Exercices de TD

La liste d'exercices se présente comme suit:

- Le cours comprend 5 chapitres. Chaque chapitre est constitué d'exercices (exercices sans réponses) tous traités en travaux dirigés.
- Les exercices de révision (exercices avec réponses succintes) sont destinés au travail personnel de l'étudiant. Certains de ces exercices pourront être traités en TD, en fonction du temps disponible de la séance.
- La fin du polycopié présente un modèle possible de sujet d'examen.

Pour une bonne compréhension de cet enseignement, l'étudiant doit poser ses questions durant la séance de TD.

Chapitre 1

SYSTEMES LINEAIRES

1 Exercice 1 :

Résoudre les équations suivantes

$$3\,x = -4 \qquad \text{inconnue} \quad x \tag{1}$$
$$3\,x = 0 \qquad \text{inconnue} \quad x \tag{2}$$
$$0\,x = -2 \qquad \text{inconnue} \quad x \tag{3}$$
$$0\,x = 0 \qquad \text{inconnue} \quad x \tag{4}$$
$$2\,x + y = -4 \qquad \text{inconnues} \quad x, y \tag{5}$$
$$5\,x + 0\,y = 10 \qquad \text{inconnues} \quad x, y \tag{6}$$
$$2\,x + 4\,y + 2\,z = 8 \qquad \text{inconnues} \quad x, y, z \tag{7}$$
$$3\,x + 0\,y + 2\,z = 1 \qquad \text{inconnues} \quad x, y, z \tag{8}$$
$$0\,x + 0\,y + 2\,z = 2 \qquad \text{inconnues} \quad x, y, z \tag{9}$$

1 Exercice 2 :

Résoudre par la méthode du pivot (méthode du pivot de Gauss), le système linéaire d'inconnues x, y, z

$$\left\{\begin{array}{rrrr} x & -3\,y & -2\,z & = 1 \\ 2\,x & +y & +3\,z & = 2 \\ x & -2\,y & -2\,z & = -3 \end{array}\right.$$

1 Exercice 3 :

Résoudre par la méthode du pivot, le système linéaire d'inconnues x, y, z

$$\left\{\begin{array}{rrrr} x & -3\,y & -2\,z & = 1 \\ 2\,x & +y & -z & = -3 \\ 2\,x & +3\,y & -z & = -7 \end{array}\right.$$

1 Exercice 4 :
Résoudre par la méthode du pivot, le système linéaire d'inconnues x, y, z

$$\begin{cases} 2\,x & -3\,y & -2\,z & = 1 \\ 2\,x & +y & -2\,z & = 0 \\ 3\,x & -2\,y & -1\,z & = -1 \end{cases}$$

1 Exercice 5 :
Résoudre par la méthode du pivot, le système linéaire d'inconnues x, y, z

$$\begin{cases} 2\,x & -3\,y & -2\,z & = 1 \\ 5\,x & -4\,y & -3\,z & = 3 \end{cases}$$

1 Exercice 6 :
Résoudre par la méthode du pivot, le système linéaire d'inconnues x, y, z, t

$$\begin{cases} 2\,x & -3\,y & -2\,z & +3\,t & = 1 \\ 3\,x & -4\,y & -3\,z & +2\,t & = 3 \\ 3\,x & +y & -1\,z & +t & = 5 \end{cases}$$

<u>Exercices de révision:</u>

1 Exercice 7 :
Résoudre par la méthode du pivot, le système linéaire d'inconnues x, y, z, t

$$\begin{cases} x & -3\,y & -2\,z & +3\,t & = 1 \\ & -4\,y & -3\,z & +2\,t & = 3 \\ 3\,x & +y & & +t & = -5 \end{cases}$$

<u>Réponse</u>: $S = \{x = -\frac{3}{2} + \frac{z}{2},\quad y = -\frac{2}{3} - z,\quad t = \frac{1}{6} - \frac{z}{2},\quad z \in \mathbb{R}\}$
ou $S = \{x = -\frac{4}{3} - t,\quad y = -1 + 2\,t,\quad z = \frac{1}{3} - 2\,t,\quad t \in \mathbb{R}\}$
ou $S = \{y = -\frac{11}{3} - 2\,x,\quad t = -\frac{4}{3} - x,\quad z = 3 + 2\,x,\quad x \in \mathbb{R}\}$

