1 Formulaire simplifié pour les dérivées

Rappels

$$
\begin{array}{lll}
f(x) = k_1\,u(x) + k_2\,v(x) & f'(x) = k_1\,u'(x) + k_2\,v'(x) & k_1 \text{ et } k_2 \text{ des réels} \\
f(x) = u(x)\,v(x) & f'(x) = u'(x)\,v(x) + u(x)\,v'(x) & \\
f(x) = \frac{u(x)}{v(x)} & f'(x) = \frac{u'(x)\,v(x) - u(x)\,v'(x)}{v^2(x)} &
\end{array}
$$

Dérivées usuelles:

$$
\begin{array}{lll}
f(x) = x^n & f'(x) = n\,x^{n-1} & \text{valable pour } n \in \mathrm{R} \\
f(x) = \sin(x) & f'(x) = \cos(x) & \\
f(x) = \cos(x) & f'(x) = -\sin(x) & \\
f(x) = e^x & f'(x) = e^x & \\
f(x) = \ln(x) \text{ ou } \ln(\mid x \mid) & f'(x) = \frac{1}{x} &
\end{array}
$$

On rencontrera aussi:

$$
\begin{array}{lll}
f(x) = \tan(x) & f'(x) = \frac{1}{\cos^2(x)} = 1 + \tan^2(x) & \\
f(x) = \arctan(x) & f'(x) = \frac{1}{1+x^2} & \text{la trigo disparait dans la dérivée}
\end{array}
$$

La formule $f'(x) = n\,x^{n-1}$ est très pratique car elle permet de calculer directement les dérivées de fonctions telles que $\frac{1}{x}$, $\sqrt{x}$, $\frac{1}{\sqrt{x}}$, $\cdots$. En effet, ces fonctions s'expriment simplement en utilisant les puissances négatives ou fractionnaires. Ainsi

$$\left(\frac{1}{x}\right)' = (x^{-1})' = (-1)\,x^{-1-1} = (-1)\,x^{-2} = \frac{1}{x^2} \qquad \text{(Ici n vaut -1)}$$

2 Savoir calculer les dérivées

La dérivée $f'(x)$ d'une fonction $y = f(x)$ se note aussi $\frac{df}{dx}$ (le $\frac{d}{dx}$ remplace le '). Ainsi

$$\text{pour} \quad y = f(x) = 4\,x^3 \quad \text{on a} \quad f'(x) = 12\,x^2 \qquad \text{idem que} \qquad \frac{df}{dx} = 12\,x^2$$

Newton et-ou Leibnitz (initiateurs de ces concepts) ont créé cette notation $\frac{d}{dx}$ qui offre l'immense avantage d'adopter n'importe quelle lettre $x, u, \cdots$.

$$\text{Ainsi, pour} \quad y = f(u) = 4\,u^3 \quad \text{on a} \qquad \frac{df}{du} = 12\,u^2$$

et ceci permet de calculer **automatiquement** les dérivées grâce à la formule naturelle

$$\frac{df}{dx} = \frac{df}{du}\,\frac{du}{dx}$$

Par exemple, pour $f(x) = (x^2 + x + 1)^3$, on a $f(x) = u^3$ en prenant $u = (x^2 + x + 1)$.

$$\text{Ainsi} \quad \frac{df(x)}{dx} = \frac{d\,u^3}{dx} = \frac{d\,u^3}{du}\,\frac{du}{dx} = 3\,u^2\,\frac{du}{dx} = 3\,u^2\,(2\,x+1) = 3\,(2\,x+1)\,(x^2+x+1)^2$$

Nous n'avons plus besoin des formulaires compliqués qui contiennent des $u'(x)$ (notamment les formules du style $(u(x)^n)' = n\,u(x)^{n-1}\,u'(x)$).

Dans notre exemple $f(x) = (x^2 + x + 1)^3$, nous avons en réalité utilisé une chaîne de calculs.

