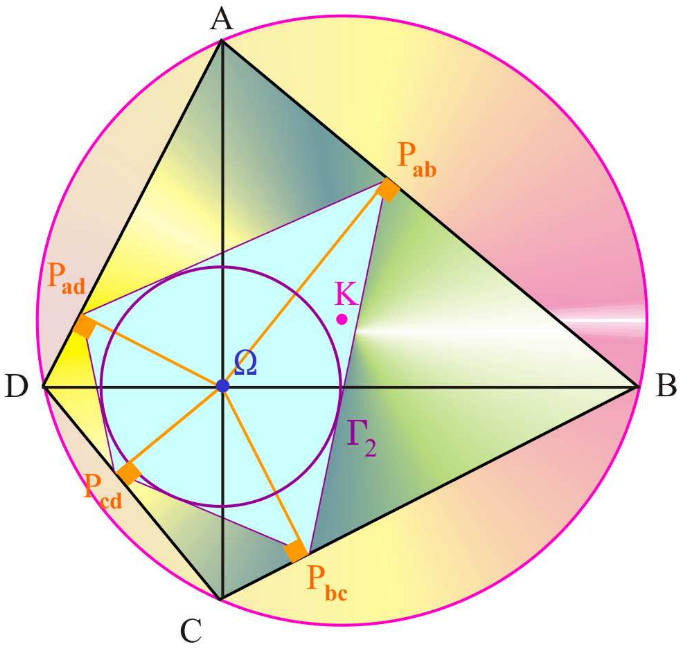
avec

$$\begin{aligned}Num(R^2_{P_{cd},P_{ad},P_{ab}}) &= -a^8+2\,a^6\,b^2-2\,a^2\,b^6+b^8+4\,a^6\,c^2-2\,a^4\,b^2\,c^2-4\,a^2\,b^4\,c^2-2\,b^6\,c^2 \\ &- 6\,a^4\,c^4-2\,a^2\,b^2\,c^4+4\,a^2\,c^6+2\,b^2\,c^6-c^8\end{aligned}$$

On vérifie sans difficultés que les coordonnées barycentriques des points $M_{ab}, M_{ad}, M_{bc}, M_{cd}$ et P_{bc} satisfont l'équation du cercle.
Dessin = Dessin $\cup \{K, M\} = \{A, B, C, D, K, L, L_1, M, M_{ab}, M_{ad}, M_{bc}, M_{cd}, P_{ab}, P_{ad}, P_{bc}, P_{cd}\}$
Le repère barycentrique choisi est A, B, C .
Soit M un point quelconque destiné à devenir le centre du cercle tangent au quadrilatère $P_{ab}, P_{ad}, P_{bc}, P_{cd}$.
Les points composés sont M, K, avec K centre du cercle circonscrit au triangle ABC .
On déduit les coordonnées barycentriques des points composés:

$$M = \{x, y, 1-x-y\}$$

$$\begin{aligned}K = \{&\frac{a^2\ \left(a^2-b^2-c^2\right)}{(a-b-c)\ (a+b-c)\ (a-b+c)\ (a+b+c)}, \frac{b^2\ \left(-a^2+b^2-c^2\right)}{(-a+b-c)\ (a+b-c)\ (-a+b+c)\ (a+b+c)}, \\ &\frac{c^2\ \left(a^2+b^2-c^2\right)}{(-a+b+c)\ (a+b-c)\ (a-b+c)\ (a+b+c)}\}\end{aligned}$$



Dessin = Dessin $\cup \{R_1, R_2, R_3, R_4\} = \{A, B, C, D, K, L, L_1, M, M_{ab}, M_{ad}, M_{bc}, M_{cd}, P_{ab}, P_{ad}, P_{bc}, P_{cd}, R_1, R_2, R_3, R_4\}$
Le repère barycentrique choisi est A, B, C .
Les points composés sont R_1, R_2, R_3, R_4 .
La projection du point M sur la droite $(P_{ad}P_{ab})$ est le point R_1 de coordonnées barycentriques

$$R_1 = \{\frac{Num_x(R_1)}{8\,a^2\,b^4\,c^2}, \frac{Num_y(R_1)}{8\,a^2\,b^2\,c^2}, \frac{Num_z(R_1)}{8\,a^2\,b^4}\}$$

avec

$$\begin{aligned}Num_x(R_1) = & -a^6\,b^2 + 3\,a^4\,b^4 + a^2\,b^6 - 3\,b^8 - a^6\,c^2 + 2\,a^4\,b^2\,c^2 + 3\,a^2\,b^4\,c^2 + 8\,b^6\,c^2 + 3\,a^4\,c^4 - a^2\,b^2\,c^4 - 6\,b^4\,c^4\\ & - 3\,a^2\,c^6 + c^8 - 4\,a^2\,b^6\,x + 4\,b^8\,x + 4\,a^2\,b^4\,c^2\,x - 8\,b^6\,c^2\,x + 4\,b^4\,c^4\,x - 4\,a^2\,b^6\,y + 4\,b^8\,y - 12\,b^6\,c^2\,y\\ & + 4\,a^2\,b^2\,c^4\,y + 12\,b^4\,c^4\,y - 4\,b^2\,c^6\,y\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}Num_y(R_1) = & \, a^6 - 3\,a^4\,b^2 - a^2\,b^4 + 3\,b^6 - a^4\,c^2 + 2\,a^2\,b^2\,c^2 - 5\,b^4\,c^2 - a^2\,c^4 + b^2\,c^4 + c^6 + 4\,a^2\,b^4\,x - 4\,b^6\,x\\ & + 4\,b^4\,c^2\,x + 4\,a^2\,b^4\,y - 4\,b^6\,y + 4\,a^2\,b^2\,c^2\,y + 8\,b^4\,c^2\,y - 4\,b^2\,c^4\,y\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}Num_z(R_1) = & \, a^6 - a^4\,b^2 + 3\,a^2\,b^4 - 3\,b^6 - 3\,a^4\,c^2 + 2\,a^2\,b^2\,c^2 + 5\,b^4\,c^2 + 3\,a^2\,c^4 - b^2\,c^4 - c^6 - 4\,a^2\,b^4\,x + 4\,b^6\,x\\ & - 4\,b^4\,c^2\,x - 4\,a^2\,b^4\,y + 4\,b^6\,y - 4\,a^2\,b^2\,c^2\,y - 8\,b^4\,c^2\,y + 4\,b^2\,c^4\,y\end{aligned}$$

La projection du point M sur la droite $(P_{ab}P_{bc})$ est le point R_2 de coordonnées barycentriques

$$R_2 = \{\frac{Num_x(R_2)}{8\,b^4\,c^2}, \frac{Num_y(R_2)}{8\,a^2\,b^4\,c^2}, \frac{Num_z(R_2)}{8\,a^2\,b^4}\}$$

avec avec

$$\begin{aligned}Num_x(R_2) = & \, a^6 + a^4\,b^2 - a^2\,b^4 - b^6 - 3\,a^4\,c^2 - 2\,a^2\,b^2\,c^2 + b^4\,c^2 + 3\,a^2\,c^4 + b^2\,c^4 - c^6 - 4\,a^4\,b^2\,x + 4\,a^2\,b^4\,x\\ & + 8\,a^2\,b^2\,c^2\,x + 4\,b^4\,c^2\,x - 4\,b^2\,c^4\,x - 4\,a^4\,b^2\,y + 4\,a^2\,b^4\,y + 4\,a^2\,b^2\,c^2\,y\end{aligned}$$

$$Num_y(R_2) = -a^8 - a^6\,b^2 + a^4\,b^4 + a^2\,b^6 + 4\,a^6\,c^2 + 5\,a^4\,b^2\,c^2 + 2\,a^2\,b^4\,c^2 + b^6\,c^2 - 6\,a^4\,c^4 - 7\,a^2\,b^2\,c^4 - 3\,b^4\,c^4 + 4\,a^2\,c^6 + 3\,b^2\,c^6 - c^8 + 4\,a^6\,b^2\,x - 4\,a^4\,b^4\,x - 12\,a^4\,b^2\,c^2\,x + 12\,a^2\,b^2\,c^4\,x + 4\,b^4\,c^4\,x - 4\,b^2\,c^6\,x + 4\,a^6\,b^2\,y - 4\,a^4\,b^4\,y - 8\,a^4\,b^2\,c^2\,y + 4\,a^2\,b^4\,c^2\,y + 4\,a^2\,b^2\,c^4\,y$$

$$Num_z(R_2) = -a^6 - 3\,a^4\,b^2 + 5\,a^2\,b^4 - b^6 + 3\,a^4\,c^2 + 6\,a^2\,b^2\,c^2 + 3\,b^4\,c^2 - 3\,a^2\,c^4 - 3\,b^2\,c^4 + c^6 + 4\,a^4\,b^2\,x - 4\,a^2\,b^4\,x - 8\,a^2\,b^2\,c^2\,x - 4\,b^4\,c^2\,x + 4\,b^2\,c^4\,x + 4\,a^4\,b^2\,y - 4\,a^2\,b^4\,y - 4\,a^2\,b^2\,c^2\,y$$

La projection du point M sur la droite $(P_{bc}P_{cd})$ est le point R_3 de coordonnées barycentriques

$$R_3 = \{\frac{Num_x(R_3)}{8\,b^4\,c^2}, \frac{Num_y(R_3)}{8\,a^2\,b^2\,c^2}, \frac{Num_z(R_3)}{8\,a^2\,b^4\,c^2}\}$$

avec avec

$$Num_x(R_3) = -a^6 - a^4\,b^2 + a^2\,b^4 + b^6 + 3\,a^4\,c^2 + 2\,a^2\,b^2\,c^2 - b^4\,c^2 - 3\,a^2\,c^4 - b^2\,c^4 + c^6 + 4\,a^2\,b^4\,x - 4\,b^6\,x + 4\,b^4\,c^2\,x + 4\,a^4\,b^2\,y - 4\,a^2\,b^4\,y - 4\,a^2\,b^2\,c^2\,y$$

$$Num_y(R_3) = a^6 + a^4\,b^2 - a^2\,b^4 - b^6 - a^4\,c^2 + 2\,a^2\,b^2\,c^2 + 3\,b^4\,c^2 - a^2\,c^4 - 3\,b^2\,c^4 + c^6 - 4\,a^2\,b^4\,x + 4\,b^6\,x - 4\,b^4\,c^2\,x - 4\,a^4\,b^2\,y + 4\,a^2\,b^4\,y + 4\,a^2\,b^2\,c^2\,y$$

$$Num_z(R_3) = a^8 - 2\,a^4\,b^4 + b^8 - 3\,a^6\,c^2 - a^4\,b^2\,c^2 + 7\,a^2\,b^4\,c^2 - 3\,b^6\,c^2 + 3\,a^4\,c^4 + 2\,a^2\,b^2\,c^4 + 3\,b^4\,c^4 - a^2\,c^6 - b^2\,c^6 - 4\,a^4\,b^4\,x + 8\,a^2\,b^6\,x - 4\,b^8\,x - 4\,a^2\,b^4\,c^2\,x + 4\,b^6\,c^2\,x - 4\,a^6\,b^2\,y + 8\,a^4\,b^4\,y - 4\,a^2\,b^6\,y + 4\,a^4\,b^2\,c^2\,y - 4\,a^2\,b^4\,c^2\,y$$