1 Exercice 8 :
Résoudre par la méthode du pivot, le système linéaire d'inconnues x, y, z

$$\begin{cases} 3\,x & -2\,y & -2\,z & = 4 \\ 2\,x & +y & -z & = 5 \end{cases}$$

<u>Réponse</u>: $S = \{x = 2 + \frac{4\,z}{7},\quad y = 1 - \frac{z}{7},\quad z \in \mathbb{R}\}$ ou $S = \{x = 6 - 4\,y,\quad z = 7 - 7\,y,\quad y \in \mathbb{R}\}$

1 Exercice 9 :
Résoudre par la méthode du pivot, le système linéaire d'inconnues x, y, z, t

$$\begin{cases} -3\,x & -2\,y & -2\,z & +5\,t & = 3 \\ 2\,x & +4\,y & -z & +2\,t & = 1 \end{cases}$$

Réponse: $S = \{z = 1 + 16\,x + 24\,y, \quad t = 1 + 7\,x + 10\,y, \quad x \in \mathbb{R}, \quad y \in \mathbb{R}\}$

1 Exercice 10 :
Résoudre par la méthode du pivot, le système linéaire d'inconnues x, y, z

$$\left\{\begin{array}{llll} -x & -3\,y & -2\,z & = 3 \\ 2\,x & +y & & = 0 \\ 3\,x & -2\,y & -z & = -1 \end{array}\right.$$

Réponse: $S = \{x = -\frac{5}{9}, \quad y = \frac{10}{9}, \quad z = -\frac{26}{9}\}$

Chapitre 2

CALCULS AVEC DES MATRICES

2 Exercice 1 :
On considère les matrices A et B avec $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Calculer $3\,A$ et $2\,A - 3\,B$.
2. Former les produits matriciels $A\,B$ et $B\,A$ (que l'on écrit aussi sous la forme $A \circ B$ et $B \circ A$).
3. Calculer A^2, A^3 puis A^n pour $n \in \mathbb{N}^*$. Idem pour B.

2 Exercice 2 :
Soient les matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & -3 \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

1. Quelles sommes matricielles peut-on effectuer?
2. Indiquer les produits matriciels possibles et effectuer leurs calculs
3. Calculer, lorsque cela est possible, les carrés des matrices.

2 Exercice 3 :

1. Soit la matrice colonne $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et la matrice ligne $Y = (x,\, y)$.
   Montrer que le système linéaire $\left\{\begin{array}{lll} x & -2\,y & = a \\ 3\,x & +4\,y & = b \end{array}\right.$ peut s'écrire sous la forme $MX = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ avec M matrice $(2, 2)$ à préciser et aussi sous la forme $YN = (a\,,\, b)$ avec N matrice $(2, 2)$ à préciser.

2. Soit la matrice colonne $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et la matrice ligne $Y = (x,\, y,\, z)$.

   Montrer que le système linéaire $\begin{cases} x \quad\quad -2\,z = a \\ 2\,x + y = b \\ 4\,x + 5\,y + z = c \end{cases}$ peut s'écrire sous la forme $MX = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ avec M matrice $(3,3)$ à préciser et sous la forme $YN = (a\,,\, b,\, c)$ avec N matrice $(3,3)$ à préciser.

2 Exercice 4 :

Soit la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 15 & -3 \\ -4 & -10 & 2 \\ -8 & -20 & 4 \end{pmatrix}$$

Calculer A^2.

<u>Exercices de révision:</u>

2 Exercice 5 :

On considère les matrices $A = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Calculer $A - B + 2\,C$, $A\,C - C\,A$, $B\,C - C\,B$.
2. Calculer les produits $A\,B\,C$, $B\,A\,C$, $A\,C\,B$ et $B\,C\,A$.

<u>Réponse</u>: $A - B + 2\,C = \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$ $\quad A\,C - C\,A = \begin{pmatrix} -2 & -4 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ $\quad B\,C - C\,B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$A\,B\,C = \begin{pmatrix} -15 & -24 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = A\,C\,B$ $\quad B\,A\,C = \begin{pmatrix} -9 & -16 \\ -3 & -3 \end{pmatrix}$ $\quad B\,C\,A = \begin{pmatrix} -7 & -8 \\ -7 & -5 \end{pmatrix}$

2 Exercice 6 :

Soit la matrice $M = \begin{pmatrix} 1 & 6 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & -6 & 1 \end{pmatrix}$. On pse $Id_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Vérifier que $M\,Id_3 = Id_3\,M = M$.
2. Calculer la matrice M^2, puis la matrice $M^2 + M - 2\,Id_3$.
3. En déduire (sans calculs des produits matriciels) la matrice M^3.