L'utilisation de chaînes de calculs permet d'**automatiser le calcul**.
Automatisons le calcul de la dérivée de

$$f(x) = \ln(\sin(x^2 + 1))$$

Une calculette réalise la chaîne de calculs (= les calculs successifs) suivante

$$x \longrightarrow \quad x^2 + 1 = u \longrightarrow \quad \sin(u) = v \longrightarrow \quad \ln(v) = f(x)$$

On lit cette chaîne en commençant par la fin (=**bord droit**) (cad on a $f(x) = \ln(v)$) et on progresse dans les calculs en utilisant une flèche mobile $\Longleftarrow$ qui va atteindre progressivement le bord gauche. Au départ, on a donc

$$\begin{array}{cccc} x \longrightarrow & x^2 + 1 = u \longrightarrow & \sin(u) = v \longrightarrow & \ln(v) = f(x) \\ & & & \Leftarrow \end{array}$$

On écrit alors

$$\begin{aligned} \tfrac{df}{dx} = \tfrac{d\,\ln(v)}{dx} \quad & = \cdots \\ & = \text{la fonction } ln(v) \text{ utilise le vocabulaire } v\text{, on doit donc dériver en } v \\ & = \tfrac{d\,\ln(v)}{dv}\,\tfrac{dv}{dx} = \tfrac{1}{v}\,\tfrac{dv}{dx} \end{aligned}$$

Pour obtenir $\frac{1}{v}\,\frac{dv}{dx}$, on fait progresser la flèche $\Longleftarrow$ qui se déplace vers v, soit

$$\begin{array}{cccc} x \longrightarrow & x^2 + 1 = u \longrightarrow & \sin(u) = v \longrightarrow & \ln(v) = f(x) \\ & & \Longleftarrow & \end{array}$$

et on recommence (le texte $\quad \longrightarrow \quad \ln(v) = f(x) \quad$ n'existe donc plus)

$$\begin{aligned} \tfrac{dv}{dx} = \tfrac{d\,\sin(u)}{dx} \quad & = \cdots \\ & = \text{la fonction } \sin(u) \text{ utilise le vocabulaire } \cdots \text{ etc } \cdots \end{aligned}$$

Résumons

$$\begin{aligned} \frac{df}{dx} &= \frac{d\,\ln(v)}{dx} = \frac{d\,\ln(v)}{dv}\,\frac{dv}{dx} = \frac{1}{v}\,\frac{dv}{dx} \\ \frac{dv}{dx} &= \frac{d\,\sin(u)}{dx} = \frac{d\,\sin(u)}{du}\,\frac{du}{dx} = \cos(u)\,\frac{du}{dx} \\ \frac{du}{dx} &= \frac{d\,(x^2+1)}{dx} = 2\,x \end{aligned}$$

On recolle les morceaux en démarrant par la 1^{ere} ligne

$$\begin{aligned}\frac{df}{dx} &= \frac{1}{v}\,\frac{dv}{dx}\\ &= \frac{1}{v}\,\cos(u)\,\frac{du}{dx}\\ &= \frac{1}{v}\,\cos(u)\,(2\,x)\\ &= \frac{1}{\sin(x^2+1)}\,\cos(x^2+1)\,(2\,x) = 2\,x\,\frac{\cos(x^2+1)}{\sin(x^2+1)}\end{aligned}$$

3 Méthode rapide

> Pour calculer la dérivée de
> $$f(x) = \ln(\sin(x^2+1))$$
> on écrit la chaîne de calculs
> $$x \longrightarrow \quad x^2+1 = u \longrightarrow \quad \sin(u) = v \longrightarrow \quad \ln(v) = f(x)$$
> et on dérive chaque maillon de la chaîne. Il reste à multiplier les réponses.

Ainsi

$$\begin{array}{cccc} x \longrightarrow & x^2+1 = u \longrightarrow & \sin(u) = v \longrightarrow & \ln(v) = f(x)\\ & \Downarrow & \Downarrow & \Downarrow\\ & 2\,x & \cos(u) & \frac{1}{v}\end{array}$$

$$\text{donc } f'(x) = \quad 2\,x \quad \times \quad \cos(u) \quad \times \quad \tfrac{1}{v} \quad = \quad 2\,x\,\tfrac{\cos(x^2+1)}{\sin(x^2+1)}$$