La projection du point M sur la droite $(P_{cd}P_{ad})$ est le point R_4 de coordonnées barycentriques

$$R_4 = \{\frac{Num_x(R_4}{8\,a^2\,b^6\,c^2}, \frac{Num_y(R_4)}{8\,a^2\,b^4\,c^2}, \frac{Num_z(R_4)}{8\,a^2\,b^6\,c^2}\}$$

avec

$$Num_x(R_4) = -a^{10} - a^8\,b^2 + a^6\,b^4 + a^4\,b^6 + 5\,a^8\,c^2 + 7\,a^6\,b^2\,c^2 + 4\,a^4\,b^4\,c^2 + 3\,a^2\,b^6\,c^2 + b^8\,c^2 - 10\,a^6\,c^4 - 15\,a^4\,b^2\,c^4 - 11\,a^2\,b^4\,c^4 - 4\,b^6\,c^4 + 10\,a^4\,c^6 + 13\,a^2\,b^2\,c^6 + 6\,b^4\,c^6 - 5\,a^2\,c^8 - 4\,b^2\,c^8 + c^{10} + 4\,a^8\,b^2\,x - 4\,a^6\,b^4\,x - 16\,a^6\,b^2\,c^2\,x + 4\,a^2\,b^6\,c^2\,x + 24\,a^4\,b^2\,c^4\,x + 12\,a^2\,b^4\,c^4\,x + 4\,b^6\,c^4\,x - 16\,a^2\,b^2\,c^6\,x - 8\,b^4\,c^6\,x + 4\,b^2\,c^8\,x + 4\,a^{10}\,y - 4\,a^8\,b^2\,y - 20\,a^8\,c^2\,y + 40\,a^6\,c^4\,y + 24\,a^4\,b^2\,c^4\,y + 12\,a^2\,b^4\,c^4\,y + 4\,b^6\,c^4\,y - 40\,a^4\,c^6\,y - 32\,a^2\,b^2\,c^6\,y - 12\,b^4\,c^6\,y + 20\,a^2\,c^8\,y + 12\,b^2\,c^8\,y - 4\,c^{10}\,y$$

$$Num_y(R_4) = a^8 + a^6\,b^2 - a^4\,b^4 - a^2\,b^6 - 4\,a^6\,c^2 - 5\,a^4\,b^2\,c^2 - 2\,a^2\,b^4\,c^2 - b^6\,c^2 + 6\,a^4\,c^4 + 7\,a^2\,b^2\,c^4 + 3\,b^4\,c^4 - 4\,a^2\,c^6 - 3\,b^2\,c^6 + c^8 - 4\,a^6\,b^2\,x + 4\,a^4\,b^4\,x + 12\,a^4\,b^2\,c^2\,x - 12\,a^2\,b^2\,c^4\,x - 4\,b^4\,c^4\,x + 4\,b^2\,c^6\,x - 4\,a^8\,y + 4\,a^6\,b^2\,y + 16\,a^6\,c^2\,y + 4\,a^2\,b^4\,c^2\,y - 24\,a^4\,c^4\,y - 12\,a^2\,b^2\,c^4\,y - 4\,b^4\,c^4\,y + 16\,a^2\,c^6\,y + 8\,b^2\,c^6\,y - 4\,c^8\,y$$

$$Num_z(R_4) = +a^{10} - 2\,a^6\,b^4 + a^2\,b^8 - 5\,a^8\,c^2 - 3\,a^6\,b^2\,c^2 + a^4\,b^4\,c^2 + 7\,a^2\,b^6\,c^2 + 10\,a^6\,c^4 + 9\,a^4\,b^2\,c^4 + 4\,a^2\,b^4\,c^4 + b^6\,c^4 - 10\,a^4\,c^6 - 9\,a^2\,b^2\,c^6 - 3\,b^4\,c^6 + 5\,a^2\,c^8 + 3\,b^2\,c^8 - c^{10} - 4\,a^8\,b^2\,x + 8\,a^6\,b^4\,x - 4\,a^4\,b^6\,x + 16\,a^6\,b^2\,c^2\,x - 12\,a^4\,b^4\,c^2\,x - 4\,a^2\,b^6\,c^2\,x - 24\,a^4\,b^2\,c^4\,x + 16\,a^2\,b^2\,c^6\,x + 4\,b^4\,c^6\,x - 4\,b^2\,c^8\,x - 4\,a^{10}\,y + 8\,a^8\,b^2\,y - 4\,a^6\,b^4\,y + 20\,a^8\,c^2\,y - 16\,a^6\,b^2\,c^2\,y - 4\,a^2\,b^6\,c^2\,y - 40\,a^6\,c^4\,y + 40\,a^4\,c^6\,y + 16\,a^2\,b^2\,c^6\,y + 4\,b^4\,c^6\,y - 20\,a^2\,c^8\,y - 8\,b^2\,c^8\,y + 4\,c^{10}\,y$$

On doit avoir

$$\begin{aligned}
0 &= MR_1^2 - MR_2^2 \\
&= (-1+x+y)\left(a^4 - b^4 - 2\,a^2\,c^2 + c^4 - 2\,a^2\,b^2\,x + 2\,b^4\,x + 2\,b^2\,c^2\,x - 2\,a^2\,b^2\,y + 2\,b^4\,y - 2\,b^2\,c^2\,y\right) \\
0 &= MR_2^2 - MR_3^2 \\
&= x\left(a^4 + 2\,a^2\,b^2 + b^4 - 2\,a^2\,c^2 - 2\,b^2\,c^2 + c^4 - 2\,a^2\,b^2\,x - 2\,b^4\,x + 2\,b^2\,c^2\,x - 4\,a^2\,b^2\,y\right) \\
0 &= MR_3^2 - MR_4^2 \\
&= \left(-a^2 - b^2 + c^2 + 2\,b^2\,x + 2\,a^2\,y - 2\,c^2\,y\right)\left(a^2\,b^2\,x - b^4\,x - b^2\,c^2\,x + a^4\,y - a^2\,b^2\,y - 2\,a^2\,c^2\,y - b^2\,c^2\,y + c^4\,y\right)
\end{aligned}$$

Il résulte que

$$x = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2\,b^2} \qquad y = 0$$

donc, on obtient

$$\begin{aligned}
R_1 = \{&\frac{(-a+b+c)\,(a+b-c)\,(a-b+c)\,(a+b+c)\,\left(a^2+b^2-c^2\right)\,\left(b^2+c^2\right)}{8\,a^2\,b^4\,c^2}, \\
&\frac{\left(a^2-b^2-c^2\right)\,\left(a^2+b^2-c^2\right)\,\left(a^2-b^2+c^2\right)}{8\,a^2\,b^2\,c^2}, \frac{(a-b-c)\,(a+b-c)\,(a-b+c)\,(a+b+c)\,\left(a^2-b^2-c^2\right)}{8\,a^2\,b^4}\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
R_2 = \{&\frac{(a-b+c)\,(a+b-c)\,(-a+b+c)\,(a+b+c)\,\left(a^2+b^2-c^2\right)}{8\,b^4\,c^2}, \\
&\frac{\left(a^2-b^2-c^2\right)\,\left(a^2+b^2-c^2\right)\,\left(a^4-a^2\,b^2-2\,a^2\,c^2-b^2\,c^2+c^4\right)}{8\,a^2\,b^4\,c^2}, \\
&\frac{(a-b-c)\,(a+b-c)\,(a-b+c)\,(a+b+c)\,\left(a^2-b^2-c^2\right)}{8\,a^2\,b^4}\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
R_3 = \{&\frac{(a-b+c)\,(a+b-c)\,(-a+b+c)\,(a+b+c)\,\left(a^2+b^2-c^2\right)}{8\,b^4\,c^2}, \\
&\frac{\left(a^2-b^2-c^2\right)\,\left(a^2+b^2-c^2\right)\,\left(a^2-b^2+c^2\right)}{8\,a^2\,b^2\,c^2}, \\
&\frac{\left(a^2+b^2\right)\,(a-b-c)\,(a+b-c)\,(a-b+c)\,(a+b+c)\,\left(a^2-b^2-c^2\right)}{8\,a^2\,b^4\,c^2}\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
R_4 = \{&\frac{\left(a^2+b^2-c^2\right)\,R_4^*}{8\,a^2\,b^6\,c^2}, \frac{\left(-a^2+b^2+c^2\right)\,\left(a^2+b^2-c^2\right)\,\left(a^4-a^2\,b^2-2\,a^2\,c^2-b^2\,c^2+c^4\right)}{8\,a^2\,b^4\,c^2}, \\
&\frac{\left(-a^2+b^2+c^2\right)\,R_4^{**}}{8\,a^2\,b^6\,c^2}\}
\end{aligned}$$

avec

$$R_4^* = a^8 - 2\,a^6\,b^2 + a^4\,b^4 - 4\,a^6\,c^2 + 3\,a^4\,b^2\,c^2 + 4\,a^2\,b^4\,c^2 + b^6\,c^2 + 6\,a^4\,c^4 - b^4\,c^4 - 4\,a^2\,c^6 - b^2\,c^6 + c^8$$

$$R_4^{**} = a^8 - a^6\,b^2 - a^4\,b^4 + a^2\,b^6 - 4\,a^6\,c^2 + 4\,a^2\,b^4\,c^2 + 6\,a^4\,c^4 + 3\,a^2\,b^2\,c^4 + b^4\,c^4 - 4\,a^2\,c^6 - 2\,b^2\,c^6 + c^8$$

Equation du cercle Γ_2 passant par les points R_1, R_2, R_3:

$$0 = \left(a^2-b^2-c^2\right)^2 (a^8-2\,a^4\,b^4+b^8-4\,a^6\,c^2-4\,a^4\,b^2\,c^2+12\,a^2\,b^4\,c^2-4\,b^6\,c^2+6\,a^4\,c^4+8\,a^2\,b^2\,c^4+6\,b^4\,c^4$$
$$-4\,a^2\,c^6-4\,b^2\,c^6+c^8)\,X^2$$
$$+(a-b-c)^2\,(a+b-c)^2\,(a-b+c)^2\,(a+b+c)^2\,\left(a^2+b^2-2\,a\,c+c^2\right)\,\left(a^2+b^2+2\,a\,c+c^2\right)\,Y^2$$
$$+\left(a^2+b^2-c^2\right)^2 (a^8-4\,a^6\,b^2+6\,a^4\,b^4-4\,a^2\,b^6+b^8-4\,a^6\,c^2+8\,a^4\,b^2\,c^2+12\,a^2\,b^4\,c^2+6\,a^4\,c^4$$
$$-4\,a^2\,b^2\,c^4-2\,b^4\,c^4-4\,a^2\,c^6+c^8)\,Z^2$$
$$+2\,(a-b-c)\,(a+b-c)\,(a-b+c)\,(a+b+c)\,\left(a^2-b^2-c^2\right)^2\left(a^2+b^2-c^2\right)^2 Y\,Z$$
$$+2\,\left(a^2-b^2-c^2\right)\,\left(a^2+b^2-c^2\right)\,(a^8-2\,a^6\,b^2+2\,a^2\,b^6-b^8-4\,a^6\,c^2+2\,a^4\,b^2\,c^2+16\,a^2\,b^4\,c^2+2\,b^6\,c^2$$
$$+6\,a^4\,c^4+2\,a^2\,b^2\,c^4-4\,a^2\,c^6-2\,b^2\,c^6+c^8)\,X\,Z$$
$$+2\,(a-b-c)\,(a+b-c)\,(a-b+c)\,(a+b+c)\,\left(a^2-b^2-c^2\right)^2\left(a^2+b^2-c^2\right)^2 X\,Y$$

Les coordonnées du centre Ω de Γ_2 sont

$$\Omega = \{\frac{a^2+b^2-c^2}{2\,b^2}, 0, \frac{-a^2+b^2+c^2}{2\,b^2}\}$$

Le rayon au carré de ce cercle a pour valeur

$$R^2_{R_1,R_2,R_3} = \frac{(-a+b+c)\,(a+b-c)\,(a-b+c)\,(a+b+c)\,\left(a^2-b^2-c^2\right)^2\left(a^2+b^2-c^2\right)^2}{64\,a^2\,b^6\,c^2}$$