Réponse: $M^2 = \begin{pmatrix} 1 & -6 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 6 & 1 \end{pmatrix}$ puis $M^2 + M - 2\,Id_3 = (0)$. On a $M^2 + M = 2\,Id_3$ qui fournit $M^2 = -M + 2\,Id_3$ donc $M^3 = -M^2 + 2\,M = -(-M + 2\,Id_3) + 2\,M = 3\,M - 2\,Id_3$ soit $M^3 = \begin{pmatrix} 1 & 18 & 0 \\ 0 & -8 & 0 \\ 0 & -18 & 1 \end{pmatrix}$.

Chapitre 3

CALCUL DE M^n avec M MATRICE

La **matrice Identité** est une matrice carrée dont tous les coefficients valent 0 sauf les coefficients de la **diagonale principale** qui sont tous égaux à 1. Ainsi, la matrice Identité d'ordre 2 est la matrice carrée $Id = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ (parfois notée Id_2). La matrice Identité d'ordre 3 est la matrice carrée

$$Id = Id_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

3 Exercice 1 :

Calculer, lorsque cela est possible, l'inverse des matrices suivantes

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

3 Exercice 2 :

Soit la matrice $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$.

1. Calculer la matrice M^2.
2. Trouver a et b tels que l'on ait la décomposition $M^2 + a\,M + b\,Id_2 = (0)$, soit

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} + a \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

3. En déduire (sans calculs) l'inverse M^{-1}.

Soient A et B des matrices qui commutent (ou permutent) c'est à dire $AB = BA$. La formule du binôme de Newton permet, pour n entier, de calculer directement $(A+B)^n$ par la formule

$$(A+B)^n = A^n + n\,A^{n-1}\,B + \frac{n\,(n-1)}{1\cdot 2}\,A^{n-2}\,B^2 + \frac{n\,(n-1)\,(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\,A^{n-3}\,B^3 + \cdots + C_n^k\,A^{n-k}\,B^k + \cdots + B^n.$$

3 Exercice 3 :
Soient les matrices

$$A = \begin{pmatrix} -2 & -4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ a & 2 \end{pmatrix}$$

1. Calculer A^2.
2. Trouver a pour que les matrices A et B commutent.

3 Exercice 4 :
Soit la matrice $M = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$: on pose $T = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Calculer la matrice T^2.
2. Trouver x et y tels que l'on ait la décomposition $M = x\,Id + y\,T$, soit
$$\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} = x\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$
3. Calculer M^2. En utilisant la formule du binôme de Newton, montrer que, pour n entier
$$M^n = 5^n\,Id + n\,5^{n-1}\,T$$

3 Exercice 5 :
Soit la matrice $M = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 2 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$: on pose $T = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

1. Calculer la matrice T^2, T^3.
2. Trouver x et y tels que l'on ait la décomposition $M = x\,Id + y\,T$, soit
$$\begin{pmatrix} 3 & 3 & 2 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = x\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

3. Calculer M^2. En utilisant la formule du binôme de Newton, montrer que, pour n entier

$$M^n = 3^n\,Id \,+\, n\,3^{n-1}\,T + + \frac{n\,(n-1)}{2}\,3^{n-2}\,T^2$$

Exercices de révision:

3 Exercice 6 :
Calculer, lorsque cela est possible, l'inverse des matrices suivantes

$$A_1 = \begin{pmatrix} 5 & 7 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \quad A_2 = \begin{pmatrix} -4 & 6 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \quad B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix} \quad B_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -4 \\ 2 & 3 & 5 \end{pmatrix} \quad B_3 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & -3 \end{pmatrix}$$

Réponse:

$$A_1^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -7 \\ -2 & 5 \end{pmatrix} \qquad B_1^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ -2 & 0 & 1 \\ -4 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad B_2^{-1} = \begin{pmatrix} -17 & 5 & 4 \\ 18 & -5 & -4 \\ -4 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

A_2 et B_3 ne sont pas inversibles.

3 Exercice 7 :
Soit la matrice $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

1. Calculer la matrice M^2.
2. Trouver a et b tels que l'on ait la décomposition $M^2 + a\,M \,+\, b\,Id_2 = (0)$.
3. En déduire (sans calculs) l'inverse M^{-1}.