4 La formule du binôme de Newton

Elle permet, pour n entier, le calcul immédiat de $(a+b)^n$. Formulée avec les coefficients C_n^k, elle s'écrit:

$$(a+b)^n = a^n + C_n^1 a^{n-1} b + C_n^2 a^{n-2} b^2 + \cdots + C_n^k a^{n-k} b^k + \cdots + b^n$$

notation que l'on abrège parfois en $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k} b^k$ en ayant convenu de poser $C_n^0 = C_n^n = 1$. On évite les coefficients C_n^k en utilisant **le triangle de Pascal**. Rappelons que: $C_n^k = C_n^{n-k}$.
Développons l'expression $(\frac{2}{3}x + \frac{3}{2}y^2)^4$. On procéde comme suit:
On écrit

$$(\frac{2}{3}x + \frac{3}{2}y^2)^4 = (\frac{2}{3}x)^4 + \cdots\ (\frac{2}{3}x)^3\ (\frac{3}{2}y^2)^1 + \cdots\ (\frac{2}{3}x)^2\ (\frac{3}{2}y^2)^2 + \cdots\ (\frac{2}{3}x)^1\ (\frac{3}{2}y^2)^3 + (\frac{3}{2}y^2)^4$$

et on va chercher les coefficients manquants $\cdots$ en utilisant le triangle de Pascal, donc

$$\begin{aligned}(\tfrac{2}{3}x + \tfrac{3}{2}y^2)^4 &= (\tfrac{2}{3}x)^4 + \cdots (\tfrac{2}{3}x)^3 (\tfrac{3}{2}y^2)^1 + \cdots (\tfrac{2}{3}x)^2 (\tfrac{3}{2}y^2)^2 + \cdots (\tfrac{2}{3}x)^1 (\tfrac{3}{2}y^2)^3 + (\tfrac{3}{2}y^2)^4\\ &= (\tfrac{2}{3}x)^4 + 4\,(\tfrac{2}{3}x)^3 (\tfrac{3}{2}y^2)^1 + 6\,(\tfrac{2}{3}x)^2 (\tfrac{3}{2}y^2)^2 + 4\,(\tfrac{2}{3}x)^1 (\tfrac{3}{2}y^2)^3 + (\tfrac{3}{2}y^2)^4\end{aligned}$$

donc
$$(\frac{2}{3}x+\frac{3}{2}y^2)^4=\frac{16}{81}\,x^4+\frac{16}{9}\,x^3y^2+6\,x^2y^4+9\,xy^6+\frac{81}{16}\,y^8$$
Lorsque l'on remplace x par -x dans la formule de Newton, on obtient
$$(a-b)^n=a^n-\frac{n}{1}a^{n-1}b+\frac{n(n-1)}{2!}a^{n-2}b^2-\cdots+(-1)^k\frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)}{k!}a^{n-k}b^k+\cdots+(-1)^nb^n.$$
c'est à dire, les signes de la formule sont alternés.

5 Le calcul des primitives

Soit à calculer
$$I=\int\frac{6\,x^2+2}{(x^3+x+1)^4}\,dx$$

La méthode efficace (appelée *changement de variable*) consiste à remplacer la primitive initiale I utilisant le vocabulaire(x) en une nouvelle primitive **plus simple** utilisant un nouveau vocabulaire(u): on calcule alors I dans le vocab(u), ce qui fournit une réponse en u, et on termine en revenant au vocab(x).
Il faut bien choisir u. La plupart du temps, on propose pour vocab(u)

$$\begin{aligned}u &= \text{la quantité ou l'expression la plus enfermée}\\ &= \text{ce qui est le plus enfermé dans le dénominateur, sous une racine carrée ...}\\ &= \text{ce qui est enfermé dans un sin(), un ln(), une exponentielle ...}\end{aligned}$$

Ici, on tente
$$u=x^3+x+1 \qquad \text{la tentative proposée peut échouer...}$$

La traduction du texte en x vers un texte en u s'effectue comme suit:

$$\begin{array}{rl}\text{on calcule de suite} & \dfrac{du}{dx}=\dfrac{d\,(x^3+x+1)}{dx}=3\,x^2+1\\ \text{ce qui implique} & du=(3\,x^2+1)\,dx\\ \text{ce qui signifie que}\quad dx\quad\text{cherche} & du=(\quad\heartsuit\quad)\hookleftarrow dx\\ \text{dans la primitive} & I=\displaystyle\int\frac{6\,x^2+2}{(x^3+x+1)^4}\,dx=\int\frac{2\,(3\,x^2+1)}{(x^3+x+1)^4}\,dx\end{array}$$

Diagnostic: La traduction d'une primitive quelconque exprimée dans le vocab(x) vers une primitive exprimée dans un nouveau vocab(u) sera impossible lorsque dx ne trouve pas le $\heartsuit$.