Dessin = Dessin $\cup\{\Omega\} = \{A, B, C, D, K, L, L_1, M, M_{ab}, M_{ad}, M_{bc}, M_{cd}, \Omega, P_{ab}, P_{ad}, P_{bc}, P_{cd},$
$R_1, R_2, R_3, R_4\}$
Le repère barycentrique choisi est A, B, C .
Le point composé est Ω .
On déduit les coordonnées barycentriques du point composé:

$$\Omega \;=\; \{\frac{a^2+b^2-c^2}{2\,b^2}, 0, \frac{-a^2+b^2+c^2}{2\,b^2}\}$$

donc Ω est l'anticentre L.
La distance ΩR_4^2 est égale à

$$\Omega R_4^2 = \frac{(-a+b+c)\,(a+b-c)\,(a-b+c)\,(a+b+c)\,\left(a^2-b^2-c^2\right)^2\left(a^2+b^2-c^2\right)^2}{64\,a^2\,b^6\,c^2}$$

donc le cercle Γ_2 est tangent aux côtés du quadrilatère $P_{ab}, P_{ad}, P_{bc}, P_{cd}$.
La distance ΩK^2 est égale à

$$\Omega K^2 \;=\; \frac{Num(\Omega K^2)}{4\,b^2\,(a-b-c)\,(a+b-c)\,(a-b+c)\,(a+b+c)}$$

avec

$$Num(\Omega K^2) = a^8-2\,a^6\,b^2+2\,a^2\,b^6-b^8-4\,a^6\,c^2+2\,a^4\,b^2\,c^2-4\,a^2\,b^4\,c^2+2\,b^6\,c^2+6\,a^4\,c^4$$
$$+2\,a^2\,b^2\,c^4-4\,a^2\,c^6-2\,b^2\,c^6+c^8$$

CHAPITRE

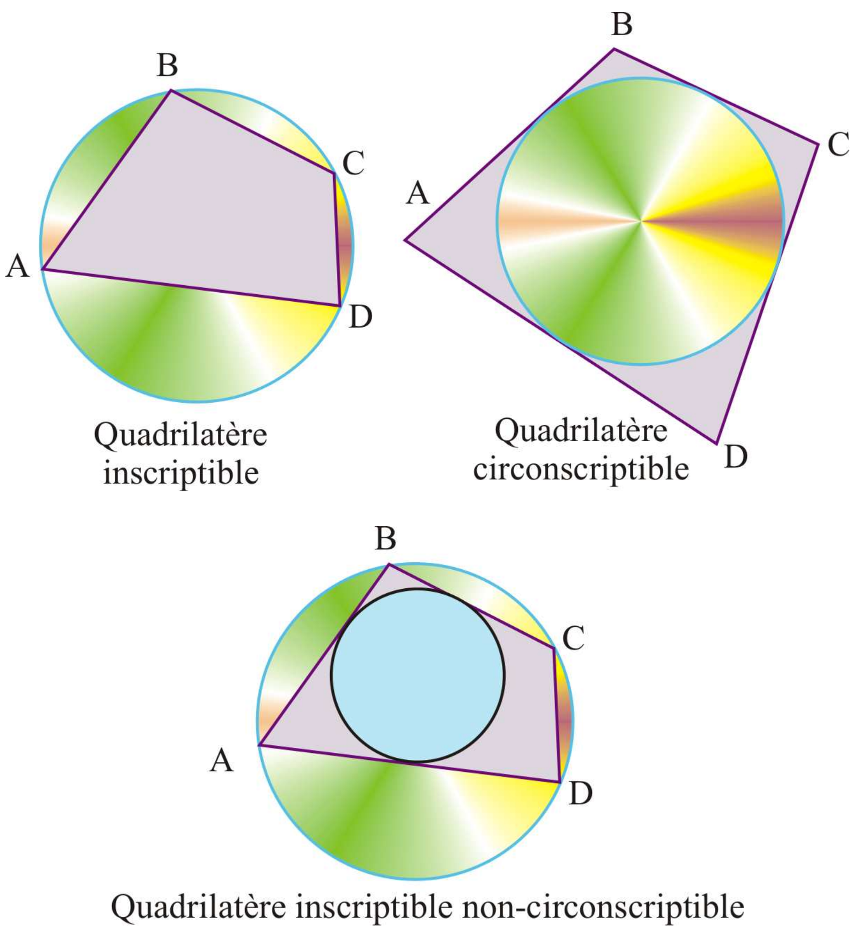
4

Quadrilatère bicentrique

4 Quadrilatère bicentrique

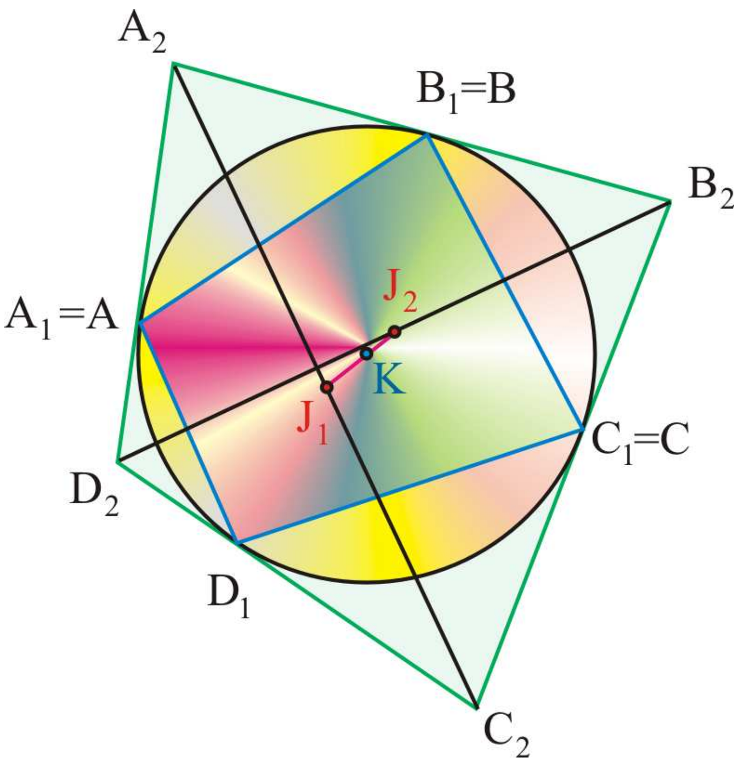
4.1 Quadrilatère circonscriptible

Un quadrilatère dont les sommets appartiennent à un même cercle est appelé *quadrilatère inscriptible* (en anglais "cyclic quadrilateral"). Un quadrilatère dont les quatre côtés sont tangents à un même cercle est dit *circonscriptible* à ce cercle.



Exercice 4.1.1 *Un théorème de Newton*
La droite passant par les milieux des diagonales d'un quadrilatère circonscriptible contient le centre du cercle inscrit.

Solution:



On pose

$$\lambda = -a^4 + 2\,a^2\,b^2 - b^4 + 2\,a^2\,c^2 + 2\,b^2\,c^2 - c^4 = (-a+b+c)\,(a+b-c)\,(a-b+c)\,(a+b+c) > 0$$

Dessin $=\{A, B, C, D, K\}$
Le repère barycentrique choisi est $A_1 = A, B_1 = B, C_1 = C$.
Les points composés sont K, D .
Les coordonnées barycentriques des points composés sont:

$$K = \{\frac{a^2\,\left(a^2-b^2-c^2\right)}{\lambda}, \frac{b^2\,\left(-a^2+b^2-c^2\right)}{\lambda}, \frac{c^2\,\left(-a^2-b^2+c^2\right)}{\lambda}\}$$

$$D = \{\frac{b^2+a^2\,t}{b^2+a^2\,t+b^2\,t-c^2\,t+a^2\,t^2}, \frac{t\,\left(b^2+a^2\,t\right)}{b^2+a^2\,t+b^2\,t-c^2\,t+a^2\,t^2}, \frac{-c^2\,t}{b^2+a^2\,t+b^2\,t-c^2\,t+a^2\,t^2}\}$$

Dessin = Dessin $\cup\{M_1, M_2, M_3, M_4\} = \{A, B, C, D, K, M_1, M_2, M_3, M_4\}$
Le repère barycentrique choisi est A, B, C .

Les points composés sont M_1, M_2, M_3, M_4 .
Un point M_1 situé sur la perpendiculaire à (AK) passant par A est

$$M_1 = \{1 + b^2 - c^2, -b^2, c^2\}$$

Un point M_2 situé sur la perpendiculaire à (BK) passant par B est

$$M_2 = \{a^2, 1 - a^2 + c^2, -c^2\}$$

Un point M_3 situé sur la perpendiculaire à (CK) passant par C est

$$M_3 = \{-a^2, b^2, 1 + a^2 - b^2\}$$

Un point M_4 situé sur la perpendiculaire à (DK) passant par D est

$$M_4 = \{\frac{b^2 + b^4 - b^2\,c^2 + a^2\,t + 2\,a^2\,b^2\,t + a^4\,t^2}{b^2 + a^2\,t + b^2\,t - c^2\,t + a^2\,t^2}, \frac{-b^4 + b^2\,t - 2\,a^2\,b^2\,t + a^2\,t^2 - a^4\,t^2 + a^2\,c^2\,t^2}{b^2 + a^2\,t + b^2\,t - c^2\,t + a^2\,t^2}, \frac{c^2\,\left(b^2 - t - a^2\,t^2\right)}{b^2 + a^2\,t + b^2\,t - c^2\,t + a^2\,t^2}\}$$

Dessin = Dessin $\cup \{A_2\} = \{A, A_2, B, C, D, K, M_1, M_2, M_3, M_4\}$
Détermination du point A_2 :
Soit A_2 le point $(AM_1) \cap (BM_2)$. Le point A_2 est composé.
Comme $A_2 \in (AM_1)$, on a, en choisissant l'inconnue nu_1

$$\overrightarrow{OA_2} = nu_1\ \overrightarrow{OA} + (1 - nu_1)\ \overrightarrow{OM_1}$$

On déduit:

$$\overrightarrow{OA_2} = a(1)\ \overrightarrow{OA} + a(2)\ \overrightarrow{OB} + a(3)\ \overrightarrow{OC}$$

avec

$$a(1) = 1 + b^2 - c^2 - b^2\,nu_1 + c^2\,nu_1$$

$$a(2) = b^2\ (-1 + nu_1)$$

$$a(3) = c^2\ (1 - nu_1)$$

Comme $A_2 \in (BM_2)$, on a, en choisissant l'inconnue mu_1

$$\overrightarrow{OA_2} = mu_1\ \overrightarrow{OB} + (1 - mu_1)\ \overrightarrow{OM_2}$$

On déduit:

$$\overrightarrow{OA_2} = b(1)\ \overrightarrow{OA} + b(2)\ \overrightarrow{OB} + b(3)\ \overrightarrow{OC}$$

avec

$$b(1) = a^2\ (1 - mu_1)$$

$$b(2) = 1 - a^2 + c^2 + a^2\,mu_1 - c^2\,mu_1$$

$$b(3) = c^2\ (-1 + mu_1)$$

La résolution du système linéaire d'inconnues nu_1, mu_1 donne

$$nu_1 = \frac{1+a^2+b^2-c^2}{a^2+b^2-c^2} \qquad mu_1 = \frac{-1+a^2+b^2-c^2}{a^2+b^2-c^2}$$

On déduit que:

$$A_2 = \{\frac{a^2}{a^2+b^2-c^2}, \frac{b^2}{a^2+b^2-c^2}, \frac{c^2}{-a^2-b^2+c^2}\}$$

Dessin = Dessin $\cup \{B_2\} = \{A, A_2, B, B_2, C, D, K, M_1, M_2, M_3, M_4\}$
Détermination du point B_2 :
Soit B_2 le point $(BM_2) \cap (CM_3)$. On obtient de même:

$$B_2 = \{\frac{a^2}{a^2-b^2-c^2}, \frac{b^2}{-a^2+b^2+c^2}, \frac{c^2}{-a^2+b^2+c^2}\}$$

Dessin = Dessin $\cup \{C_2\} = \{A, A_2, B, B_2, C, C_2, D, K, M_1, M_2, M_3, M_4\}$
Détermination du point C_2 :
Soit C_2 le point $(CM_3) \cap (DM_4)$. On obtient de même:

$$C_2 = \{\frac{a^2\,(b^2+a^2\,t)}{a^2\,b^2-b^4+b^2\,c^2+a^4\,t-a^2\,b^2\,t-a^2\,c^2\,t}, \frac{-b^2\,(b^2+a^2\,t)}{a^2\,b^2-b^4+b^2\,c^2+a^4\,t-a^2\,b^2\,t-a^2\,c^2\,t}, \frac{c^2\,(b^2-a^2\,t)}{a^2\,b^2-b^4+b^2\,c^2+a^4\,t-a^2\,b^2\,t-a^2\,c^2\,t}\}$$