Réponse: $M^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ puis $M^2 + a\,M \,+\, b\,Id_2 = \begin{pmatrix} 1+a+b & 0 \\ 3+a & 4+2\,a+b \end{pmatrix}$ donc $\{a=-3, b=2\}$ soit $M^2 - 3\,M \,+ 2\,Id_2 = (0)$. Ainsi $M\,(M - 3\,Id) = (M - 3\,Id)\,M = -2\,Id$ donc $M^{-1} = \frac{-1}{2}\,(M - 3\,Id) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{-1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

3 Exercice 8 :
Soit la matrice $M = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 3 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$: on pose $T = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Calculer les matrices T^2, T^3.
2. Trouver x et y tels que l'on ait la décomposition $M = x\,Id \,+\, y\,T$, soit

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 3 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

3. Calculer M^2. En utilisant la formule du binôme de Newton, montrer que, pour n entier

$$M^n = \begin{pmatrix} 2^{-n} & 3 \cdot n \cdot 2^{1-n} \\ 0 & 2^{-n} \end{pmatrix}$$

Réponse:

$$M^2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & 3 \\ 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

3 Exercice 9 :

Soit la matrice $M = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$: on pose $T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Calculer T^2, T^3.
2. Trouver x et y tels que l'on ait la décomposition $M = x\,Id + y\,T$, soit

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

3. Calculer M^2. En utilisant la formule du binôme de Newton, calculer pour n entier, M^n.

Réponse:

$$M^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad et \qquad M^n = \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ -2^{-3+n}\,(9-n)\,n & 2^n & -n\,2^{-1+n} \\ 2^{-1+n}\,n & 0 & 2^n \end{pmatrix}$$

Chapitre 4

MATRICES DE PROBABILITE

4 Exercice 1 :

Parmi les matrices suivantes, indiquer celles qui sont des matrices de probabilité.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ m & 1-m \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{-1}{3} & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

4 Exercice 2 :

Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$.

1. Montrer que A est une matrice de probabilité régulière.
2. Déterminer son point fixe.
3. Quelle est la limite de A^n quand n tend vers $+\infty$.

4 Exercice 3 :

Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Calculer A^2, A^3, $A^{2\,n}$, $A^{2\,n+1}$ pour n entier.
2. Montrer que A est une matrice de probabilité qui n'est pas régulière.
3. La limite de A^n quand n tend vers $+\infty$ existe-elle ?

4 Exercice 4 :

Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$.

1. Montrer que A est une matrice de probabilité régulière.
2. Déterminer son point fixe.
3. Quelle est la limite de A^n quand n tend vers $+\infty$.

<u>Exercices de révision:</u>

4 Exercice 5 :

Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$.

1. Montrer que A est une matrice de probabilité régulière.
2. Déterminer son point fixe.
3. Quelle est la limite de A^n quand n tend vers $+\infty$.

Réponse: A est une matrice de probabilité et tous les coefficients de $A^2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{6} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ sont strictement positifs. Le point fixe est la solution de $(x, y, 1-x-y) \cdot A = (x, y, 1-x-y)$ soit $\{\frac{2}{5}, \frac{1}{5}, \frac{2}{5}\}$ et A^n tend vers la matrice $\begin{pmatrix} \frac{2}{5} & \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{2}{5} & \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{2}{5} & \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \end{pmatrix}$.

4 Exercice 6 :

Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$.

1. Montrer que A est une matrice de probabilité régulière.
2. Déterminer son point fixe.
3. Quelle est la limite de A^n quand n tend vers $+\infty$.

Réponse: A est une matrice de probabilité et tous les coefficients de $A^2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{18} & \frac{11}{18} \end{pmatrix}$ sont strictement positifs. Le point fixe est la solution de $(x, y, 1-x-y) \cdot A = (x, y, 1-x-y)$ soit $\{\frac{3}{7}, \frac{1}{7}, \frac{3}{7}\}$ et A^n tend vers la matrice $\begin{pmatrix} \frac{3}{7} & \frac{1}{7} & \frac{3}{7} \\ \frac{3}{7} & \frac{1}{7} & \frac{3}{7} \\ \frac{3}{7} & \frac{1}{7} & \frac{3}{7} \end{pmatrix}$.