Ici, dx trouve bien le $3\,x^2+1=\heartsuit$ donc

$$
\begin{array}{rll}
 & I = \displaystyle\int \frac{2\,\heartsuit}{(x^3+x+1)^4}\,dx = 2\int \frac{\heartsuit}{(x^3+x+1)^4}\,dx & \\
\text{traduire d'abord le } \quad dx \hookrightarrow \heartsuit & = 2\displaystyle\int \frac{du}{(\cdots)^4} & \text{ici, ne pas enchevêtrer les deux vocabs} \\
\text{puis le texte restant} & = 2\displaystyle\int \frac{du}{u^4} & \text{la traduction en u est un succès} \\
\text{On primitive alors en } u & = 2\displaystyle\int u^{-4}\,du = 2\,\frac{u^{-4+1}}{-4+1} = 2\,\frac{u^{-3}}{-3} = \frac{-2}{3}\,u^{-3} = \frac{-2}{3}\,\frac{1}{u^3} + \text{Cste} & \\
\text{et il reste à revenir en } x & = \displaystyle\frac{-2}{3}\,\frac{1}{(x^3+x+1)^3} + \text{Cste} &
\end{array}
$$

Résumé: Pour le calcul d'une primitive, on doit penser *en priorité* au changement de variables. Lorsqu'il ne fonctionne pas, on a recours à des astuces plus ou moins classiques et on utilise également *l'intégration par parties* lorsqu'il y a des fonctions de nature différente sous le signe $\int$. Ceci se traduit par

$$\int u(x)\,v(x)\,dx = [\cdots \quad \cdots] - \int \cdots(x) \quad \cdots(x)\,dx$$

Vous devez savoir impérativement que

$$
\begin{array}{lll}
\int x^n\,dx & = \frac{x^{n+1}}{n+1} & \text{même lorsque n n'est pas entier !!} \\
\int x^{-1}\,dx & = \ln(x) & \text{cas exceptionnel } n=-1
\end{array}
$$

6 Equations différentielles linéaires du 1^{er} ordre

Une équation différentielle est une équation qui contient des y, des y', des y'', $\cdots$ et des fonctions de x: le but du cours est de trouver quelles sont les fonctions $y=y(x)$ qui satisfont cette équation.
Une équation différentielle est du 1^{er} **ordre** lorsqu'elle contient des y, des y' et des fonctions de x (donc pas de y'', de y''', etc...), du **second ordre** lorsqu'elle contient des y, des y', des y'' (donc pas de y''' ou de dérivées d'ordre supérieur) et des fonctions de x. Observons les exemples suivants:

$$y' + 2\,x^2\,y = x^3 + 1 \qquad \text{(Eq1)} \qquad \cdots \text{ordre} \qquad \text{nature=}$$
$$y' + 2\,x^2\,y^2 = \ln(x) + x \qquad \text{(Eq2)} \qquad \cdots \text{ordre} \qquad \text{nature=}$$
$$(x+4)y' + 2\,x^2\,y = \cos(x) + e^x \qquad \text{(Eq3)} \qquad \cdots \text{ordre} \qquad \text{nature=}$$
$$(x+4)y' + 2\,x^2\,\frac{1}{y} = \tan(x) + e^x \qquad \text{(Eq4)} \qquad \cdots \text{ordre} \qquad \text{nature=}$$
$$y'' + (x+4)y' + 2\,x\,y = e^x \qquad \text{(Eq5)} \qquad \cdots \text{ordre}$$
$$4\,y''' + 2\,y' - 2\,y = \tan(x) + e^x \qquad \text{(Eq6)} \qquad \cdots \text{ordre}$$
$$y'' + 4\,y' + 2\,x\,y^2 = e^x \qquad \text{(Eq7)} \qquad \cdots \text{ordre}$$

Une équation différentielle du 1^{er} ordre est **linéaire** lorsqu'elle est de la forme

$$a(x)\,y' + b(x)\,y = c(x)$$

avec $a(x)$, $b(x)$, $c(x)$ des fonctions de x. On dit qu'elle est à coefficients constants lorsque les fonctions $a(x)$, $b(x)$ sont des constantes.

Dans la liste d'equations différentielles ci-dessus, indiquer celles qui sont linéaires (rubrique 'nature= ').