Dessin = Dessin $\cup \{D_2\} = \{A, A_2, B, B_2, C, C_2, D, D_2, K, M_1, M_2, M_3, M_4\}$
Détermination du point D_2 :
Soit D_2 le point $(DM_4) \cap (AM_1)$. On obtient de même:

$$D_2 = \{\frac{2\,b^2+a^2\,t}{2\,b^2+a^2\,t+b^2\,t-c^2\,t}, \frac{b^2\,t}{2\,b^2+a^2\,t+b^2\,t-c^2\,t}, \frac{-c^2\,t}{2\,b^2+a^2\,t+b^2\,t-c^2\,t}\}$$

Dessin = Dessin $\cup \{J_1, J_2\} = \{A, A_2, B, B_2, C, C_2, D, D_2, J_1, J_2, K, M_1, M_2, M_3, M_4\}$
Le repère barycentrique choisi est A, B, C .
Les points composés sont J_1, J_2 .
On obtient:

$$J_1 = \{\frac{a^4\,(b^2+a^2\,t-c^2\,t)}{(a^2+b^2-c^2)\,(a^2\,b^2-b^4+b^2\,c^2+a^4\,t-a^2\,b^2\,t-a^2\,c^2\,t)}, \frac{-b^4\,(b^2-c^2+a^2\,t)}{(a^2+b^2-c^2)\,(a^2\,b^2-b^4+b^2\,c^2+a^4\,t-a^2\,b^2\,t-a^2\,c^2\,t)}, \frac{c^2\,(b^4-b^2\,c^2-a^4\,t+a^2\,c^2\,t)}{(a^2+b^2-c^2)\,(a^2\,b^2-b^4+b^2\,c^2+a^4\,t-a^2\,b^2\,t-a^2\,c^2\,t)}\}$$

$$J_2 = \{\frac{2\,a^2\,b^2-b^4-b^2\,c^2+a^4\,t-a^2\,c^2\,t}{(a^2-b^2-c^2)\,(2\,b^2+a^2\,t+b^2\,t-c^2\,t)}, \frac{b^4\,(1+t)}{(-a^2+b^2+c^2)\,(2\,b^2+a^2\,t+b^2\,t-c^2\,t)}, \frac{c^2\,(b^2+a^2\,t-c^2\,t)}{(-a^2+b^2+c^2)\,(2\,b^2+a^2\,t+b^2\,t-c^2\,t)}\}$$

On a ainsi

$$\overrightarrow{J_1K} = \frac{a^2\,\left(a^2-b^2-c^2\right)\,\left(2\,b^2+a^2\,t+b^2\,t-c^2\,t\right)}{b^2\,\left(a^4-2\,a^2\,b^2+b^4-2\,a^2\,c^2-2\,b^2\,c^2+c^4\right)}\,\overrightarrow{J_1J_2}$$

Nota:
Le carré de l'aire du quadrilatère $ABCD$ a pour valeur:

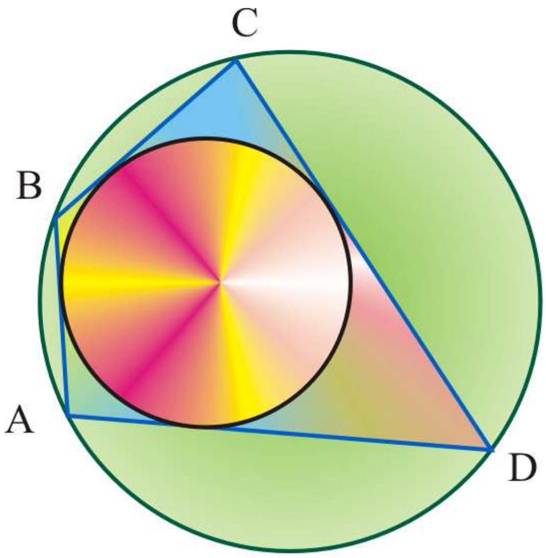
$$aire(ABCD)^2 \;=\; \frac{(-a+b+c)\,(a+b-c)\,(a-b+c)\,(a+b+c)\,\left(b^2+a^2\,t-c^2\,t\right)^2}{16\,(b^2+a^2\,t+b^2\,t-c^2\,t+a^2\,t^2)^2}$$

Le carré de l'aire du quadrilatère $A_2B_2C_2D_2$ a pour valeur:

$$aire(A_2B_2C_2D_2)^2$$
$$= \frac{4\,a^4\,b^8\,(-a+b+c)\,(a+b-c)\,c^4\,(a-b+c)\,(a+b+c)\,\left(b^2+a^2\,t-c^2\,t\right)^2}{(a^2-b^2-c^2)^2\,(a^2+b^2-c^2)^2\,(2\,b^2+a^2\,t+b^2\,t-c^2\,t)^2\,(a^2\,b^2-b^4+b^2\,c^2+a^4\,t-a^2\,b^2\,t-a^2\,c^2\,t)^2}$$

4.2 Quadrilatère bicentrique

Un *quadrilatère bicentrique* est un quadrilatère à la fois inscriptible et circonscriptible.



Quadrilatère bicentrique

Exercice 4.2.1 *un quadrilatère inscriptible particulier*

Soit Γ le cercle circonscrit à un triangle ABC (R rayon de Γ, K le centre) et D le point de Γ de coordonnées barycentriques

$$D = \{\frac{b^2+a^2\,t}{b^2+a^2\,t+b^2\,t-c^2\,t+a^2\,t^2}, \frac{t\,\left(b^2+a^2\,t\right)}{b^2+a^2\,t+b^2\,t-c^2\,t+a^2\,t^2}, \frac{-c^2\,t}{b^2+a^2\,t+b^2\,t-c^2\,t+a^2\,t^2}\}$$

le réel t étant solution de l'équation polynômiale en t

$$0 = a^2\,b^2-b^4-2\,a\,b^2\,c+b^2\,c^2+\left(a^4-a^2\,b^2-2\,a^3\,c-4\,a\,b^2\,c+b^2\,c^2+2\,a\,c^3-c^4\right)\,t-4\,a^3\,c\,t^2$$

Soit K_1 le point de coordonnées barycentriques

$$K_1 = \{\frac{a\,(a-c)}{a^2+b^2-c^2+2\,a^2\,t}, \frac{b^2+2\,a^2\,t}{a^2+b^2-c^2+2\,a^2\,t}, \frac{(a-c)\,c}{a^2+b^2-c^2+2\,a^2\,t}\}$$

1. *Montrer que K_1 est le centre d'un cercle Γ_1 tangent aux 4 côtés du quadrilatère $ABCD$. Préciser l'équation barycentrique de Γ_1 et son rayon r.*
2. *Montrer que*
$$2\,\frac{(R^2+KK_1^2)}{(R^2-KK_1^2)^2} = \frac{1}{r^2}$$
3. *Calculer l'aire du quadrilatère $ABCD$ en fonction de a, b, c. Vérifier que*
$$aire^2(ABCD) = AB\cdot BC\cdot CD\cdot AD$$

Solution:
Les valeurs de t solutions de l'équation polynômiale

$$0 = a^2\,b^2-b^4-2\,a\,b^2\,c+b^2\,c^2+\left(a^4-a^2\,b^2-2\,a^3\,c-4\,a\,b^2\,c+b^2\,c^2+2\,a\,c^3-c^4\right)\,t-4\,a^3\,c\,t^2$$

sont

$$t = \frac{a^4-a^2\,b^2-2\,a^3\,c-4\,a\,b^2\,c+b^2\,c^2+2\,a\,c^3-c^4+\pm\,(a-c)\,\sqrt{\delta}}{8\,a^3\,c}$$

avec

$$\delta = (a-b+c)\,(a+b+c)\,\left(a^4-a^2\,b^2-4\,a^3\,c+6\,a\,b^2\,c+6\,a^2\,c^2-b^2\,c^2-4\,a\,c^3+c^4\right)$$

Dans lce qui suit, nous n'optons pas pour ces valeurs explicites de t et préférons effectuer les calculs en substituant le plus souvent possible t^2 par l'expression

$$\frac{a^2\,b^2-b^4-2\,a\,b^2\,c+b^2\,c^2+a^4\,t-a^2\,b^2\,t-2\,a^3\,c\,t-4\,a\,b^2\,c\,t+b^2\,c^2\,t+2\,a\,c^3\,t-c^4\,t}{4\,a^3\,c}$$

Dessin $=\{A, B, C, D, J\}$
Le repère barycentrique choisi est A, B, C .
Les points composés sont D, J .

Les coordonnées barycentriques du point D deviennent:

$$D = \{\frac{-4\,a\,c\,\left(b^2+a^2\,t\right)}{(-a+b-c)\,(a+b+c)\,(b^2+a^2\,t-c^2\,t)}, \frac{-4\,a\,c\,t\,\left(b^2+a^2\,t\right)}{(-a+b-c)\,(a+b+c)\,(b^2+a^2\,t-c^2\,t)}, \frac{4\,a\,c^3\,t}{(a-b+c)\,(a+b+c)\,(-b^2-a^2\,t+c^2\,t)}\}$$

$$J = \{\frac{a}{a+c}, 0, \frac{c}{a+c}\}$$

(la droite (BJ) est la bissectrice intérieure issue du sommet B, on a $K_1 \in (BJ)$).
Dessin $=$ Dessin $\cup \{K_1\} = \{A, B, C, D, J, K_1\}$
Le repère barycentrique choisi est A, B, C .
Le point composé est K_1 .
On déduit les coordonnées barycentriques du point composé:

$$K_1 = \{\frac{a\,(a-c)}{a^2+b^2-c^2+2\,a^2\,t}, \frac{b^2+2\,a^2\,t}{a^2+b^2-c^2+2\,a^2\,t}, \frac{(a-c)\,c}{a^2+b^2-c^2+2\,a^2\,t}\}$$

Dessin $=$ Dessin $\cup \{P_{ab}, P_{ad}, P_{bc}, P_{cd}\} = \{A, B, C, D, J, K_1, P_{ab}, P_{ad}, P_{bc}, P_{cd}\}$
Le repère barycentrique choisi est A, B, C .
Les points composés sont $P_{ab}, P_{bc}, P_{cd}, P_{ad}$.
La projection du point K_1 sur la droite (CD) est le point P_{cd} de coordonnées barycentriques

$$P_{cd} = \{\frac{2\,a\,(a-c)\,\left(b^2+a^2\,t\right)}{(a^2+b^2-c^2+2\,a^2\,t)\,(b^2+a^2\,t-c^2\,t)}, \frac{(a-c)\,(a-b-c)\,(a+b-c)}{2\,c\,(a^2+b^2-c^2+2\,a^2\,t)}, \frac{Num_z(P_{cd})}{2\,a\,(a^2+b^2-c^2+2\,a^2\,t)\,(b^2+a^2\,t-c^2\,t)}\}$$

avec

$$Num_z(P_{cd}) = -a^3\,b^2+a\,b^4+a^2\,b^2\,c+b^4\,c+a\,b^2\,c^2-b^2\,c^3-a^5\,t+a^3\,b^2\,t+a^4\,c\,t+a^2\,b^2\,c\,t-2\,a^3\,c^2\,t + 3\,a\,b^2\,c^2\,t+2\,a^2\,c^3\,t-b^2\,c^3\,t-a\,c^4\,t+c^5\,t$$

