Exercices

- Chaque partie est constituée d'exercices traités en travaux dirigés et d'exercices de révision (contenant les réponses) destinés à votre travail personnel.
- A l'examen, les calculettes seront interdites, un formulaire relatif aux formules des dérivées est fourni (voir dernière page).

Fiche I.

Calcul des dérivées

I. Exercice 1 : Réduire chacune des expressions ci-dessous en les ramenant à la forme $\ln(\,A(x)\,)$, avec $A(x)$ fonction à déterminer

1. $\ln(x+1) + \ln(x+2) - \ln(x+3)$
2. $\ln(x+a) + 2\,\ln(x+b) - \frac{1}{2}\,\ln(x+c)$
3. $\ln(x+1) - \frac{1}{2}\ln(x+2) - 5$

I. Exercice 2 : Calculer les dérivées des fonctions suivantes

1. $f_1(x) = 3\,x^4 - 5\,x^2 + 2$, $f_2(x) = \frac{1}{x^2}$, $f_3(x) = 5\,x^3 - e^x$
2. $g_1(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$, $g_2(x) = e^{-3\,x}$, $g_3(x) = \ln(x+1)$, $g_4(x) = x\ln(x) - x$
3. $h_1(x) = x^2\,\sin(x)$, $h_2(x) = \frac{x^3}{\cos(x)}$, $h_3(x) = \frac{x}{1-x^2}$

I. Exercice 3 : Calculer les dérivées des fonctions suivantes

1. $f_1(x) = \ln(3\,x+1)$, $f_2(x) = (2\,x^3 + x - 2)^4$, $f_3(x) = \cos^3(x)$
2. $g_1(x) = \frac{1}{(x^3+x-2)^4}$, $g_2(x) = e^{-3\,x^2}$, $g_3(x) = \sqrt{\ln(x+1)}$, $g_4(x) = \frac{1}{\sqrt{(x^3+x-2)}}$
3. $h_1(x) = x\,\sin^3(x) + \cos(x)$, $h_2(x) = \frac{x}{(1-x^2)^2}$

Exercices de révision

I. Exercice 4 : Calculer les dérivées des fonctions suivantes
$g_1(x) = \sin(\frac{2}{3\,x^2})$, $g_2(x) = \tan^3(x)$, $g_3(x) = \log(\sin(\frac{3}{1+x^2}))$, $g_4(x) = \frac{1}{\log^3(1+3\,x^2)}$

Réponse: $g_1'(x) = \frac{-4\,\cos(\frac{2}{3\,x^2})}{3\,x^3}$, $g_2'(x) = 3\,\frac{\tan^2(x)}{\cos^2(x)}$

$g_3'(x) = \frac{-6\,x\,\cos(\frac{3}{1+x^2})}{\sin(\frac{3}{1+x^2})\,(1+x^2)^2}$, $g_4'(x) = \frac{-18\,x}{(1+3\,x^2)\log^4(1+3\,x^2)}$

Fiche II.

La fonction arctan(x)

II. **Exercice 1 :** Compléter le tableau suivant

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin(x)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos(x)$					
$\tan(x)$					

Calculer $\arctan(x)$ pour $x = 0, \pm\frac{1}{\sqrt{3}}, \pm 1, \pm\sqrt{3}$.

II. **Exercice 2 :** Pour $x > 0$, on pose $y = \arctan(x) + \arctan(\frac{1}{x})$

1. Calculer y'.
2. En déduire que $y(x)$ est une fonction constante. Calculer la valeur de la constante en prenant $x = 1$.

II. **Exercice 3 :** En utilisant la formule du binôme de Newton, calculer successivement $(x + 2\,y)^4$, $(x - 2\,y)^4$ puis $(\frac{2\,x}{y} + \frac{y^2}{x})^5$.

Exercices de révision

II. **Exercice 4 :** En utilisant la formule du binôme de Newton, calculer $(\frac{x^2}{2\,y} + \frac{3\,y^2}{x})^3$ puis $(\frac{x^2}{2\,y} + \frac{3\,y^2}{x})^4$

Réponse: $\frac{9\,x^3}{4} + \frac{x^6}{8\,y^3} + \frac{27\,y^3}{2} + \frac{27\,y^6}{x^3}$,
$\frac{x^8}{16\,y^4} + \frac{3\,x^5}{2\,y} + \frac{27\,x^2\,y^2}{2} + \frac{54\,y^5}{x} + \frac{81\,y^8}{x^4}$

II. **Exercice 5 :** On pose $f(x) = \arctan(\frac{2\,x}{1-x^2})$ pour $-1 \leq x \leq 1$.

1. Calculer la dérivée de $\frac{2\,x}{1-x^2}$, puis la dérivée $f'(x)$.
2. En déduire que $f(x) = 2\arctan(x)$

Réponse: On a $\left(\frac{2\,x}{1-x^2}\right)' = \frac{2\left(1+x^2\right)}{\left(-1+x^2\right)^2}$ donc $y' = \frac{\frac{2\left(1+x^2\right)}{\left(-1+x^2\right)^2}}{1+\frac{4\,x^2}{\left(1-x^2\right)^2}} = \frac{2}{1+x^2}$.