L'équation

$$a(x)\,y' + b(x)\,y = 0$$

est appelée **l'équation homogène** associée à l'équation différentielle $a(x)\,y' + b(x)\,y = c(x)$.

Principe de résolution des équations différentielles linéaires du 1^{er} ordre.

- On cherche d'abord **toutes** les solutions de l'équation **homogène** $a(x)\,y' + b(x)\,y = 0$. La réponse dépend d'une constante λ et est $\boxed{y(x) = \lambda\, e^{-\int \frac{b(x)}{a(x)}\,dx}}$
- On cherche **une seule** solution particulière $y_1(x)$ de l'équation **complète** $a(x)\,y' + b(x)\,y = c(x)$. Plusieurs méthodes sont possibles
  1. Si $a(x)$, $b(x)$, $c(x)$ sont des polynomes, on cherche $y(x)$ sous la forme d'un polynome $y(x) = a_1 + a_2\,x + a_3\,x^2 + \cdots$. On calcule $y'(x) = a_2 + 2\,a_3\,x + \cdots$ et on reporte dans $a(x)\,y' + b(x)\,y$. Le polynome ainsi obtenu contient des $a_1, a_2, a_3, \cdots$ et doit coincider avec le polynome $c(x)$ ce qui débouche sur un système d'équations linéaires d'inconnues $a_1, a_2, a_3, \cdots$ que l'on doit résoudre.
  2. Si le membre de droite est de la forme (polynome)$\times(e^{k\,x})$, on cherchera une solution particulière de la forme $y(x) = P(x)\,e^{k\,x}$. On dérive, donc $y'(x) = P'(x)\,e^{k\,x} + P(x)\,k\,e^{k\,x}$ puis on reporte dans $a(x)\,y' + b(x)\,y$: on égale alors le résultat avec le membre de droite (polynome) $\times$ $(e^{k\,x})$. Les exponentielles se simplifient et $P(x)$ vérifie alors une équation différentielle très simple qu'il faut résoudre.
  3. Si on n'a aucune indication ou aucune piste, on utilise **la méthode de variation de la constante**. Cette méthode infaillible propose de chercher une solution particulière de la forme $y(x) = \lambda(x)\,e^{-\int \frac{b(x)}{a(x)}\,dx}$ (cad la constante λ du début devient une

fonction de x ....!). *Notons ici que* $e^{-\int \frac{b(x)}{a(x)}\,dx} = g(x)$ *a déjà été mis en clair.* On démarre donc avec $y(x) = \lambda(x)\,g(x)$, on dérive $y'(x) = \lambda'(x)\,g(x) + \lambda(x)\,g'(x)$, on reporte dans $a(x)\,y' + b(x)\,y$ et (s'il n'y a pas d'erreurs de calculs) il reste uniquement $a(x)\,\lambda'(x)\,g(x)$ qui est donc égal à la fonction $c(x)$. Ainsi $\lambda'(x) = \frac{c(x)}{a(x)\,g(x)}$ et on primitive pour obtenir $\lambda(x)$. On reporte alors dans $y(x) = \lambda(x)\,g(x)$ ce qui fournit une solution particulière.

4. Lorsque le membre de droite $c(x)$ contient des fonctions d'espèces différentes (par exemple, $c(x) = \sin(x) + x^2$), on doit utiliser **le principe de superposition des solutions**.
5. parfois, l'énoncé propose d'emblée une solution particulière: on doit alors vérifier qu'elle convient. Ce cas est peu instructif.

- La solution **générale** $y(x)$ de l'equation différentielle $a(x)\,y' + b(x)\,y = c(x)$ s'écrit alors [1]

$$y(x) = \boxed{\lambda\, e^{-\int \frac{b(x)}{a(x)}\,dx} \quad + \quad y_1(x)}$$

7 Equations différentielles linéaires du 2^{eme} ordre

Une équation différentielle du second ordre est **linéaire** lorsqu'elle est de la forme

$$a(x)\,y'' + b(x)\,y' + c(x)\,y = d(x)$$

avec $a(x)$, $b(x)$, $c(x)$ et $d(x)$ des fonctions de x.
Elle est à coefficients constants lorsqu'elle est de la forme

$$a\,y'' + b\,y' + c\,y = d(x)$$

avec a, b, c des réels et $d(x)$ est une fonction de x.