Chapitre 5
MATRICES DE MARKOV

5 Exercice 1 :

Trois garçons A, B et C jouent au ballon. A lance toujours le ballon à B et B lance toujours le ballon à C. Mais C lance le ballon indifféremment à A ou à B. On a ici une chaîne de Markov car le joueur qui jette le ballon n'est pas influencé par ceux qui ont eu le ballon avant lui.

1. Déterminer l'espace des états du système.

2. Déterminer la matrice de transition T

$$T = \begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} A & B & C \end{array} \\ \begin{array}{c} p(\cdots/A) \\ p(\cdots/B) \\ p(\cdots/C) \end{array} & \begin{pmatrix} \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix} \end{array}$$

de cette chaîne de Markov (on admettra que cette matrice T est régulière).

3. On suppose que C est le premier à avoir le ballon. Indiquer l'état initial du système. Déterminer, après 3 lancers du ballon, la probabilité que A ait le ballon: idem pour B, puis C.

4. Quel est l'état final du système ? Commentez ce résultat.

5. On suppose que l'état initial est $p_0 = \{\frac{1}{8}, \frac{3}{8}, \frac{1}{2}\}$. L'état final du système est-il inchangé?

5 Exercice 2 :
Un garde-forestier étudie l'évolution d'une forêt comportant 3 types d'arbres, des chênes C, des hêtres H et bouleaux B. Il compte le nombre de pousses sous des arbres adultes et il identifie la variété d'origine. Il a trouvé sous les chênes une proportion de 0.8 pour les chênes, 0.1 pour les pousses de hêtre et de 0.1 pour les pousses de bouleaux; sous les hêtres adultes il a relevé une proportion de 0.7 pousses de chênes, 0.1 pousses de hêtres et 0.2 pousses de bouleaux et enfin sous les bouleaux adultes, une proportion de 0.7 pousses de chênes, 0.0 pousses de hêtres et une proportion de 0.3 pousses de bouleaux.

1. Déterminer la matrice T de transition d'une génération à l'autre ?
2. Montrer que la matrice T est régulière.
3. Quelle est le point fixe ?
4. Quelle est la composition future de la forêt ?

5 Exercice 3 :
Deux joueurs A et B jouent à pile ou face. Chaque fois que A gagne, il touche 1 euro de B , et réciproquement. Ils partent respectivement d'un capital de 2 euros, et le jeu s'arrête lorsqu'un joueur n'a plus d'argent pour payer.

1. Déterminer les différents états du système.
2. Déterminer la matrice T de transition.
3. Quels sont les états absorbants?
4. Montrer que la matrice T n'est pas régulière.

5 Exercice 4 :
Un étudiant a l'habitude de travailler de la manière suivante. S'il étudie toute une nuit, il est sur à 70/100 de ne pas étudier la nuit suivante. Par contre, s'il n'étudie pas une certaine nuit, il est sur à 60/100 qu'il ne travaillera pas également la nuit suivante. Avec quelle fréquence étudie-t-il en fin de compte ?
Réponse: Les états du système sont E (s'il étudie) et R (s'il n'étudie pas). La matrice de transition est $T = \begin{pmatrix} \frac{3}{10} & \frac{7}{10} \\ \frac{2}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix}$. Afin de se rendre compte du rythme de travail avec lequel il étudie en fin de compte, il faut déterminer le vecteur de probabilité fixe p de T. On obtient $p = \{4/11, 7/11\} = \{p(E), p(R)\}$ pour point fixe de T donc $p(E)$ est la probabilité cherchée. De sorte qu'à la longue, l'étudiant travaille en réalité $4/11$ du temps.

Exercices de révision:

5 Exercice 5 :
(Examen mai 2007)
Le vecteur d'un parasite sanguin (Plasmodium falciparum) est un moustique (Anopheles gamhiae). Dans une population isolée, on distingue, pour un individu, 3 états possibles : Immunisé noté I, Malade noté M, Sain mais porteur de la maladie, noté S. Une étude sur cette population effectuée à un intervalle régulier d'un mois a montré que :
- 9/10 des individus se trouvant dans l'état I sont restés dans l'état I et 1/10 sont passés dans l'état S.
- 8/10 des individus se trouvant dans l'état M sont passés dans l'état I et 2/10 sont restés dans l'état M.
- 5/10 des individus se trouvant dans l'état S sont passés dans l'état M et 5/10 sont restés dans l'état S.

On suppose que le processus est de Markov.