La projection du point K_1 sur la droite (AD) est le point P_{ad} de coordonnées barycentriques

$$P_{ad} = \{\frac{Num_x(P_{ad})}{2\,c\,(-a^2-b^2+c^2-2\,a^2\,t)\,(-b^2-a^2\,t+c^2\,t)}, \frac{(a-c)\,(a-b-c)\,(a+b-c)}{2\,a\,(a^2+b^2-c^2+2\,a^2\,t)}, \frac{-2\,(a-c)\,c^3\,t}{(a^2+b^2-c^2+2\,a^2\,t)\,(b^2+a^2\,t-c^2\,t)}\}$$

avec

$$Num_x(P_{ad}) = a^3\,b^2-a\,b^4-a^2\,b^2\,c+3\,b^4\,c+3\,a\,b^2\,c^2-3\,b^2\,c^3+a^5\,t-a^3\,b^2\,t-a^4\,c\,t+3\,a^2\,b^2\,c\,t+2\,a^3\,c^2\,t + a\,b^2\,c^2\,t-2\,a^2\,c^3\,t+b^2\,c^3\,t+a\,c^4\,t-c^5\,t$$

La projection du point K_1 sur la droite (AB) est le point P_{ab} de coordonnées barycentriques

$$P_{ab} = \{\frac{(-a+c)\,(a-b+c)\,(a+b+c)}{2\,c\,(-a^2-b^2+c^2-2\,a^2\,t)}, \frac{a^3-a\,b^2-a^2\,c-b^2\,c-a\,c^2+c^3-4\,a^2\,c\,t}{2\,c\,(-a^2-b^2+c^2-2\,a^2\,t)}, 0\}$$

La projection du point K_1 sur la droite (BC) est le point P_{bc} de coordonnées barycentriques

$$P_{bc} = \{0, \frac{a^3+3\,a\,b^2-a^2\,c-b^2\,c-a\,c^2+c^3+4\,a^3\,t}{2\,a\,(a^2+b^2-c^2+2\,a^2\,t)}, \frac{(a-c)\,(a-b+c)\,(a+b+c)}{2\,a\,(a^2+b^2-c^2+2\,a^2\,t)}\}$$

La distance $K_1P_{ab}^2$ est égale à

$$\begin{aligned} K_1P_{ab}^2 &= \frac{(-a+b+c)\,(a+b-c)\,(a-b+c)\,(a+b+c)\,\left(b^2+a^2\,t+a\,c\,t\right)^2}{4\,(a^2+b^2-c^2+2\,a^2\,t)^2\,(b^2+a^2\,t+b^2\,t-c^2\,t+a^2\,t^2)} \\ &= \frac{(a-c)^2\,(-a+b+c)\,(a+b-c)\,(a-b+c)\,(a+b+c)}{4\,(a^2+b^2-c^2+2\,a^2\,t)^2} \end{aligned}$$

On vérifie avec le logiciel les égalités

$$K_1P_{bc}^2 = K_1P_{cd}^2 = K_1P_{ad}^2 = K_1P_{cd}^2$$

Equation du cercle passant par les points P_{cd}, P_{ad}, P_{ab}, P_{bc}:

$$\begin{aligned} 0 = {} & c^4\,(a^5\,b^2+2\,a^3\,b^4-3\,a\,b^6-3\,a^4\,b^2\,c-6\,a^2\,b^4\,c+b^6\,c+2\,a^3\,b^2\,c^2+6\,a\,b^4\,c^2+2\,a^2\,b^2\,c^3-2\,b^4\,c^3-3\,a\,b^2\,c^4 \\ & +b^2\,c^5+a^7\,t-2\,a^5\,b^2\,t+a^3\,b^4\,t-3\,a^6\,c\,t-2\,a^4\,b^2\,c\,t-11\,a^2\,b^4\,c\,t+a^5\,c^2\,t+4\,a^3\,b^2\,c^2\,t+7\,a\,b^4\,c^2\,t+5\,a^4\,c^3\,t \\ & +8\,a^2\,b^2\,c^3\,t-b^4\,c^3\,t-5\,a^3\,c^4\,t-10\,a\,b^2\,c^4\,t-a^2\,c^5\,t+2\,b^2\,c^5\,t+3\,a\,c^6\,t-c^7\,t)\,X^2 \\ & +a^2\,c^2\,(a-b+c)\,(a+b+c)\,(a^3\,b^2-a\,b^4-a^2\,b^2\,c-b^4\,c-a\,b^2\,c^2+b^2\,c^3+a^5\,t-a^3\,b^2\,t-a^4\,c\,t-a^2\,b^2\,c\,t \\ & -2\,a^3\,c^2\,t-3\,a\,b^2\,c^2\,t+2\,a^2\,c^3\,t+b^2\,c^3\,t+a\,c^4\,t-c^5\,t)\,Y^2 \\ & +a^4\,(a-b-c)\,(a+b-c)\,(a^3\,b^2-a\,b^4-a^2\,b^2\,c+3\,b^4\,c-a\,b^2\,c^2+b^2\,c^3+a^5\,t-a^3\,b^2\,t-a^4\,c\,t+3\,a^2\,b^2\,c\,t \\ & -2\,a^3\,c^2\,t+a\,b^2\,c^2\,t+2\,a^2\,c^3\,t+b^2\,c^3\,t+a\,c^4\,t-c^5\,t)\,Z^2 \\ & -2\,a^3\,(a-c)\,(a-b-c)\,(a+b-c)\,c\,(a-b+c)\,(a+b+c)\,\left(b^2+a^2\,t-c^2\,t\right)\,Y\,Z \\ & +(a-b-c)\,(a+b-c)\,(a^7\,b^2-2\,a^5\,b^4+a^3\,b^6-a^6\,b^2\,c+2\,a^4\,b^4\,c-a^2\,b^6\,c-a^5\,b^2\,c^2-2\,a^3\,b^4\,c^2-a\,b^6\,c^2 \\ & +a^4\,b^2\,c^3-2\,a^2\,b^4\,c^3+b^6\,c^3+a^3\,b^2\,c^4+2\,a\,b^4\,c^4-a^2\,b^2\,c^5-2\,b^4\,c^5-a\,b^2\,c^6+b^2\,c^7+a^9\,t-2\,a^7\,b^2\,t+a^5\,b^4\,t \\ & -a^8\,c\,t+2\,a^6\,b^2\,c\,t-a^4\,b^4\,c\,t-2\,a^7\,c^2\,t-2\,a^3\,b^4\,c^2\,t+2\,a^6\,c^3\,t-2\,a^2\,b^4\,c^3\,t+2\,a^5\,c^4\,t+5\,a\,b^4\,c^4\,t-2\,a^4\,c^5\,t \\ & -4\,a^2\,b^2\,c^5\,t-b^4\,c^5\,t-2\,a^3\,c^6\,t-6\,a\,b^2\,c^6\,t+2\,a^2\,c^7\,t+2\,b^2\,c^7\,t+a\,c^8\,t-c^9\,t)\,X\,Z \\ & +2\,a\,(a-c)\,c^3\,(a-b+c)\,(a+b+c)\,(a^2\,b^2-b^4-2\,a\,b^2\,c+b^2\,c^2+a^4\,t-a^2\,b^2\,t-2\,a^3\,c\,t-4\,a\,b^2\,c\,t+b^2\,c^2\,t \\ & +2\,a\,c^3\,t-c^4\,t)\,X\,Y \end{aligned}$$

Les coordonnées du centre K_1 sont

$$K_1 = \{\frac{a\,(a-c)}{a^2+b^2-c^2+2\,a^2\,t}, \frac{b^2+2\,a^2\,t}{a^2+b^2-c^2+2\,a^2\,t}, \frac{(a-c)\,c}{a^2+b^2-c^2+2\,a^2\,t}\}$$

Le rayon au carré de ce cercle a pour valeur

$$r^2 = R^2_{P_{cd},P_{ad},P_{ab}} = \frac{(a-c)^2\,(-a+b+c)\,(a+b-c)\,(a-b+c)\,(a+b+c)}{4\,(a^2+b^2-c^2+2\,a^2\,t)^2}$$

Dessin = Dessin $\cup \{K\} = \{A, B, C, D, J, K, K_1, P_{ab}, P_{ad}, P_{bc}, P_{cd}\}$
Le repère barycentrique choisi est A, B, C .

Les points composés sont K .
Les coordonnées barycentriques de K centre du cercle circonscrit sont classiques.
La distance KK_1^2 est égale à

$$KK_1^2 = \frac{a^2\,(a-c)\,c\,\left(2\,a^2\,b^2 - b^4 - 3\,a\,b^2\,c + b^2\,c^2 + 2\,a^4\,t - a^2\,b^2\,t - 2\,a^3\,c\,t - a\,b^2\,c\,t - 2\,a^2\,c^2\,t + 2\,a\,c^3\,t\right)}{(-a+b+c)\,(a+b-c)\,(a^2+b^2-c^2+2\,a^2\,t)^2}$$

La distance $R^2 = AK^2$ est égale à

$$AK^2 = \frac{a^2\,b^2\,c^2}{(-a+b+c)\,(a+b-c)\,(a-b+c)\,(a+b+c)}$$

La relation $2\,\frac{(R^2+KK_1^2)}{(R^2-KK_1^2)^2} = \frac{1}{r^2}$ s'obtient par évaluation préalable du membre de gauche dans lequel on substitue aussi souvent que possible t^2 par son expression polynômiale de degré 1.
L'aire au carré du quadrilatère $ABCD$ a alors pour valeur (cf la section "Aire du quadrilatère")

$$aire^2(ABCD) = \frac{a^2\,(-a+b+c)\,(a+b-c)\,c^2}{(a-b+c)\,(a+b+c)}$$

On a

$$CD^2 = \frac{\left(b^2+a^2\,t\right)^2}{b^2+a^2\,t+b^2\,t-c^2\,t+a^2\,t^2}$$
$$AD^2 = \frac{a^2\,c^2\,t^2}{b^2+a^2\,t+b^2\,t-c^2\,t+a^2\,t^2}$$

donc

$$AB^2\,BC^2\,CD^2\,AD^2 = \frac{a^4\,c^4\,t^2\,\left(b^2+a^2\,t\right)^2}{(b^2+a^2\,t+b^2\,t-c^2\,t+a^2\,t^2)^2}$$

On a

$$\begin{aligned}
&AB^2\,BC^2\,CD^2\,AD^2 - \frac{a^4\,(a-b-c)^2\,(a+b-c)^2\,c^4}{(a-b+c)^2\,(a+b+c)^2}\\
&= \frac{a^4\,c^4\,t^2\,\left(b^2+a^2\,t\right)^2}{(b^2+a^2\,t+b^2\,t-c^2\,t+a^2\,t^2)^2} - \frac{a^4\,(a-b-c)^2\,(a+b-c)^2\,c^4}{(a-b+c)^2\,(a+b+c)^2}\\
&= a^4\,c^4\,\frac{(a^2\,b^2 - b^4 - 2\,a\,b^2\,c + b^2\,c^2 + a^4\,t - a^2\,b^2\,t - 2\,a^3\,c\,t - 4\,a\,b^2\,c\,t + b^2\,c^2\,t + 2\,a\,c^3\,t - c^4\,t - 4\,a^3\,c\,t^2)\,\mu_*}{(a-b+c)^2\,(a+b+c)^2\,(b^2+a^2\,t+b^2\,t-c^2\,t+a^2\,t^2)^2}\\
&= 0
\end{aligned}$$

puisque

$$0 = a^2\,b^2 - b^4 - 2\,a\,b^2\,c + b^2\,c^2 + \left(a^4 - a^2\,b^2 - 2\,a^3\,c - 4\,a\,b^2\,c + b^2\,c^2 + 2\,a\,c^3 - c^4\right)\,t - 4\,a^3\,c\,t^2$$

avec

$$\begin{aligned}
\mu_* = {}& -a^2\,b^2 + b^4 + 2\,a\,b^2\,c - b^2\,c^2 - a^4\,t - a^2\,b^2\,t + 2\,b^4\,t + 2\,a^3\,c\,t - 3\,b^2\,c^2\,t - 2\,a\,c^3\,t + c^4\,t\\
&- 2\,a^4\,t^2 + 2\,a^2\,b^2\,t^2 - 2\,a^2\,c^2\,t^2
\end{aligned}$$

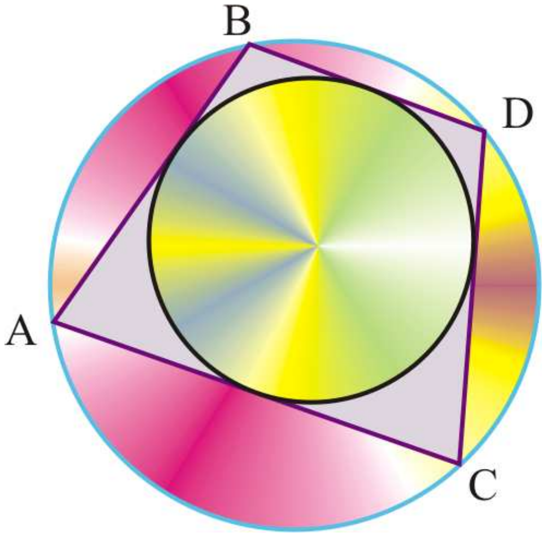
Exercice 4.2.2
Soient ABC un triangle (K le centre du cercle circonscrit au triangle), D et K_1 les points de coordonnées barycentriques

$$D = \{\frac{-(a-c)\ (a+c)}{b^2}, 1, \frac{(a-c)\ (a+c)}{b^2}\}$$

$$K_1 = \{\frac{a\ (a+c)}{(a-b+c)\ (a+b+c)}, \frac{b^2}{(-a+b-c)\ (a+b+c)}, \frac{c\ (a+c)}{(a-b+c)\ (a+b+c)}\}$$

Montrer que les points A, B, C, D sont cocycliques et que K_1 est centre d'un cercle tangent aux 4 cotés du quadrilatère $ABCD$.