On a aussi $\left(2\arctan(x)\right)' = \frac{2}{1+x^2}$.

Les dérivées des fonctions $f_1(x) = 2\arctan(x)$ et $f(x)$ sont égales. Ces deux fonctions diffèrent donc d'une constante que l'on détermine en choisissant $x = 0$

Fiche III.

Primitives

III. **Exercice 1 :** Calculer la valeur de $I = \displaystyle\int_0^1 (1-x)^3\,dx$ soit

1. en développant l'expression $(1-x)^3$.
2. en utilisant le changement de variables $u = (1-x)$

III. **Exercice 2 :** Calculer la valeur de $J = \displaystyle\int_0^1 x\,(1-x^2)^4\,dx$ en utilisant le changement de variables $u = \cdots\cdots$

III. **Exercice 3 :** Calculer $\displaystyle\int \frac{2\,x+1}{(x^2+x+1)^3}\,dx$ (utiliser le changement de variables $u = x^2+x+1$)

III. **Exercice 4 :** Calculer $\displaystyle\int \frac{3\,x^2+1}{\sqrt{x^3+x+1}}\,dx$

III. **Exercice 5 :** Calculer $\displaystyle\int \frac{\cos(x)}{\sin(x)+2}\,dx$, puis $\displaystyle\int \frac{\cos(x)}{\sin^2(x)}\,dx$

III. **Exercice 6 :** Calculer $\displaystyle\int \cos^3(x)\,dx$ (poser $u = \sin(x)$ et observer que $\cos^2(x) = 1-\sin^2(x)$).

III. **Exercice 7 :** Calculer $\displaystyle\int x\,\cos(x^2)\,dx$

III. **Exercice 8 :** Calculer $\displaystyle\int \frac{e^x}{e^x+1}\,dx$

III. **Exercice 9 :** Calculer $\displaystyle\int \tan(x)\,dx$

III. **Exercice 10 :** Calculer $\displaystyle\int \frac{e^x}{e^{2\,x}+1}\,dx$

III. **Exercice 11 :** En utilisant une intégration par parties, calculer

1. $\displaystyle\int x\ln(x)\,dx$
2. $\displaystyle\int x\arctan(x)\,dx$ (indication: on écrira $\frac{x^2}{1+x^2} = \frac{(x^2+1)-1}{1+x^2} = 1 - \frac{1}{1+x^2}$)

III. **Exercice 12 :** On pose

$$f(x) = \frac{2 + 6\,x + 5\,x^2}{(1 + x)\ (1 + 2\,x)\ (2 + 3\,x)}$$

1. Montrer qu'il existe des réels notés a, b et c tels que

$$f(x) = \frac{a}{1 + x} + \frac{b}{1 + 2\,x} - \frac{c}{2 + 3\,x}$$

   pour tout $x \neq -1, \neq \frac{-1}{2}, \neq \frac{-2}{3}$.

2. Calculer $\displaystyle\int f(x)\,dx$

Exercices de révision

III. **Exercice 13 :**

1. Montrer que $\frac{x^2-1}{x^2+1} = 1 - \frac{2}{x^2+1}$
2. En déduire $\displaystyle\int \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}\,dx$

Réponse: $\displaystyle\int \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}\,dx = \int \big(1 - \frac{2}{x^2 + 1}\big)\,dx\ = x - 2\,\text{arctan}(x)$

III. **Exercice 14 :** Calculer $J = \displaystyle\int \frac{e^x}{e^x + e^{-x}}\,dx$ (on posera $u = e^x$)

Réponse: On a $\frac{du}{dx} = e^x$, donc $du = e^x\,dx$. Ainsi $J = \displaystyle\int \frac{du}{u + \frac{1}{u}} = \int \frac{u\,du}{u^2 + 1}$.

On pose alors $v = 1 + u^2$, donc $J = \frac{1}{2}\displaystyle\int \frac{dv}{v} = \frac{1}{2}\ln(v) = \frac{1}{2}\ln(1 + u^2) = \frac{1}{2}\ln(1 + e^{2\,x})$

Fiche IV.