Le cours n'étudie que les équations différentielles linéaires du second ordre à coefficients constants.

Principe de résolution des équations différentielles linéaires du 2^{eme} ordre.

- On cherche d'abord **toutes** les solutions de l'équation **homogène** $a\,y'' + b\,y' + c\,y = 0$. La réponse dépend toujours de deux constantes λ_1 et λ_2. Il y a 3 possibilités dépendant des racines r_1, r_2 du polynome $a\,r^2 + b\,r + c = 0$:

  1. $\boxed{y(x) = \lambda_1\,e^{r_1\,x} + \lambda_2\,e^{r_2\,x}}$ pour $r_1 \neq r_2$ racines réelles.
  2. $\boxed{y(x) = \lambda_1\,e^{r\,x} + \lambda_2\,x\,e^{r\,x}}$ pour $r_1 = r_2 = r$ racine double.
  3. $\boxed{y(x) = e^{u\,x}\big[\lambda_1\,\sin(v\,x) + \lambda_2\,\cos(v\,x)\big]}$ pour des racines complexes $u \pm i\,v$

[1] Mathématiquement, la réponse n'est valable que sur un intervalle sur lequel la fonction $a(x)$ ne s'annule pas. On doit donc changer de constante λ lorsque l'on change d'intervalle.

- On cherche **une seule** solution particulière $y_1(x)$ de l'équation **complète** $a\,y'' + b\,y' + c\,y = d(x)$. Plusieurs méthodes sont possibles
  1. Si $d(x)$ est un polynome de degré, on cherche $y(x)$ sous la forme d'un polynome $y(x) = a_1 + a_2\,x + a_3\,x^2 + \cdots$ de même degré. On calcule $y'(x) = a_2 + 2\,a_3\,x + \cdots$ puis $y''(x)$ et on reporte dans $a\,y'' + b\,y' + c\,y$ etc....
  2. Si le membre de droite est de la forme (polynome)$\times(e^{k\,x})$, on cherchera une solution particulière de la forme $y(x) = P(x)\,e^{k\,x}$. On calcule $y'(x) = P'(x)\,e^{k\,x} + P(x)\,k\,e^{k\,x}$ puis $y''(x)$ et on reporte dans $a\,y'' + b\,y' + c\,y$ **en disposant** les calculs en colonnes. On égale alors le résultat avec le membre de droite (polynome) $\times$ $(e^{k\,x})$. Les exponentielles se simplifient et $P(x)$ vérifie alors une équation différentielle plus simple qu'il faut résoudre.
  3. la méthode de variation de la constante existe mais est hors programme
  4. Lorsque le membre de droite $c(x)$ contient des fonctions d'espèces différentes (par exemple, $d(x) = \sin(x) + x^2$), on doit utiliser **le principe de superposition des solutions**.
  5. parfois, l'énoncé propose une solution particulière de telle ou telle forme. Il faut procéder comme dans le 1).
- La solution **générale** $y(x)$ de l'equation différentielle $a(x)\,y' + b(x)\,y = c(x)$ s'écrit alors

$$y(x) = \boxed{\lambda_1 \cdots \; + \lambda_2 \cdots \quad + \quad y_1(x)}$$

Disposition des calculs:
Calculer l'expression $2\,y''(x) + \;y'(x) - 10\,y(x)$ lorsque $y(x)$ est de la forme $y(x) = P(x)\,e^{2\,x}$.
On a déjà

$$\begin{aligned} y'(x) &= P'\,e^{2\,x} + 2\,P\,e^{2\,x} \\ y''(x) &= P''\,e^{2\,x} + 4\,P'\,e^{2\,x} + 4\,P\,e^{2\,x} \end{aligned}$$

On consacre une ligne pour chaque terme $2\,y''(x)$, $\;y'(x)$ et $-10\,y(x)$. Ainsi

$$\left\{ \begin{array}{l} 2\,y''(x) \\ +y'(x) \\ -10\,y(x) \end{array} \right. = e^{2\,x} \left\{ \begin{array}{ccc} 2\,P'' & 8\,P' & 8\,P \\ & P' & 2\,P \\ & & -10\,P \end{array} \right.$$

donc

$$2\,y''(x) + \;y'(x) - 10\,y(x) = e^{2\,x}\,\big(\quad 2\,P'' + 9\,P' \quad \big)$$