On notera que les directions (BD) et (AC) sont parallèles.



Solution:
Dessin $= \{A, B, C, D\}$
Le repère barycentrique choisi est A, B, C .
Le point composé est D .
On a:

$$D = \{\frac{-(a-c)\ (a+c)}{b^2}, 1, \frac{(a-c)\ (a+c)}{b^2}\}$$

Dessin $=$ Dessin $\cup \{K_1\} = \{A, B, C, D, K_1\}$
Le repère barycentrique choisi est A, B, C .
Le point composé est K_1 .
On a:

$$K_1 = \{\frac{a\ (a+c)}{(a-b+c)\ (a+b+c)}, \frac{b^2}{(-a+b-c)\ (a+b+c)}, \frac{c\ (a+c)}{(a-b+c)\ (a+b+c)}\}$$

Dessin = Dessin $\cup \{P_{ab}, P_{ad}, P_{bc}, P_{cd}\} = \{A, B, C, D, K_1, P_{ab}, P_{ad}, P_{bc}, P_{cd}\}$
Le repère barycentrique choisi est A, B, C .
Les points composés sont $P_{ab}, P_{bc}, P_{cd}, P_{ad}$.
La projection du point K_1 sur la droite (CD) est le point P_{cd} de coordonnées barycentriques

$$P_{cd} = \{\frac{(a-c)^2\ (a+c)}{2\,b^2\,c}, \frac{-(a-c)}{2\,c}, \frac{(a+b-c)\ (a+c)\ (-a+b+c)}{2\,b^2\,c}\}$$

La projection du point K_1 sur la droite (AD) est le point P_{ad} de coordonnées barycentriques

$$P_{ad} = \{\frac{(a+b-c)\ (a+c)\ (-a+b+c)}{2\,a\,b^2}, \frac{a-c}{2\,a}, \frac{(a-c)^2\ (a+c)}{2\,a\,b^2}\}$$

La projection du point K_1 sur la droite (AB) est le point P_{ab} de coordonnées barycentriques

$$P_{ab} = \{\frac{a+c}{2\,c}, \frac{-a+c}{2\,c}, 0\}$$

La projection du point K_1 sur la droite (BC) est le point P_{bc} de coordonnées barycentriques

$$P_{bc} = \{0, \frac{a-c}{2\,a}, \frac{a+c}{2\,a}\}$$

La distance $K_1P_{ab}^2$ est égale à

$$K_1P_{ab}^2 = \frac{(a+b-c)\ (a+c)^2\ (-a+b+c)}{4\ (a-b+c)\ (a+b+c)}$$

On vérifie sans difficultés que

$$K_1P_{ab}^2 = K_1P_{bc}^2 = K_1P_{cd}^2 = K_1P_{ad}^2$$

Equation du cercle de centre K_1 passant par les points P_{cd}, P_{ad}, P_{ab}, P_{bc}:

$$\begin{aligned} 0 &= (a-c)^2\,X^2 + (a+c)^2\,Y^2 + (a-c)^2\,Z^2 \\ &- 2\ (a-c)\ (a+c)\ Y\,Z + 2\ \left(a^2 - 2\,b^2 - 2\,a\,c + c^2\right)\ X\,Z + 2\ (a-c)\ (a+c)\ X\,Y \end{aligned}$$

Le rayon au carré de ce cercle a pour valeur

$$R^2_{P_{cd},P_{ad},P_{ab}} = \frac{(-a+b+c)\ (a+b-c)\ (a+c)^2}{4\ (a-b+c)\ (a+b+c)}$$

Dessin = Dessin $\cup \{K\} = \{A, B, C, D, K, K_1, P_{ab}, P_{ad}, P_{bc}, P_{cd}\}$
Le repère barycentrique choisi est A, B, C .
Le point composé est K .
Les coordonnées barycentriques de K sont:

$$K = \{\frac{a^2\ \left(a^2-b^2-c^2\right)}{(a-b-c)\ (a+b-c)\ (a-b+c)\ (a+b+c)}, \frac{b^2\ \left(-a^2+b^2-c^2\right)}{(-a+b-c)\ (a+b-c)\ (-a+b+c)\ (a+b+c)}, \frac{c^2\ \left(a^2+b^2-c^2\right)}{(-a+b+c)\ (a+b-c)\ (a-b+c)\ (a+b+c)}\}$$

La distance KK_1^2 est égale à

$$KK_1^2 = \frac{a^2\,b^2\,c^2}{(-a+b+c)\,(a+b-c)\,(a-b+c)\,(a+b+c)}$$

Le rayon (au carré) R^2 du cercle circonscrit est égal à AK^2 avec

$$AK^2 = \frac{a^2\,b^2\,c^2}{(-a+b+c)\,(a+b-c)\,(a-b+c)\,(a+b+c)}$$

Donc K_1 appartient au cercle circonscrit au triangle ABC.

CHAPITRE 5

Quadrilatère equilic

5 Quadrilatère equilic

5.1 Le quadrilatère equilic

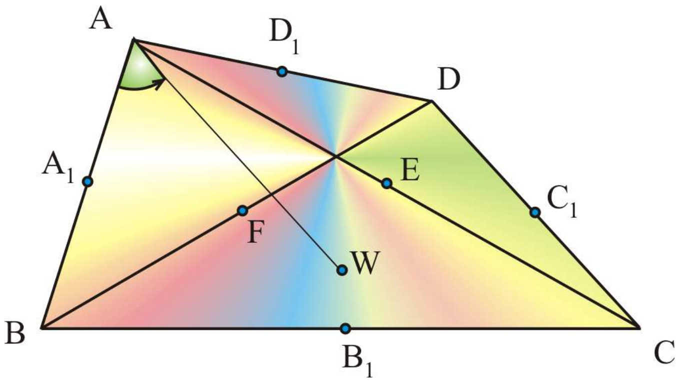
Un quadrilatère equilic est un quadrilatère $ABCD$ dans lequel $AB = CD$ et le total des angles $\angle A$ et $\angle D$ vaut 120 degrés.
Ce quadrilatère est étudié dans Gardfunkel, J., "The Equilic Quadrilateral.", Pi Mu Epsilon J. 7, pages 317-329 1981.
La démonstration automatique permet de démontrer sans difficultés les propriétés de tels quadrilatères. Après lecture de la démonstration ci-dessous, le lecteur pourra généraliser de tels résultats à des quadrilatères dotés de nouvelles conditions (modifier par exemple la condition $AB = CD$, modifier le total des angles $\angle A$ et $\angle D$, ...etc).

Exercice 5.1.1
Soient $ABCD$ un quadrilatère equilic, A_1, B_1, C_1, D_1 les milieux respectifs des segments $[AB]$, $[BC]$, $[CD]$ et $[DA]$, E le milieu de la diagonale $[AC]$, F le milieu de la diagonale $[BD]$.

1. *Déterminer les coordonnées barycentriques du point D en s'appuyant sur l'image du point B par la rotation de centre A, d'angle $\frac{\pi}{3}$. En déduire les coordonnées barycentriques des autres points.*
2. *Démontrer que les figures B_1EF et D_1EF sont des triangles équilatéraux.*
3. *Déterminer les coordonnées barycentriques du centre J du losange B_1ED_1F. Le point J coïncide-t-il avec le point d'intersection des droites (A_1C_1) et (B_1D_1) ?*

Solution:
1). Soit W l'image du point B par la rotation de centre A, d'angle $\frac{\pi}{3}$.
Dessin $=\{A, B, C, W\}$
Le repère barycentrique choisi est A, B, C .
Le point composé est W .
L'image du point B par la rotation d'angle $\frac{\pi}{3}$ de centre A est le point W de coordonnées barycentriques:

$$W = \{\frac{\sqrt{3}\,a^2 - \sqrt{3}\,b^2 + \sqrt{3}\,c^2 + \sqrt{\lambda}}{2\,\sqrt{\lambda}}, \frac{-\sqrt{3}\,a^2 + \sqrt{3}\,b^2 + \sqrt{3}\,c^2 + \sqrt{\lambda}}{2\,\sqrt{\lambda}}, \frac{-\sqrt{3}\,c^2}{\sqrt{\lambda}}\}$$



Dessin = Dessin $\cup \{D\} = \{A, B, C, D, W\}$
Le repère barycentrique choisi est A, B, C .
Le point composé est D .
Comme $\overrightarrow{BW} = \overrightarrow{CD}$, les coordonnées barycentriques du point composé sont:

$$D = \{\frac{\sqrt{3}\,a^2 - \sqrt{3}\,b^2 + \sqrt{3}\,c^2 + \sqrt{\lambda}}{2\sqrt{\lambda}}, \frac{-\sqrt{3}\,a^2 + \sqrt{3}\,b^2 + \sqrt{3}\,c^2 - \sqrt{\lambda}}{2\sqrt{\lambda}}, \frac{-\sqrt{3}\,c^2 + \sqrt{\lambda}}{\sqrt{\lambda}}\}$$

Dessin = Dessin $\cup \{A_1, B_1, C_1, D_1, E, F\} = \{A, A_1, B, B_1, C, C_1, D, D_1, E, F, W\}$
Le repère barycentrique choisi est A, B, C .
Les points composés sont A_1, B_1, C_1, D_1, E, F .
Les coordonnées barycentriques des points composés sont:

$$A_1 = \{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\}$$

$$B_1 = \{0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\}$$

$$C_1 = \{\frac{\sqrt{3}\,a^2 - \sqrt{3}\,b^2 + \sqrt{3}\,c^2 + \sqrt{\lambda}}{4\sqrt{\lambda}}, \frac{-\sqrt{3}\,a^2 + \sqrt{3}\,b^2 + \sqrt{3}\,c^2 - \sqrt{\lambda}}{4\sqrt{\lambda}}, \frac{-\sqrt{3}\,c^2 + 2\sqrt{\lambda}}{2\sqrt{\lambda}}\}$$

$$D_1 = \{\frac{\sqrt{3}\,a^2 - \sqrt{3}\,b^2 + \sqrt{3}\,c^2 + 3\sqrt{\lambda}}{4\sqrt{\lambda}}, \frac{-\sqrt{3}\,a^2 + \sqrt{3}\,b^2 + \sqrt{3}\,c^2 - \sqrt{\lambda}}{4\sqrt{\lambda}}, \frac{-\sqrt{3}\,c^2 + \sqrt{\lambda}}{2\sqrt{\lambda}}\}$$

$$E = \{\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}\}$$

$$F = \{\frac{\sqrt{3}\,a^2 - \sqrt{3}\,b^2 + \sqrt{3}\,c^2 + \sqrt{\lambda}}{4\sqrt{\lambda}}, \frac{-\sqrt{3}\,a^2 + \sqrt{3}\,b^2 + \sqrt{3}\,c^2 + \sqrt{\lambda}}{4\sqrt{\lambda}}, \frac{-\sqrt{3}\,c^2 + \sqrt{\lambda}}{2\sqrt{\lambda}}\}$$