Equations différentielles du 1^{er} ordre

IV. **Exercice 1 :** Parmi les équations différentielles suivantes, indiquer celles qui sont linéaires

1. $f'(x) - 3\,f(x) = \ln(x) + 3$
2. $(x^2 + 1)\,f'(x) - f(x) = e^x + x$
3. $f'(x) - \frac{1}{f(x)} = 2$

4. $f'(x) - f^2(x) = \sin(x)$
5. $\big(f'(x)\big)^3 - f(x) = 2\,x$

IV. $\boxed{\textbf{Exercice 2 :}}$ Soit (E) l'équation différentielle

$$y'(x) - y(x) = x$$

définie sur R

1. Trouver **toutes les solutions** de l'équation homogène $y'(x) - y(x) = 0$
2. Déterminer **une solution particulière** de l'équation complète (E) de la forme $y = A\,x + B$.
3. En déduire **toutes les solutions** de l'équation différentielle (E).

IV. $\boxed{\textbf{Exercice 3 :}}$ Soit $P(x)$ un polynôme de degré 3.

1. Quel est le degré du polynôme dérivé $P'(x)$?
2. Quel est le degré du polynôme $P'(x) - P(x)$?
3. Quel est le degré du polynôme $P'(x) - (x^2 + 1)\,P(x)$?
4. Quel est le degré du polynôme $x^3\,P'(x) - P(x)$?
5. Que dire du degré du polynôme $(x + 1)\,P'(x) - P(x)$?

IV. $\boxed{\textbf{Exercice 4 :}}$ Soit (E) l'équation différentielle

$$x\,y'(x) + y(x) = 1 + 2\,x + 3\,x^2$$

définie sur R

1. Trouver **toutes les solutions** de l'équation sans second membre (=equation homogène).
2. Déterminer **une solution particulière** de l'équation complète.
3. En déduire **toutes les solutions** de l'équation différentielle (E).

IV. $\boxed{\textbf{Exercice 5 :}}$ Soit (E) l'équation différentielle

$$y'(x) + \tan(x)\,y(x) = x\,\cos(x)$$

définie sur $\left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[$.

1. Déterminer la solution générale de l'équation sans second membre.

2. En utilisant la méthode de variation de la constante, déterminer une solution particulière de l'équation complète.

3. En déduire toutes les solutions de l'équation différentielle (E).

IV. $\boxed{\textbf{Exercice 6 :}}$ Soit (E) l'équation différentielle

$$y'(x) - 2\,y(x) = 3\,x\,e^{x}$$

définie sur R.

1. Déterminer la solution générale de l'équation sans second membre.

2. Déterminer une solution particulière de l'équation complète de la forme $y(x) = P(x)\,e^{x}$ avec $P(x)$ polynome (on montrera que $P(x)$ vérifie l'équation différentielle $P'(x) - P(x) = 3\,x$ que l'on résoudra).

3. En déduire toutes les solutions de l'équation différentielle (E).

Exercices de révision

IV. $\boxed{\textbf{Exercice 7 :}}$ Soit (E) l'équation différentielle

$$y'(x) + \tan(x)\,y(x) = 2\,\sin(x)\,\cos(x)$$

définie sur $\left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.

1. Déterminer la solution générale de l'équation sans second membre.

2. En utilisant la méthode de variation de la constante, déterminer une solution particulière de l'équation complète.

3. En déduire toutes les solutions de l'équation différentielle (E).

<u>Réponse</u>: Equation homogène $y(x) = \lambda\,\cos(x)$ avec $\lambda \in \mathrm{R}$.
Variation de la constante $y(x) = \lambda(x)\,\cos(x)$.
On substitue dans $y'(x) + \tan(x)\,y(x)$ ce qui donne $y'(x) + \tan(x)\,y(x) = \lambda'(x)\,\cos(x)$.
Ainsi $\lambda'(x)\,\cos(x) = 2\,\sin(x)\,\cos(x)$ implique $\lambda(x) = -2\,\cos(x)$ donc $y(x) = \lambda(x)\,\cos(x) = -2\,\cos^2(x)$ est une solution particulière.
Solution générale: $y(x) = \lambda\,\cos(x) - 2\,\cos^2(x)$ avec $\lambda \in \mathrm{R}$.

IV. $\boxed{\textbf{Exercice 8 :}}$ Résoudre l'équation différentielle

$$x\,y(x) + \left(1 + x^2\right)\,y'(x) = \frac{-x}{1 + x^2}$$

<u>Réponse</u>: Equation homogène $y(x) = \frac{\lambda}{\sqrt{1+x^2}}$ avec $\lambda \in \mathrm{R}$.