1. Ecrire la matrice T de transition d'un mois sur le suivant, relative à un individu.
2. Calculer T^2, en déduire que la matrice T est régulière.
3. Quelle est le point fixe ?
4. Déterminer la proportion d'individus de la population, se trouvant respectivement dans chacun des 3 états, au bout de 25 ans.

Réponse: $T = \begin{pmatrix} \frac{9}{10} & 0 & \frac{1}{10} \\ \frac{4}{5} & \frac{1}{5} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$, $T^2 = \begin{pmatrix} \frac{81}{100} & \frac{1}{20} & \frac{7}{50} \\ \frac{22}{25} & \frac{1}{25} & \frac{2}{25} \\ \frac{2}{5} & \frac{7}{20} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$, le point fixe est $\{\frac{40}{53}, \frac{5}{53}, \frac{8}{53}\}$. La réponse à la dernière question revient à calculer T^{300} que l'on remplace par $lim_{n\to+\infty} T^n$, donc $p(I) = \frac{40}{53}, p(M) = \frac{5}{53}, p(S) = \frac{8}{53}$ approximativement.

5 Exercice 6 :
(Examen mai 2013)

Exercice 1: Résoudre par la méthode du pivot, le système linéaire d'inconnues x, y, z

$$\left\{\begin{array}{rrrr} x & +3\,y & -2\,z & =-1 \\ 2\,x & +y & +z & =3 \\ x & -2\,y & +z & =6 \end{array}\right.$$

Exercice 2: Soit $N = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & -2 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ et $Id_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = Id.$

1. Calculer N^2, N^3, en déduire N^k pour tout entier $k > 2$.
2. On pose $A = Id_3 + N$ et $B = Id_3 - N + N^2$. Calculer le produit AB.
3. En écrivant $A = Id_3 + N$, calculer A^n pour n entier (la matrice finale de A^n n'est pas exigée). Préciser A^4.

Exercice3: Une petite ville du nord de l'Europe est soumise à une météo très variable que l'on peut présenter en 3 états: l'état **B**=le temps est beau; l'état **P**=il pleut; l'état **N**=il neige. On suppose que le changement de temps d'un jour sur l'autre est un processus de Markov et que la matrice de transition est (en ayant classé les états dans l'ordre **B**, **P**, **N**;)

$$T = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$$

1. On suppose qu'un jour donné le temps est **B**, quelle est la probabilité que le temps soit **B** le lendemain? soit **P** le lendemain? soit **N** le lendemain?
2. Montrer que la matrice est régulière.
3. On admet que le temps est beau un jour donné, quelle est la probabilité pour qu'il fasse beau 2 jours plus tard ?
4. Déterminer le point fixe.
5. Déterminer la proportion des différents états à long terme ?

SOLUTIONS

Exercice 1:
Réponse: $S = \{x = 3, \quad y = -2, \quad z = -1\}$

Exercice2:
Réponse: $N^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $N^3 = (0)$.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 2 & 3 & 2 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & -2 & 0 \end{pmatrix} \qquad AB = Id_3$$

$$A^n = \begin{pmatrix} \frac{2+n+n^2}{2} & \frac{3\,n+n^2}{2} & n \\ \frac{-n-n^2}{2} & \frac{2-3\,n-n^2}{2} & -n \\ \frac{3\,n+n^2}{2} & \frac{5\,n+n^2}{2} & 1+n \end{pmatrix} \qquad A^4 = \begin{pmatrix} 11 & 14 & 4 \\ -10 & -13 & -4 \\ 14 & 18 & 5 \end{pmatrix}$$

Exercice 3:
Réponse:

$$T = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \end{pmatrix} \qquad T^2 = \frac{1}{36}\begin{pmatrix} 18 & 14 & 4 \\ 9 & 15 & 12 \\ 9 & 14 & 13 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{7}{18} & \frac{1}{9} \\ \frac{1}{4} & \frac{5}{12} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{4} & \frac{7}{18} & \frac{13}{36} \end{pmatrix}$$

La probabilité pour qu'il fasse beau dans 2 jours est de $\frac{1}{2}$ car $\{1, 0, 0\} \cdot T^2 = \{\frac{1}{2}, \frac{7}{18}, \frac{1}{9}\}$. Le point fixe est $\{\frac{1}{3}, \frac{2}{5}, \frac{4}{15}\}$ ce qui fournit la proportion des différents états à long terme.