La distance EF^2 est égale à

$$EF^2 = \frac{\sqrt{3}\,AC^2\,c^2\left(\sqrt{3}\,a^2 - \sqrt{3}\,b^2 + \sqrt{3}\,c^2 - \sqrt{\lambda}\right)}{8\lambda} + \frac{\sqrt{3}\,BC^2\,c^2\left(-\sqrt{3}\,a^2 + \sqrt{3}\,b^2 + \sqrt{3}\,c^2 + \sqrt{\lambda}\right)}{8\lambda}$$
$$+ \frac{AB^2\left(-\sqrt{3}\,a^2 + \sqrt{3}\,b^2 - \sqrt{3}\,c^2 + \sqrt{\lambda}\right)\left(-\sqrt{3}\,a^2 + \sqrt{3}\,b^2 + \sqrt{3}\,c^2 + \sqrt{\lambda}\right)}{16\lambda}$$

soit

$$EF^2 = \frac{c^2}{4}$$

La distance EB_1^2 est égale à

$$EB_1^2 = \frac{AB^2}{4} = \frac{c^2}{4}$$

La distance B_1F^2 est égale à

$$B_1F^2 = \frac{\sqrt{3}\,BC^2\,c^2\,\left(-\sqrt{3}\,a^2+\sqrt{3}\,b^2+\sqrt{3}\,c^2-\sqrt{\lambda}\right)}{8\,\lambda} + \frac{\sqrt{3}\,AC^2\,c^2\,\left(\sqrt{3}\,a^2-\sqrt{3}\,b^2+\sqrt{3}\,c^2+\sqrt{\lambda}\right)}{8\,\lambda}$$
$$+\frac{AB^2\,\left(\sqrt{3}\,a^2-\sqrt{3}\,b^2-\sqrt{3}\,c^2+\sqrt{\lambda}\right)\,\left(\sqrt{3}\,a^2-\sqrt{3}\,b^2+\sqrt{3}\,c^2+\sqrt{\lambda}\right)}{16\,\lambda}$$

soit

$$B_1F^2 = \frac{c^2}{4}$$

La distance D_1E^2 est égale à

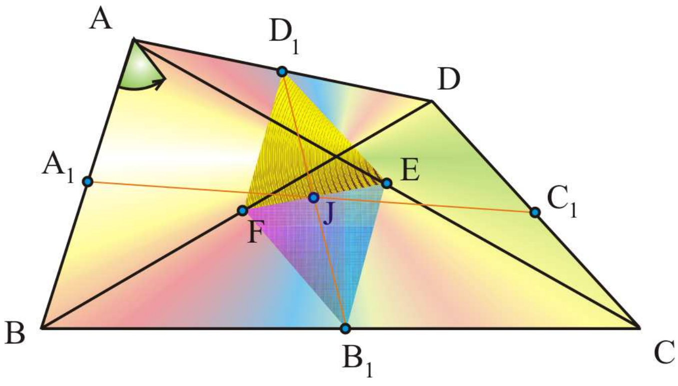
$$D_1E^2 = \frac{\sqrt{3}\,BC^2\,c^2\,\left(-\sqrt{3}\,a^2+\sqrt{3}\,b^2+\sqrt{3}\,c^2-\sqrt{\lambda}\right)}{8\,\lambda} + \frac{\sqrt{3}\,AC^2\,c^2\,\left(\sqrt{3}\,a^2-\sqrt{3}\,b^2+\sqrt{3}\,c^2+\sqrt{\lambda}\right)}{8\,\lambda}$$
$$+\frac{AB^2\,\left(\sqrt{3}\,a^2-\sqrt{3}\,b^2-\sqrt{3}\,c^2+\sqrt{\lambda}\right)\,\left(\sqrt{3}\,a^2-\sqrt{3}\,b^2+\sqrt{3}\,c^2+\sqrt{\lambda}\right)}{16\,\lambda}$$

soit

$$D_1E^2 = \frac{c^2}{4}$$

La distance D_1F^2 est égale à

$$D_1F^2 = \frac{AB^2}{4} = \frac{c^2}{4}$$



Dessin $=$ Dessin $\cup\{J\} = \{A, A_1, B, B_1, C, C_1, D, D_1, E, F, J, W\}$
Le repère barycentrique choisi est A, B, C .
Le point composé est J .

Les coordonnées barycentriques du point composé sont (moyenne des coordonnées barycentriques des points B_1 et D_1):

$$J = \{\frac{\sqrt{3}\,a^2 - \sqrt{3}\,b^2 + \sqrt{3}\,c^2 + 3\,\sqrt{\lambda}}{8\,\sqrt{\lambda}}, \frac{-\sqrt{3}\,a^2 + \sqrt{3}\,b^2 + \sqrt{3}\,c^2 + \sqrt{\lambda}}{8\,\sqrt{\lambda}}, \frac{-\sqrt{3}\,c^2 + 2\,\sqrt{\lambda}}{4\,\sqrt{\lambda}}\}$$

Dessin = Dessin $\cup \{J_1\} = \{A, A_1, B, B_1, C, C_1, D, D_1, E, F, J, J_1, W\}$
Détermination du point J_1 :
Soit J_1 le point $(A_1C_1) \cap (B_1D_1)$. Le point J_1 est composé.
Comme $J_1 \in (A_1C_1)$, on a, en choisissant l'inconnue ν_1

$$\overrightarrow{OJ_1} = \nu_1\ \overrightarrow{OA_1} + (1-\nu_1)\ \overrightarrow{OC_1}$$

On déduit:

$$\overrightarrow{OJ_1} = a(1)\ \overrightarrow{OA} + a(2)\ \overrightarrow{OB} + a(3)\ \overrightarrow{OC}$$

avec

$$a(1) = \frac{\sqrt{3}\,a^2 - \sqrt{3}\,b^2 + \sqrt{3}\,c^2 - \sqrt{3}\,a^2\,\nu_1 + \sqrt{3}\,b^2\,\nu_1 - \sqrt{3}\,c^2\,\nu_1 + \sqrt{\lambda} + \nu_1\,\sqrt{\lambda}}{4\,\sqrt{\lambda}}$$

$$a(2) = \frac{-\sqrt{3}\,a^2 + \sqrt{3}\,b^2 + \sqrt{3}\,c^2 + \sqrt{3}\,a^2\,\nu_1 - \sqrt{3}\,b^2\,\nu_1 - \sqrt{3}\,c^2\,\nu_1 - \sqrt{\lambda} + 3\,\nu_1\,\sqrt{\lambda}}{4\,\sqrt{\lambda}}$$

$$a(3) = \frac{(1-\nu_1)\,\left(-\sqrt{3}\,c^2 + 2\,\sqrt{\lambda}\right)}{2\,\sqrt{\lambda}}$$

Comme $J_1 \in (B_1D_1)$, on a, en choisissant l'inconnue μ_1

$$\overrightarrow{OJ_1} = \mu_1\ \overrightarrow{OB_1} + (1-\mu_1)\ \overrightarrow{OD_1}$$

On déduit:

$$\overrightarrow{OJ_1} = b(1)\ \overrightarrow{OA} + b(2)\ \overrightarrow{OB} + b(3)\ \overrightarrow{OC}$$

avec

$$b(1) = \frac{(1-\mu_1)\,\left(\sqrt{3}\,a^2 - \sqrt{3}\,b^2 + \sqrt{3}\,c^2 + 3\,\sqrt{\lambda}\right)}{4\,\sqrt{\lambda}}$$

$$b(2) = \frac{-\sqrt{3}\,a^2 + \sqrt{3}\,b^2 + \sqrt{3}\,c^2 + \sqrt{3}\,a^2\,\mu_1 - \sqrt{3}\,b^2\,\mu_1 - \sqrt{3}\,c^2\,\mu_1 - \sqrt{\lambda} + 3\,\mu_1\,\sqrt{\lambda}}{4\,\sqrt{\lambda}}$$

$$b(3) = \frac{-\sqrt{3}\,c^2 + \sqrt{3}\,c^2\,\mu_1 + \sqrt{\lambda}}{2\,\sqrt{\lambda}}$$

La résolution du système linéaire d'inconnues ν_1, μ_1 donne

$$\nu_1 = \frac{1}{2} \qquad \mu_1 = \frac{1}{2}$$

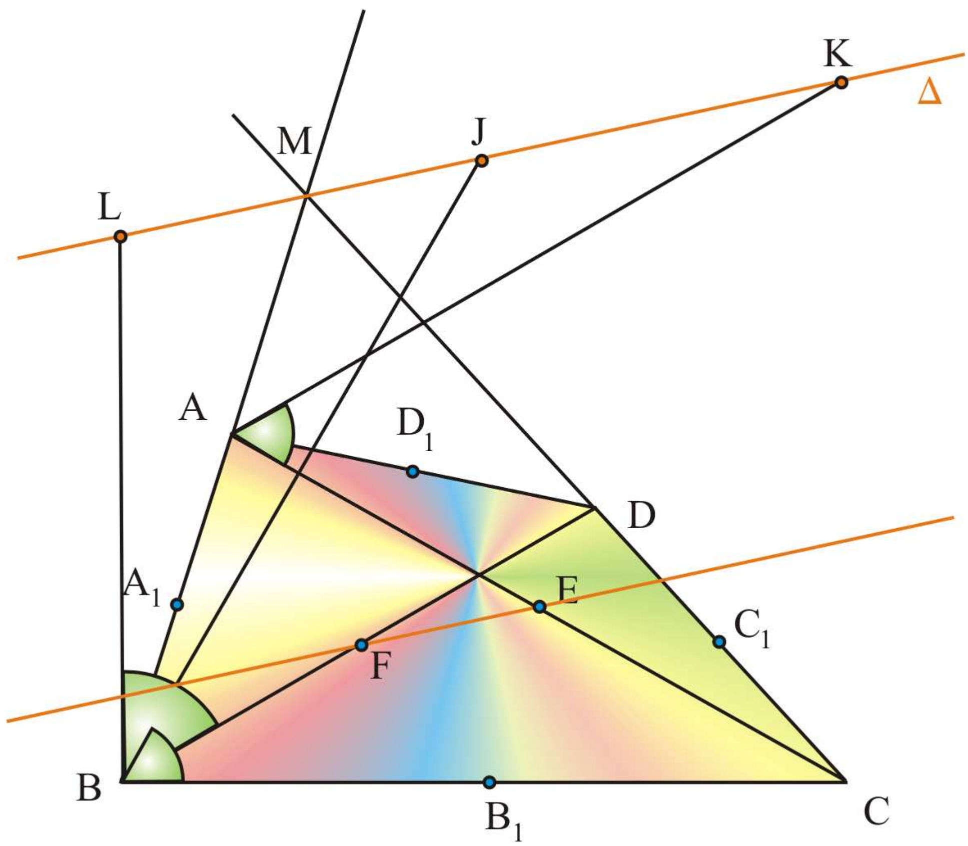
On déduit que:

$$J_1 = \{\frac{\sqrt{3}\,a^2 - \sqrt{3}\,b^2 + \sqrt{3}\,c^2 + 3\,\sqrt{\lambda}}{8\,\sqrt{\lambda}}, \frac{-\sqrt{3}\,a^2 + \sqrt{3}\,b^2 + \sqrt{3}\,c^2 + \sqrt{\lambda}}{8\,\sqrt{\lambda}}, \frac{-\sqrt{3}\,c^2 + 2\,\sqrt{\lambda}}{4\,\sqrt{\lambda}}\}$$

On a donc $J = J_1$, donc le point J coïncide avec le point d'intersection des droites (A_1C_1) et (B_1D_1).