Variation de la constante $y(x) = \frac{\lambda(x)}{\sqrt{1+x^2}}$.
On substitue dans $x\,y(x) + \left(1+x^2\right)\,y'(x)$ ce qui donne $x\,y(x) + \left(1+x^2\right)\,y'(x) = \left(1+x^2\right)\,\frac{\lambda'(x)}{\sqrt{1+x^2}}$.
Ainsi $\lambda'(x)\,\sqrt{1+x^2} = \frac{-x}{1+x^2}$ implique $\lambda'(x) = \frac{-x}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}$ donc $\lambda(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$. Ainsi $y(x) = \frac{\lambda(x)}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\,\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{1}{1+x^2}$ est une solution particulière.
Solution générale: $y(x) = \frac{\lambda}{\sqrt{1+x^2}} + \frac{1}{1+x^2}$ avec $\lambda \in \mathrm{R}$.

IV. **Exercice 9 :** Soit (E) l'équation différentielle

$$y'(x) + 3\,y(x) = x\,e^{-3\,x}$$

définie sur R.

1. Déterminer la solution générale de l'équation sans second membre.
2. Déterminer une solution particulière de l'équation complète de la forme $y(x) = P(x)\,e^{-3\,x}$ avec $P(x)$ polynôme (on montrera que $P(x)$ vérifie l'équation différentielle $P'(x) = x$ que l'on résoudra).
3. En déduire toutes les solutions de l'équation différentielle (E).

Réponse: $y(x) = \lambda\,e^{-3\,x} + \frac{x^2}{2}\,e^{-3\,x}$ avec $\lambda \in \mathrm{R}$.

Fiche V.
Equations différentielles linéaires du 2^{eme} ordre

V. **Exercice 1 :** Déterminer les solutions réelles des équations différentielles suivantes

$$\begin{aligned}
y'' - 3\,y' + 2\,y &= 0 && (H_1)\\
y'' - 4\,y' + 4\,y &= 0 && (H_2)\\
y'' + 3\,y' - 4\,y &= 0 && (H_3)\\
y'' + 2\,y' + y &= 0 && (H4)\\
y'' + y &= 0 && (H5)\\
y'' + 2\,y' + 4\,y &= 0 && (H6)
\end{aligned}$$

V. **Exercice 2 :** Déterminer les solutions réelles des équations différentielles suivantes

$$\begin{aligned}
&y'' - 3\,y' + 2\,y = 5 - 8\,x + 2\,x^2 && (Eq.1)\\
&y'' - 3\,y' + 2\,y = \sin(x) && (Eq.2)\\
&y'' - 3\,y' + 2\,y = 3\,(5 - 8\,x + 2\,x^2) + 2\sin(x) && (Eq.3)
\end{aligned}$$

V. $\boxed{\textbf{Exercice 3 :}}$ Déterminer les solutions réelles des équations différentielles suivantes

$$y'' + y' - 2\,y = x\,e^{-x} \qquad (Eq2.1)$$
$$y'' + y' - 2\,y = x\,e^{x} \qquad (Eq2.2)$$

V. $\boxed{\textbf{Exercice 4 :}}$ Déterminer les solutions réelles des équations différentielles suivantes

$$y'' - 4\,y' + 4\,y = x^2\,e^{x} \qquad (Eq3.1)$$
$$y'' - 4\,y' + 4\,y = x^2\,e^{2\,x} \qquad (Eq3.2)$$

V. $\boxed{\textbf{Exercice 5 :}}$ Soit l'équation différentielle (E)

$$y'' + y = e^{i\,x}$$

1. Déterminer toutes les solutions de (E).
2. En déduire toutes les solutions réelles de l'équation différentielle (E)

$$y'' + y = \cos(x)$$

Exercices de révision

V. $\boxed{\textbf{Exercice 6 :}}$ Déterminer les solutions réelles de l'équation différentielle

$$-6\,y(x) + 5\,y'(x) + y''(x) = -3 + 16\,x - 6\,x^2$$

Réponse: $y(x) = -x + x^2 + \lambda_1\,e^{-6\,x} + e^{x}\,\lambda_2$ avec $\lambda_1, \lambda_2 \in$ R.

V. $\boxed{\textbf{Exercice 7 :}}$ Déterminer les solutions réelles de l'équation différentielle

$$y''(x) - y'(x) - 2\,y(x) = 3\,e^{-x}$$

Réponse: $y(x) = \frac{-(1+3\,x)}{3}\,e^{-x} + \lambda_1\,e^{-x} + e^{2\,x}\,\lambda_2$ avec $\lambda_1, \lambda_2 \in$ R.