Exercice 5.1.2
Soient $ABCD$ un quadrilatère equilic, M le point d'intersection des droites (AB) et (CD), E le milieu de la diagonale $[AC]$, F le milieu de la diagonale $[BD]$. Soient ACK (resp. BJC, BLD) le triangle équilatéral tourné vers l'extérieur qui s'appuie sur le côté $[AC]$ (resp. sur le côté $[BC]$, $[BD]$).

1. *Montrer que J est le milieu de KL.*
2. *Démontrer que les points M, J, L, K appartiennent à une même droite Δ.*
3. *Montrer que (EF) est parallèle à la droite (JKL).*
4. *Soit AM_1D le triangle équilatéral recouvrant le triangle ABC qui s'appuie sur le côté $[AD]$. Montrer que $M_1 \in \Delta$.*



Solution:
Soit W l'image du point B par la rotation de centre A, d'angle $\frac{\pi}{3}$.
Dessin $=\{A, B, C, W\}$

Le repère barycentrique choisi est A, B, C .
Le point composé est W .
L'image du point B par la rotation d'angle $\frac{\pi}{3}$ de centre A est le point W de coordonnées barycentriques:

$$W = \{\frac{\sqrt{3}\,a^2-\sqrt{3}\,b^2+\sqrt{3}\,c^2+\sqrt{\lambda}}{2\,\sqrt{\lambda}}, \frac{-\sqrt{3}\,a^2+\sqrt{3}\,b^2+\sqrt{3}\,c^2+\sqrt{\lambda}}{2\,\sqrt{\lambda}}, \frac{-\sqrt{3}\,c^2}{\sqrt{\lambda}}\}$$

Dessin = Dessin $\cup \{D\} = \{A, B, C, D, W\}$
Le repère barycentrique choisi est A, B, C .
Le point composé est D .
Comme $\overrightarrow{BW} = \overrightarrow{CD}$, les coordonnées barycentriques du point composé sont:

$$D = \{\frac{\sqrt{3}\,a^2-\sqrt{3}\,b^2+\sqrt{3}\,c^2+\sqrt{\lambda}}{2\,\sqrt{\lambda}}, \frac{-\sqrt{3}\,a^2+\sqrt{3}\,b^2+\sqrt{3}\,c^2-\sqrt{\lambda}}{2\,\sqrt{\lambda}}, \frac{-\sqrt{3}\,c^2+\sqrt{\lambda}}{\sqrt{\lambda}}\}$$

Dessin = Dessin $\cup \{M\} = \{A, B, C, D, M, W\}$
Détermination du point M :
Soit M le point $(AB) \cap (CD)$ .Le point M est composé.
On obtient:

$$M = \{\frac{3\,a^2-3\,b^2+3\,c^2+\sqrt{3}\,\sqrt{\lambda}}{6\,c^2}, \frac{-3\,a^2+3\,b^2+3\,c^2-\sqrt{3}\,\sqrt{\lambda}}{6\,c^2}, 0\}$$

Dessin = Dessin $\cup \{E, F\} = \{A, B, C, D, E, F, M, W\}$
Le repère barycentrique choisi est A, B, C .
Les points composés sont E, F .
Les coordonnées barycentriques des points composés sont:

$$E = \{\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}\}$$

$$F = \{\frac{\sqrt{3}\,a^2-\sqrt{3}\,b^2+\sqrt{3}\,c^2+\sqrt{\lambda}}{4\,\sqrt{\lambda}}, \frac{-\sqrt{3}\,a^2+\sqrt{3}\,b^2+\sqrt{3}\,c^2+\sqrt{\lambda}}{4\,\sqrt{\lambda}}, \frac{-\sqrt{3}\,c^2+\sqrt{\lambda}}{2\,\sqrt{\lambda}}\}$$

Dessin = Dessin $\cup \{J, K, L, M_1\} = \{A, B, C, D, E, F, J, K, L, M, M_1, W\}$
Le repère barycentrique choisi est A, B, C .
Les points composés sont K, J, L, M_1 .
L'image du point C par la rotation d'angle $\frac{\pi}{3}$ de centre A est le point K de coordonnées barycentriques:

$$K = \{\frac{\sqrt{3}\,a^2+\sqrt{3}\,b^2-\sqrt{3}\,c^2+\sqrt{\lambda}}{2\,\sqrt{\lambda}}, \frac{-\sqrt{3}\,b^2}{\sqrt{\lambda}}, \frac{-\sqrt{3}\,a^2+\sqrt{3}\,b^2+\sqrt{3}\,c^2+\sqrt{\lambda}}{2\,\sqrt{\lambda}}\}$$

L'image du point C par la rotation d'angle $\frac{\pi}{3}$ de centre B est le point J de coordonnées barycentriques:

$$J = \{\frac{\sqrt{3}\,a^2}{\sqrt{\lambda}}, \frac{-\sqrt{3}\,a^2-\sqrt{3}\,b^2+\sqrt{3}\,c^2+\sqrt{\lambda}}{2\,\sqrt{\lambda}}, \frac{-\sqrt{3}\,a^2+\sqrt{3}\,b^2-\sqrt{3}\,c^2+\sqrt{\lambda}}{2\,\sqrt{\lambda}}\}$$

L'image du point D par la rotation d'angle $\frac{\pi}{3}$ de centre B est le point L de coordonnées barycentriques:

$$L = \{\frac{3\,\sqrt{3}\,a^2-\sqrt{3}\,b^2+\sqrt{3}\,c^2-\sqrt{\lambda}}{2\,\sqrt{\lambda}}, \frac{-\sqrt{3}\,a^2+\sqrt{3}\,c^2+\sqrt{\lambda}}{\sqrt{\lambda}}, \frac{-\sqrt{3}\,a^2+\sqrt{3}\,b^2-3\,\sqrt{3}\,c^2+\sqrt{\lambda}}{2\,\sqrt{\lambda}}\}$$

L'image du point D par la rotation d'angle $\frac{\pi}{3}$ de centre B est le point M_1 de coordonnées barycentriques:

$$M_1 = \{\frac{\sqrt{3}\,a^2}{\sqrt{\lambda}}, \frac{-\sqrt{3}\,a^2 - \sqrt{3}\,b^2 + \sqrt{3}\,c^2 + \sqrt{\lambda}}{2\,\sqrt{\lambda}}, \frac{-\sqrt{3}\,a^2 + \sqrt{3}\,b^2 - \sqrt{3}\,c^2 + \sqrt{\lambda}}{2\,\sqrt{\lambda}}\}$$

1). Calculons le vecteur $\overrightarrow{KJ}$. On a:

$$\overrightarrow{KJ} = c(1)\ \overrightarrow{OA} + c(2)\ \overrightarrow{OB} + c(3)\ \overrightarrow{OC}$$

avec

$$c(1) = \frac{\sqrt{3}\,a^2 - \sqrt{3}\,b^2 + \sqrt{3}\,c^2 - \sqrt{\lambda}}{2\,\sqrt{\lambda}}$$

$$c(2) = \frac{-\sqrt{3}\,a^2 + \sqrt{3}\,b^2 + \sqrt{3}\,c^2 + \sqrt{\lambda}}{2\,\sqrt{\lambda}}$$

$$c(3) = \frac{-\sqrt{3}\,c^2}{\sqrt{\lambda}}$$

Calculons le vecteur $\overrightarrow{JL}$. On a:

$$\overrightarrow{JL} = d(1)\ \overrightarrow{OA} + d(2)\ \overrightarrow{OB} + d(3)\ \overrightarrow{OC}$$

avec

$$d(1) = \frac{-2\,\lambda + 2\,\left(\sqrt{3}\,a^2 - \sqrt{3}\,b^2 + \sqrt{3}\,c^2\right)\,\sqrt{\lambda}}{4\,\sqrt{\lambda}^2}$$

$$d(2) = \frac{2\,\lambda - 2\,\left(\sqrt{3}\,a^2 - \sqrt{3}\,b^2 - \sqrt{3}\,c^2\right)\,\sqrt{\lambda}}{4\,\sqrt{\lambda}^2}$$

$$d(3) = \frac{-\sqrt{3}\,c^2}{\sqrt{\lambda}}$$

On a ainsi

$$\overrightarrow{KJ} = \overrightarrow{JL}$$

2). On obtient de même

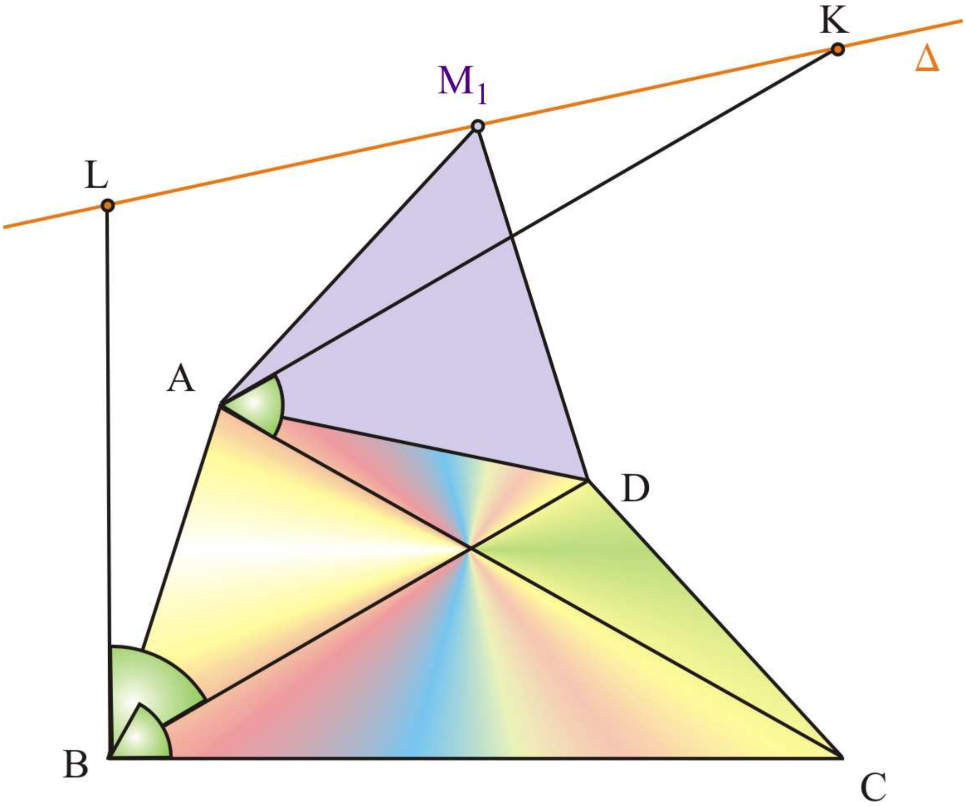
$$\overrightarrow{ML} = \frac{2\,a^4 - 4\,a^2\,b^2 + 2\,b^4 + 5\,a^2\,c^2 - 7\,b^2\,c^2 + 5\,c^4 + \sqrt{3}\,c^2\,\sqrt{\lambda}}{2\,\left(a^2 - b^2 - a\,c + c^2\right)\,\left(a^2 - b^2 + a\,c + c^2\right)}\ \overrightarrow{MJ}$$

3).

$$\overrightarrow{ML} = \frac{3\,a^2 - 3\,b^2 + 9\,c^2 - \sqrt{3}\,\sqrt{\lambda}}{3\,c^2}\ \overrightarrow{EF}$$

4).

$$\overrightarrow{M_1L} = \frac{c^2\,\left(3\,a^2 - 3\,b^2 + 3\,c^2 + \sqrt{3}\,\sqrt{\lambda}\right)}{2\,\left(a^2 - b^2 - a\,c + c^2\right)\,\left(a^2 - b^2 + a\,c + c^2\right)}\ \overrightarrow{MJ}$$


K
Δ
M1
L
A
D
B
C

Contents